UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

9225/8

ACTA
MATHEMATICA

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/actamathematica35upps

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

35

125613
26/12/12

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG
1912

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B., UPPSALA

PARIS
A. HERMANN ET FILS.
6 RUE DE LA SORBONNE.

QA
1
A2575
v.35

REDACTION

SVERIGE:

A. V. Bäcklund, Lund.
I. Fredholm, Stockholm.
A. Lindstedt, »
G. Mittag-Leffler, »
E. Phragmén, »
A. Wiman, Uppsala.

NORGE:

Elling Holst, Christiania.
C. Störmer, »
L. Sylow, »

DANMARK:

J. L. W. V. Jensen, Kjöbenhavn.
H. G. Zeuthen, »

FINLAND:

Ernst Lindelöf, Helsingfors.
Hj. Mellin, »

INHALTSVERZEICHNISS — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 35. — 1912. — TOME 35.

PRIX BOLYAI.

PROCÈS VERBAL DES SÉANCES DE LA COMMISSION INTERNATIONALE DE 1910.

A l'occasion du centième anniversaire de la naissance de JEAN BOLYAI, l'Académie Hongroise des Sciences, voulant perpétuer le souvenir de cet illustre savant, ainsi que celui du profond penseur que fut FARKAS BOLYAI, son père et son maître, avait décidé de fonder un prix international qui devait porter le nom du prix Bolyai. Ce prix devait être décerné pour la première fois en 1905, puis de 5 en 5 ans à l'auteur du meilleur ouvrage de mathématiques paru au cours des 5 années précédentes, en prenant en considération toute son œuvre antérieure.

D'après le réglement du prix, l'Académie avait confié le soin de le décerner pour les années 1905—1909 à une Commission composée de deux membres résidants: M. JULES KÖNIG, secrétaire de la classe des Sciences, M. GUSTAVE RADOS, membre de la Classe, et deux membres étrangers: M. GÖSTA MITTAG-LEFFLER membre de l'Académie des Sciences suédoise, M. HENRI POINCARÉ membre de l'Institut de France.

La Commission s'est réunie à Budapest le 17 et 18 october 1910 et elle a désigné comme président M. JULES KÖNIG et comme rapporteur M. HENRI POINCARÉ.

Parmi les travaux les plus dignes d'attention publiés dans les 5 dernières années, la Commission à particulièrement remarqué ceux de M. DAVID HILBERT, qui par la profondeur de la pensée, l'originalité des méthodes, la rigueur logique des démonstrations, ont déjà exercé une influence considérable sur les progrès des sciences mathématiques.

Après avoir examiné les titres divers de cet auteur, et prenant en considération non seulement ses travaux des 5 dernières années, mais ses recherches antérieures et l'ensemble de sa carrière scientifique, la Commission a unanimement décidé de décerner le prix Bolyai de l'Académie des Sciences hongroise pour les années 1905—1909 à

M. DAVID HILBERT.

Les motifs de cette décision seront exposés dans le rapport de M. Poincaré.
Ce procès verbal a été accepté à l'unanimité.
Budapest, 18 october 1910.

Signé:

König, président.

Poincaré, rapporteur.
Mittag-Leffler.
Rados.

Rapport

par

HENRI POINCARÉ.

Les problèmes traités par M. Hilbert sont tellement variés et leur importance est si évidente qu'un long préambule ne nous semble pas nécessaire. Je crois préférable d'entrer immédiatement dans l'exposé détaillé de ses principaux mémoires. Le lecteur en présence de résultats si considérables tirera la conclusion de lui-même.

Les Invariants.

Les premiers travaux de M. Hilbert sont relatifs à la théorie des invariants. On sait avec quelle passion cette partie des mathématiques a été cultivée vers le milieu du siècle dernier et combien elle a été délaissée depuis. Il semblait en effet que les Clebsch, les Gordan, les Cayley, les Sylvester eussent épuisé tout ce qu'on pouvait tirer des méthodes anciennes et qu'il n'y eût plus après eux que peu de chose à glaner. Mais les progrès de l'Algèbre et de l'Arithmétique, et en particulier la théorie des nombres entiers algébriques, l'extension qu'on en fit bientôt aux polynômes entiers, la théorie des modules de Kronecker, allaient permettre d'aborder la question par un côté encore inexploré. C'est ce qu'a fait M. Hilbert en s'attaquant tout d'abord au célèbre théorème de Gordan, d'après lequel tous les invariants d'un système de formes peuvent s'exprimer d'une façon rationnelle et entière en fonctions d'un nombre fini d'entre eux. On ne saurait mieux mesurer le progrès accompli qu'en comparant le volume que

Gordan avait dû consacrer à sa démonstration aux quelques lignes dont Hilbert a pu se contenter. La méthode gagnait en généralité autant qu'en simplicité et on pouvait entrevoir toute une série de généralisations possibles. Un lemme très simple inspiré par les idées de Kronecker avait rendu ce résultat possible.

Considérons une série indéfinie de formes F dépendant de n variables, on peut trouver parmi elles un nombre fini de formes $F_1, \ldots, F_p$ telles qu'une forme quelconque F de la série puisse être égalée à

$$F = A_1 F_1 + \cdots + A_p F_p \tag{1}$$

les A étant des formes dépendant des mêmes variables. C'est là une conséquence de la notion fondamentale de module introduite par Kronecker dans la science. Cela veut dire dans le langage de Kronecker que les diviseurs communs à plusieurs modules, ceux-ci fussent-ils en nombre infini, sont les sous multiples de l'un d'entre eux qui est leur plus grand commun diviseur, et dans le langage géométrique (en supposant 4 variables et les regardant comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace) que l'ensemble des points communs à un nombre infini de surfaces algébriques se compose d'un nombre fini de points isolés et d'un nombre fini de courbes gauches algébriques.

Mais ce n'est pas tout, supposons que les F soient les invariants d'un système de formes et les A des fonctions des coëfficients de ces formes. On peut toujours supposer que les A sont aussi des invariants, sans quoi on pourrait effectuer sur les formes une transformation linéaire arbitraire. Alors dans la relation (1) ainsi transformée, figureraient les coëfficients de cette transformation. En appliquant à la relation (1) transformée, un certain processus de différentiations successives (les différentiations s'effectuant par rapport aux coëfficients de la transformation linéaire) on arrive à une relation de même forme que 1 mais où les A sont des invariants. La démonstration du théorème de Gordan s'en déduit immédiatement.

Mais ce n'est pas tout; entre ces invariants fondamentaux, il y a un certain nombre de relations appelées syzygies. Toutes les syzygies peuvent se déduire d'un nombre fini d'entre elles par addition et multiplication. Entre ces syzygies fondamentales du 1^er^ ordre, il y a des syzygies du 2^d^ ordre, qui peuvent aussi se déduire d'un nombre fini d'entre elles par addition et multiplication et ainsi de suite.

M. Hilbert déduit ce résultat d'un théorème général d'algèbre. Considérons un système d'équations linéaires de la forme:

$$\Sigma F_{ik} X_i = 0$$

où les F sont des formes données et les X des formes inconnues homogènes par rapport à certaines variables; l'étude des solutions de ce système et des relations qui les lient conduit à considérer une série de systèmes dérivés jusqu'à ce qu'on arrive à un système dérivé qui n'admet plus aucune solution. C'est ainsi d'ailleurs que M. HILBERT fut amené à déterminer et à étudier le nombre $X(R)$ des conditions distinctes auxquelles doit satisfaire une forme de degré R pour être congrue à zéro par rapport à un module donné.

Mais pour compléter la théorie, il ne suffisait pas d'établir l'existence d'un système d'invariants fondamentaux, il fallait donner les moyens de le former effectivement, et ce problème a été ramené par l'auteur à une question qui se rattache à la théorie des nombres entiers algébriques étendue aux polynômes entiers.

Le problème est ainsi décomposé en trois autres.

1° Trouver des invariants J_m en fonctions desquels tous les autres puissent s'exprimer sous une forme *entière et algébrique*, c'est-à-dire tels qu'un invariant quelconque J satisfasse à une équation algébrique

$$J^k + G_1 J^{k-1} + G_2 J^{k-2} + \cdots + G_{k-1} J + G_k = 0$$

les G étant des polynômes entiers par rapport aux J_m.

2° Trouver des invariants en fonctions desquels tous les autres puissent s'exprimer rationnellement.

3° Trouver des invariants en fonction desquels tous les autres puissent s'exprimer sous forme entière et rationnelle.

De ces trois problèmes le premier est le plus difficile. Si on le suppose résolu, l'ensemble des invariants se présente comme un *corps algébrique*, et le premier pas à faire c'est de déterminer le degré de ce corps; c'est à quoi parvient M. HILBERT au moins pour les formes binaires en évaluant de deux manières différentes le nombre $\varphi(\sigma)$ des invariants linéairement indépendants de degré σ, ou plutôt la valeur asymptotique de cette fonction numérique $\varphi(\sigma)$ pour σ très grand.

Une fois le premier problème résolu, la solution des deux autres se ramène à une question classique de l'arithmétique des polynômes et de la théorie des corps algébriques. Il s'agit donc de trouver les invariants fondamentaux à l'aide desquels tous les autres s'expriment sous forme entière et algébrique.

A cet effet M. HILBERT remarque que ce sont ceux qui ne peuvent s'annuler sans que tous les autres s'annulent. On conçoit ainsi que la recherche de ces invariants fondamentaux sera singulièrement facilitée par l'étude des *formes nulles*, c'est-à-dire de celles dont les coëfficients numériques sont choisis de telle sorte que les valeurs numériques de tous les invariants soient nulles.

Dans le cas des formes binaires, les formes nulles sont celles qui sont divisibles par une puissance suffisamment élevée d'un facteur linéaire; mais dans les autres cas le problème est plus délicat. L'auteur met d'abord en évidence un certain nombre de théorèmes.

Considérons une forme à coëfficients numériques et sa transformée par une substitution linéaire quelconque; les coëfficients de cette transformée seront des polynômes entiers par rapport aux coëfficients de la substitution. Si le déterminant de la substitution est une fonction *algébrique et entière* de ces polynômes entiers, la forme proposée n'est pas une forme nulle. Dans le cas contraire, c'est une forme nulle.

Considérons d'autre part les transformées d'une forme par une substitution linéaire dépendant d'un paramètre arbitraire t et de telle façon que les coëfficients de cette substitution soient des séries développables suivant les puissances entières positives ou négatives mais croissantes de ce paramètre. S'il s'agit d'une forme nulle, on peut choisir une substitution de cette nature de telle sorte que son déterminant devienne infini pour $t = 0$, tandis que les coëfficients de la forme transformée restent finis. M. Hilbert montre que cette condition est nécessaire pour que la forme proposée soit nulle, et il est d'ailleurs évident qu'elle est suffisante. A chaque forme nulle correspond donc une et peut-être plusieurs substitutions linéaires jouissant de la propriété énoncée. Cela posé, l'auteur démontre que partant d'une forme nulle quelconque, on peut par une transformation linéaire la transformer en une forme nulle *canonique*. Une forme est dite canonique quand la substitution linéaire qui lui correspond et qui jouit par rapport à elle de la propriété que nous venons d'énoncer est de la forme simple:

$$\begin{vmatrix} t^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{\lambda_3} \end{vmatrix}$$

La recherche des formes nulles est ainsi ramenée à celle des formes nulles canoniques qui est beaucoup plus simple. On trouve que les formes nulles canoniques sont celles auxquelles il manque certains termes; et la détermination des termes qui doivent manquer peut se faire aisément grâce à un schema géométrique simple. On voit sous quel aspect nouveau et élégant se présentent aujourd'hui, grâce à M. Hilbert, des problèmes qui avaient tenté tant de géomètres il y a cinquante ans.

Le nombre e.

M. Hermite a le premier démontré que le nombre e est transcendant et peu de temps après M. Lindemann étendait ce résultat au nombre π. C'était là une

conquête importante pour la science, mais les méthodes d'HERMITE étaient encore susceptibles de perfectionnements; quelque ingénieuses et quelque originales qu'elles fussent, on sentait qu'elles ne conduisaient pas au but par le chemin le plus court. Ce chemin le plus court, M. HILBERT l'a trouvé et il semble qu'on ne puisse plus apporter désormais à la démonstration de simplification nouvelle.

C'était la seconde fois que M. HILBERT donnait d'une théorème connu, mais qu'on ne pouvait établir que par des considérations ardues, une démonstration d'une étonnante simplicité. Cette faculté de simplifier ce qui avait d'abord semblé complexe se présentait ainsi comme un des caractères de son talent.

Arithmétique.

Les travaux arithmétiques de M. HILBERT ont principalement porté sur les corps algébriques. L'ensemble des nombres qui peuvent s'exprimer rationnellement en fonctions d'un ou de plusieurs nombres algébriques constitue un domaine de rationalité, et l'ensemble des nombres de ce domaine qui sont des entiers algébriques constitue un corps. Si on envisage ensuite tous les nombres algébriques d'un corps qui peuvent être mis sous la forme:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p$$

où les α sont des nombres *donnés* du corps, et les x des nombres indéterminés de ce même corps, l'ensemble de ces nombres est ce qu'on appelle un *idéal.* Ce qui fait l'intérêt de cette considération c'est que les idéaux obéissent en ce qui concerne leur divisiblité aux lois habituelles de l'Arithmétique et qu'en particulier tout idéal est décomposable d'une manière et d'une seule en idéaux premiers. C'est là le *théorème fondamental de Dedekind.*

D'autre part, nous pouvons considérer des nombres qui satisfont à une équation algébrique dont les coëfficients appartiennent à un domaine D de rationalité. Ces nombres et ceux qui peuvent s'exprimer rationnellement par leur moyen définiront un nouveau domaine de rationalité D' plus étendu que D; et un corps algébrique K' plus étendu que le corps K qui correspond à D. On peut alors rapporter le corps K', non pas aux nombres rationnels vulgaires et au corps des entiers de l'arithmétique ordinarie, mais au domaine D et au corps algébrique K. On pourra alors parler du degré *relatif* de K' par rapport à K, de la *norme relative* d'un nombre algébrique de K' par rapport à K etc. Il y aura des corps relativement quadratiques obtenus par l'adjonction au domaine D d'un radical $\sqrt{\mu}$, μ étant un nombre du domaine D, et des corps relativement abéliens, obte-

nus par l'adjonction à D des racines d'une équation abélienne. Il y a là une sorte de généralisation des idées de DEDEKIND, que HILBERT n'est sans doute pas le premier à avoir entrevue, mais dont il a tiré un parti inattendu.

Nous devons aussi parler des corps *galoisiens*, dont l'équation génératrice est une équation de GALOIS. Un corps quelconque est contenu dans un corps galoisien, de la même façon que le corps K dont nous parlions tout à l'heure est contenu dans le corps K'; et ce corps galoisien s'obtient sans peine en adjoignant au domaine de rationalité, non seulement l'une des racines de l'équation algébrique génératrice de K', mais *toutes* ses racines. Les questions relatives à un corps quelconque sont ainsi ramenées aux problèmes analogues pour les corps galoisiens.

Après avoir montré comment on pouvait, par la discussion d'une congruence, former tous les idéaux de norme donnée, M. HILBERT a cherché une démonstration nouvelle du théorème fondamental de DEDEKIND; il l'a établi d'abord pour les corps galoisiens et l'a étendu ensuite sans peine à un corps quelconque.

M. HILBERT fut ainsi conduit à étudier la théorie générale des corps galoisiens, et i lintroduisit une foule de notions nouvelles, en définissant une série de sous-corps, correspondant à divers sous-groupes du groupe de GALOIS de l'équation génératrice; ces sous-groupes sont définis par certaines relations qu'ils ont avec un idéal premier quelconque du corps, et l'étude de ces sous-corps nous ouvre des aperçus nouveaux et intéressants sur la structure du corps.

Mais les travaux de M. HILBERT ont eu pour objet principal l'étude des corps relativement quadratiques et relativement abéliens. Un des points essentiels de la théorie des nombres est la loi de réciprocité de GAUSS au sujet des résidus quadratiques; on sait avec quelle prédilection le grand géomètre est revenu sur cette question et combien il a multiplié les démonstrations.

Cette loi de réciprocité est susceptible de généralisations intéressantes lorsque l'on passe du domaine des nombres rationnels ordinaires à un domaine de rationalité quelconque. M. HILBERT a pu réaliser cette généralisation dans le cas où le corps K est imaginaire et a un nombre de classes impair. Il a introduit un symbole analogue à celui de LEGENDRE, et la loi de réciprocité à laquelle il est parvenu se présente sous une forme simple; le produit d'un certain nombre de pareils symboles doit être égal à 1. Cette généralisation présente d'autant plus d'intérêt que l'auteur a pu montrer qu'il y a des genres correspondants à la moitié de tous les systèmes imaginables de caractères, résultat qui doit être rapproché de celui de GAUSS et qui permet l'extension à un domaine de rationalité quelconque de cette notion du genre des formes quadratiques qui fait l'objet d'un des chapitres les plus attrayants des Disquisitiones Arithmeticae.

Pour aller plus loin, M. Hilbert est obligé d'introduire une notion nouvelle et de modifier la définition de la classe. Deux idéaux appartiennent à la même classe au sens large ou ancien si leur rapport est un nombre algébrique existant quelconque; ils appartiennent à la même classe au sens étroit ou nouveau si leur rapport est un nombre algébrique existant *qui est positif ainsi que tous ses conjugués.* Les nombres de classes, entendus soit au sens large, soit au sens étroit sont évidemment en relation intime et l'auteur explique quelle est la nature de cette relation. Mais cette définition nouvelle permet à M. Hilbert d'exprimer dans un langage plus simple les théorèmes qu'il avait en vue. Ces théorèmes énoncés sous leur forme la plus générale sont comme le dit Hilbert d'une remarquable simplicité et d'une beauté cristalline; leur démonstration complète apparaissait à l'auteur comme le but final de ses études sur les corps algébriques. C'est sous cette forme générale que nous les énoncerons.

Si k est un corps quelconque il existe un groupe Kk qu'on peut appeler son *Klassenkörper.* Son degré relatif est égal au nombre des classes au sens étroit. Il est non-ramifié, c'est à dire qu'aucun idéal premier de k n'est divisible par le carré d'un idéal premier de Kk et il contient tous les corps non ramifiés relativement abéliens par rapport à k.

Son groupe relatif est isomorphe au groupe abélien qui définit la composition des classes d'idéaux de k.

Les ideaux premiers de k quoique premiers par rapport à k ne le sont pas en général par rapport à Kk; ils peuvent donc être décomposés en facteurs idéaux premiers par rapport à Kk; le nombre de ces facteurs et la puissance à laquelle ils sont élevés, en un mot le mode de décomposition dépendent uniquement de la classe à laquelle appartient dans le corps k l'idéal envisagé.

Appelons *ambige* un nombre de Kk qui est positif ainsi que tous ses conjugués et qui ne diffère de ces conjugués que par un facteur qui est une unité complexe.

Chaque ambige de Kk correspond à un idéal de k et réciproquement. Cette propriété est caractéristique du corps Kk parmi tous les corps relativement abéliens par rapport à k.

On voit quelle est la portée de ces théorèmes et quelle lumière elle jette sur la notion de classe puisque les relations mutuelles des classes d'idéaux sont reproduites comme par une image fidèle par celles des entiers algébriques d'un corps.

A la vérité, M. Hilbert n'a démontré complètement ces théorèmes que dans des cas particuliers mais ces cas particuliers sont très nombreux, très variés et très étendus. Il est d'ailleurs, dit il, persuadé que ses méthodes sont applica-

bles au cas général. Tout en partageant sa conviction, nous sommes obligés de faire des réserves, tant que cet espoir, si légitime qu'il soit, n'a pas été effectivement réalisé.

Nous avons parlé plus haut de la loi de réciprocité relative aux restes quadratiques; nous aurions dû ajouter que M. HILBERT a donné une loi analogue pour les restes de puissances quelconques, au moins pour certains corps particuliers.

En résumé, l'introduction des idéaux par KUMMER et DEDEKIND a été un progrès considérable, elle a généralisé et éclairé en même temps les résultats classiques de GAUSS sur les formes quadratiques et leur composition. Les travaux de M. HILBERT que nous venons d'analyser constituent un nouveau pas en avant et qui n'est pas moins important que le premier.

Théorème de Waring.

Parlons maintenant d'un autre travail arithmétique entièrement différent. Il s'agit de démontrer le théorème de WARING d'après lequel tout entier peut être décomposé en une somme de N puissances n^e, N ne dépendant que de n, de même qu'il peut par exemple être toujours décomposé en une somme de 4 carrés. Inutile de rappeler que ce théorème avait jusqu'ici été simplement énoncé.

Ce qui mérite surtout d'attirer l'attention dans la démonstration de M. HILBERT, c'est qu'elle repose sur une façon nouvelle d'introduire les variables continues dans la théorie des nombres.

On part d'une identité où une intégrale 25^{uple} est égalée à la puissance m^e de la somme de cinq carrés. Décomposant le domaine d'intégration en domaines plus petits de façon à avoir une série de valeurs approchées de l'intégrale, comme s'il s'agissait de l'évaluer par quadratures mécaniques, et par les méthodes de passage à la limite familières à l'auteur, on arrive à une autre identité:

$$(x_1^2 + \cdots + x_5^2)^m = \Sigma r_h Y_h^{2m}$$

où les r_h sont des nombres positifs rationnels et les Y des fonctions linéaires des x à coëfficients entiers. Les coëfficients r et ceux des Y, ainsi que le nombre de ces fonctions linéaires ne dépendent que de m.

Jusqu'ici nous ne sommes pas sortis de l'algèbre, si ce n'est pour montrer que les coëfficients r et ceux de Y sont rationnels. Pour aller plus loin l'auteur établit une série de lemmes dont l'énoncé est trop compliqué pour pouvoir être reproduit ici et qui l'amènent finalement à la démonstration complète du théo-

rème. Nous ne devons pas douter que ces considérations, qui permettent ainsi d'obtenir des relations arithmétiques en les faisant sortir d'identités où figurent des intégrales définies, ne puissent un jour, quand on en aura bien compris le sens, être appliquées à des problèmes bien plus étendus que celui de WARING.

Géométrie.

J'arrive aux travaux si originaux de M. HILBERT sur les fondements de la géométrie. Il y a dans l'histoire de cette philosophie géométrique, trois époques principales; la 1ère est celle où des penseurs à la tête desquels nous devons citer BOLYAI, ont fondé la géométrie non-euclidienne; la 2de est celle où HELMHOLTZ et LIE ont montré le rôle en géométrie de la notion de mouvement et de groupe; la 3e a été ouverte par HILBERT. L'auteur allemand se place au point de vue logique. Quels sont les axiomes que l'on énonce et ceux que l'on sous-entend; quel en est le véritable contenu logique et qu'en pourrait-on tirer par la simple application des règles logiques et sans nouvel appel à l'intuition? Sont-ils enfin indépendants, ou pourrait-on au contraire les déduire les uns des autres? Voilà quelles sont les questions à traiter.

M. HILBERT commence donc par établir la liste complète des axiomes, en s'efforçant de n'en pas oublier un; cela n'est pas aussi facile qu'on pourrait croire et EUCLIDE lui-même en applique qu'il n'énonce pas. L'intuition géométrique nous est tellement familière que nous faisons usage des vérités intuitives pour ainsi dire sans nous en apercevoir. De là pour atteindre le but que se proposait HILBERT, la nécessité de ne pas accorder à l'intuition la plus petite place.

Le savant Professeur répartit les axiomes en cinq groupes.

I. Axiome der Verknüpfung (je traduirai par *axiomes projectifs* au lieu de chercher une traduction littérale, comme par exemple *axiomes de la connection*, qui ne saurait être satisfaisante).

II. Axiome der Anordnung (axiomes de l'ordre).

III. Axiomes de la Congruence ou axiomes métriques.

IV. Axiome d'EUCLIDE.

V. Axiome d'ARCHIMÈDE.

Parmi les axiomes projectifs, nous distinguerons ceux du plan et ceux de l'espace; les premiers sont ceux qui dérivent de la proposition bien connue: *par deux points passe une droite et une seule.*

Passons au second groupe, celui des axiomes de l'ordre. Voici l'énoncé des deux premiers:

»Si trois points sont sur une même droite, il y a entre eux une certaine relation que nous exprimons en disant que l'un des points, et un seulement, est entre les deux autres. Si C est entre A et B, si D est entre A et C, D sera aussi entre A et B etc.»

Ici encore on remarquera que nous ne faisons pas intervenir l'intuition; nous ne cherchons pas à approfondir le sens du mot *entre*, toute relation satisfaisant aux axiomes pourrait être désignée par le même mot.

Le troisième groupe comprend les axiomes métriques où nous distinguerons trois sous-groupes, relatifs respectivement aux longueurs, aux angles, et aux triangles.

Un point important ici n'est pas traité; il aurait fallu compléter la liste des axiomes en disant que le segment AB est congruent au segment inverse BA. Cet axiome implique la symétrie de l'espace et l'égalité des angles à la base dans un triangle isocèle. M. Hilbert ne traite pas ici cette question, mais il en a fait l'objet d'un mémoire sur lequel nous reviendrons plus loin.

Le quatrième groupe ne comprend que le postulatum d'Euclide.

Le cinquième groupe comprend deux axiomes; le premier et le plus important est celui d'Archimède.

Soient deux points quelconques A et B sur une droite D; soit a un segment quelconque; construisons sur D, à partir du point A, et dans la direction AB, une série de segments tous égaux entre eux et égaux à a: AA_1, A_1A_2, $\cdots A_{n-1}A_n$; on pourra toujours prendre n assez grand pour que le point B se trouve sur l'un de ces segments.

C'est-à-dire que, si l'on se donne deux longueurs quelconques l et L, on peut toujours trouver un nombre entier n assez grand pour que, en ajoutant n fois à elle-même la longueur l, on obtienne une longueur totale plus grande que L.

Le second est l'Axiom der Vollständigkeit dont j'expliquerai plus loin le sens.

Indépendance des axiomes. La liste des axiomes une fois dressée, il faut voir si elle est exempte de contradictions. Nous savons bien que oui, puisque la géométrie existe; et M. Hilbert avait d'abord répondu oui en construisant une géométrie. Mais, chose étrange, cette géométrie n'est pas tout à fait la nôtre, son espace n'est pas le nôtre, ou du moins ce n'en est qu'une partie. Dans l'espace de M. Hilbert, il n'y a pas tous les points qui sont dans le nôtre, mais ceux seulement qu'on peut, en partant de deux points donnés, construire par le moyen de la règle et du compas. Dans cet espace, par exemple, il n'existerait pas d'angle de 10°.

Dans sa seconde édition, M. Hilbert a voulu compléter sa liste de façon à retrouver notre géométrie et à n'en pas retrouver d'autre, c'est pour cela qu'il introduisit l'Axiom der Vollständigkeit qu'il énonce comme il suit:

Au système des points, droites et plans, il est impossible d'adjoindre un autre système d'objets tel que le système complet satisfasse à tous les autres axiomes.

Il est clair alors que cet espace dont je parlais, qui ne contient pas tous les points de notre espace ne satisfait pas à ce nouvel axiome, car on peut lui adjoindre ceux des points de notre espace qu'il ne contenait pas, sans cesser de satisfaire à tous les axiomes.

Il y a donc une infinité de géométries qui satisfont à tous les axiomes, moins l'Axiom der Vollständigkeit, mais il n'y en a qu'une, la nôtre, qui satisfasse en outre à ce dernier axiome.

On doit se demander ensuite si les axiomes sont indépendants, c'est-à-dire si l'on peut sacrifier l'un des cinq groupes en conservant les quatre autres et obtenir néanmoins une géométrie cohérente. C'est ainsi qu'en supprimant le groupe IV (postulatum d'Euclide) on obtient la géométrie non-euclidienne de Bolyai.

On peut également suprimer le groupe III. M. Hilbert a réussi à conserver les groupes I, II, IV et V, ainsi que les deux sous-groupes des axiomes métriques des segments et des angles, tout en rejetant l'axiome métrique des triangles, c'est à-dire la proposition III, 6.

La géométrie non archimédienne. Mais la conception la plus originale de M. Hilbert, c'est celle de la Géométrie non archimédienne, où tous les axiomes restent vrais, sauf celui d'Archimède. Pour cela il fallait d'abord construire un *système de nombres non archimédiens* c'est-à-dire un système d'éléments entre lesquels on pût concevoir des relations d'égalité et d'inégalité et auxquels on pût appliquer des opérations correspondant à l'addition et à la multiplication arithmétiques, et cela de façon à satisfaire aux conditions suivantes:

1° Les règles arithmétiques de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité, etc.; *Arithmetische Axiome der Verknüpfung*) subsistent sans changement.

2° Les règles du calcul et de la transformation des inégalités (Arithmetische Axiome der Anordnung) subsistent également.

3° L'axiome d'Archimède n'est pas vrai.

On peut arriver à ce résultat en choisissant pour éléments, des séries de la forme suivante:

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + A_2 t^{m-2} + \cdots\cdots,$$

où m est un entier positif ou négatif et où les coëfficients A sont réels, et en convenant d'appliquer à ces séries les règles ordinaires de l'addition et de la multiplication. Il faut ensuite définir les conditions d'inégalité de ces séries, de façon à *ranger* nos éléments dans un ordre déterminé. Nous y arriverons par la convention suivante: nous attribuerons à notre série le signe de A_0 et nous dirons qu'une série est plus petite qu'une autre quand retranchée de celle-ci, elle donne une différence positive.

Il est clair qu'avec cette convention, les règles du calcul des inégalités subsistent; mais l'axiome d'Archimède n'est plus vrai.

Nos nombres vulgaires rentrent comme cas particuliers parmi ces *nombres non archimédiens.* Les nouveaux nombres viennent s'intercaler pour ainsi dire dans la série de nos nombres vulgaires, de telle façon qu'il y ait, par exemple, une infinité de nombres nouveaux plus petits qu'un nombre vulgaire donné A et plus grands que tous les nombres vulgaires inférieurs à A.

Cela posé, imaginons un espace à trois dimensions où les coordonnées d'un point seraient mesurées, non pas par des nombres vulgaires, mais par des nombres non archimédiens, mais où les équations habituelles de la droite et du plan subsisteraient, de même que les expressions analytiques des angles et des longueurs. Il est clair que dans cet espace tous les axiomes resteraient vrais, sauf celui d'Archimède.

Sur une droite quelconque entre nos points vulgaires, viendraient s'intercaler des points nouveaux. Il y aura également sur cette droite une infinité de points nouveaux qui seront à droite de tous les points vulgaires. En résumé, notre espace vulgaire n'est qu'une partie de l'espace non-archimédien.

On voit quelle est la portée de cette invention et en quoi elle constitue dans la marche de nos idées un pas presque aussi hardi que celui que Bolyai nous a fait faire; la géométrie non-euclidienne respectait pour ainsi dire notre conception qualitative du continu géométrique tout en bouleversant nos idées sur la mesure de ce continu. La géométrie non-archimédienne détruit cette conception; elle dissèque le continu pour y introduire des éléments nouveaux.

Dans cette conception si audacieuce Hilbert avait eu un précurseur. Dans ses fondements de la géométrie, Veronèse avait eu une idée analogue. Le chapitre VI de son introduction est le développement d'une véritable arithmétique et d'une véritable géométrie non-archimédiennes où les nombres transfinis de Cantor jouent un rôle prépondérant. Toutefois par l'élégance et la simplicité de son exposition, par la profondeur de ses vues philosophiques, par le parti qu'il a tiré de l'idée fondamentale, Hilbert a bien fait sa chose de la nouvelle géométrie.

La géométrie non arguésienne. Le théorème fondamental de la Géometrie

projective est le théorème de Desargues. Deux triangles sont dits *homologues* lorsque les droites qui joignent les sommets correspondants se coupent en un même point. Desargues a démontré que les points d'intersection des côtés correspondants de deux triangles homologues sont sur une même ligne droite; la réciproque est également vraie.

Le théorème de Desargues peut s'établir de deux manières.

1° En se servant des axiomes projectifs du plan et des axiomes métriques du plan;

2° En se servant des axiomes projectifs du plan et de ceux de l'espace.

Le théorème pourrait donc être découvert par un animal à deux dimensions, à qui une troisième dimension paraîtrait aussi inconcevable qu'à nous une quatrième, qui par conséquent ignorerait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui aurait vu se déplacer, dans le plan qu'il habite, des figures invariables analogues à nos corps solides, et qui, par conséquent connaîtrait les axiomes métriques. Le théorème pourrait être découvert également par un animal à trois dimensions qui connaîtrait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui, n'ayant jamais vu se déplacer de corps solides, ignorerait les axiomes métriques.

Mais pourrait-on établir le théorème de Desargues sans se servir ni des axiomes projectifs de l'espace, ni des axiomes métriques, mais seulement des axiomes projectifs du plan? On pensait que non, mais on n'en était pas sûr. M. Hilbert a tranché la question en construisant une *géométrie non arguesienne*, qui est, bien entendu, une géométrie plane.

La Géométrie non pascalienne. M. Hilbert ne s'arrête pas là et il introduit encore une nouvelle conception. Pour bien la comprendre, il nous faut d'abord retourner un instant dans le domaine de l'Arithmétique. Nous avons vu plus haut s'élargir la notion de nombre, par l'introduction des *nombres non archimédiens.* Il nous faut une classification de ces nombres nouveaux, et pour l'obtenir nous allons classer d'abord les axiomes de l'Arithmétique en quatre groupes qui seront:

1° Les lois d'associativité et de commutativité de l'addition, la loi d'associativité de la multiplication, les deux lois de distributivité de la multiplication; ou en resumé toutes les règles de l'addition et de la multiplication, sauf la loi de commutativité de la multiplication.

2° Les axiomes de l'ordre c'est-à-dire les règles du calcul des inégalités.

3° La loi de commutativité de la multiplication d'après laquelle on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit.

4° L'axiome d'Archimède.

Les nombres qui admettront les deux premiers groupes seront dits *arguésiens;*

ils pourront être *pascaliens* ou *non pascaliens* selon qu'ils satisferont ou ne satisferont pas à l'axiome du troisième groupe; ils seront *archimédiens* ou *non archimédiens*, suivant qu'ils satisferont ou non à l'axiome du quatrième groupe. Nous ne tarderons pas à voir la raison de ces dénominations.

Les nombres ordinaires sont à la fois arguésiens, pascaliens et archimédiens. On peut démontrer la loi de commutativité en partant des axiomes des deux premiers groupes et de l'axiome d'Archimède; il n'y a donc pas de nombres arguésiens, archimédiens et non pascaliens.

Il est aisé de former, en revanche, un système de nombres arguésiens, non pascaliens et non archimédiens. Les éléments de ce système seront des séries de la forme:

$$S = T_0 s^n + T_1 s^{n-1} + \cdots .$$

où s est un symbole analogue à t, n un entier positif ou négatif, et T_0, T_1, ... des nombres du système T; si donc on remplaçait les coëfficients T_0, T_1, ... par les séries en t correspondantes, on aurait une série dépendant à la fois de t et de s. On additionnera les séries S d'après les règles ordinaires, et de même pour la multiplication de ces séries, on admettra les règles de distributivité et d'associativité, mais on admettra que la loi de commutativité n'est pas vraie et qu'au contraire $st = -ts$.

Il reste à *ranger* les séries dans un ordre déterminé pour satisfaire aux axiomes de l'ordre. Pour cela, on attribuera à la série S le signe du premier coëfficient T_0; on dira qu'une série est plus petite qu'une autre, quand retranchée de celle ci, elle donnera une différence positive. C'est donc toujours la même règle: t est regardé comme très grand par rapport à un nombre réel ordinaire quelconque, et s est regardé comme très grand par rapport à un nombre quelconque du système T.

La loi de commutativité n'étant pas vraie, ce sont bien des nombres non pascaliens.

Avant d'aller plus loin, je rappelle que Hamilton a depuis longtemps introduit un système de nombres complexes où la multiplication n'est pas commutative; ce sont les *quaternions*, dont les Anglais font un si fréquent usage en Physique mathématique. Mais, pour les quaternions les axiomes de l'ordre ne sont pas vrais; ce qu'il y a donc d'original dans la conception de M Hilbert, c'est que ses nouveaux nombres satisfont aux axiomes de l'ordre, sans satisfaire à la règle de commutativité.

Revenons à la Géométrie. Admettons les axiomes des trois premiers groupes, c'est-à-dire les axiomes projectifs du plan et de l'espace, les axiomes de l'ordre

et le postulat d'Euclide; le théorème de Desargues s'en déduira, puisqu'il est une conséquence des axiomes projectifs de l'espace.

Nous voulons constituer notre géométrie *sans nous servir des axiomes métriques;* le mot de *longueur* n'a donc encore pour nous aucun sens; nous n'avons pas le droit de nous servir du compas; en revanche, nous pouvons nous servir de la règle, puisque nous admettons que par deux points on peut faire passer une droite, en vertu de l'un des axiomes projectifs; nous savons également mener par un point une parallèle à une droite donnée, puisque nous admettons le postulatum d'Euclide. Voyons ce que nous pouvons faire avec ces ressources.

Nous pouvons définir l'homothétie de deux figures; et par elle les proportions. Nous pouvons aussi définir l'égalité dans une certaine mesure.

Les deux côtés opposés d'un parallélogramme seront égaux *par définition;* nous savons ainsi reconnaître si deux segments sont égaux entre eux, *pourvu qu'ils soient parallèles.*

Grâce à ces conventions, nous sommes maintenant en mesure de comparer les longueurs de deux segments, mais *pourvu que ces segments soient parallèles.* La comparaison de deux longueurs dont la direction est différente n'a aucun sens, et il faudrait pour ainsi dire une unité de longueur différente pour chaque direction. Inutile d'ajouter que le mot *angle* n'a aucun sens.

Les longueurs seront ainsi exprimées par des nombres; mais ce ne seront pas forcément des nombres ordinaires. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que si le théorème de Desargues est vrai comme nous l'admettons, ces nombres appartiendront à un *système arguésien.* Inversement, étant donné un système quelconque S de nombres arguésiens, on peut construire une géométrie telle que les longueurs des segments d'une droite soient justement exprimées par ces nombres.

L'équation du plan sera une équation linéaire comme dans la géométrie analytique ordinaire; mais comme dans le système S la multiplication ne sera pas commutative, en général, il importe de faire une distinction et de dire que dans chacun des termes de cette équation linéaire, ce sera la coordonnée qui jouera le rôle de multiplicande et le coëfficient constant qui jouera le rôle de multiplicateur.

Ainsi, à chaque système de nombres arguésiens, correspondra une géométrie nouvelle satisfaisant aux axiomes projectifs, à ceux de l'ordre, au théorème de Desargues et au postulatum d'Euclide. Quelle est maintenant la signification géométrique de l'axiome arithmétique du troisième groupe, c'est-à-dire de la règle de commutativité de la multiplication? *La traduction géométrique de cette règle, c'est le théorème de Pascal;* je veux parler du théorème sur l'hexagone inscrit dans une conique, en supposant que cette conique se réduit à deux droites.

Ainsi le théorème de PASCAL sera vrai ou faux, selon que le système S sera pascalien ou non pascalien; et, comme il y a des systèmes non pascaliens, *il y aura également des géométries non pascaliennes.*

Le théorème de PASCAL peut se démontrer en partant des axiomes métriques; il sera donc vrai, si l'on admet que les figures peuvent se transformer non seulement par homothétie et translation, comme nous venons de le faire, mais encore par rotation.

Le théorème de PASCAL peut également se déduire de l'axiome d'ARCHIMÈDE, puisque nous venons de voir que tout système de nombres arguésiens et archimédiens est en même temps pascalien; *toute géométrie non pascalienne est donc en même temps non archimédienne.*

Le Streckenübertrager. Citons encore une autre conception de HILBERT. Il étudie les constructions que l'on pourrait faire, non pas à l'aide de la règle et du compas, mais par le moyen de la règle et d'un instrument particulier, qu'il appelle *Streckenübertrager*, et qui permettrait de porter sur une droite un segment égal à un autre segment pris sur une autre droite. Le *Streckenübertrager* n'est pas l'équivalent du compas; ce dernier instrument permettrait de construire l'intersection de deux cercles, ou d'un cercle et d'une droite quelconque; le *Streckenübertrager* nous donnerait seulement l'intersection d'un cercle et d'une droite *passant par le centre de ce cercle.* M. HILBERT cherche donc quelles sont les constructions qui seront possibles avec ces deux instruments, et il arrive à une conclusion bien remarquable.

Les constructions qui peuvent se faire par la règle et le compas, peuvent se faire également par la règle et le *Streckenübertrager, si ces constructions sont telles que le résultat en soit toujours réel.* Il est clair en effet, que cette condition est nécessaire, car un cercle est toujours coupé *en deux points réels* par une droite menée par son centre. Mais il était difficile de prévoir que cette condition serait également suffisante.

Mais ce n'est pas tout; dans toutes ces constructions, comme l'a remarqué le premier M. KÜRSCHÁK, il serait possible de remplacer le *Streckenübertrager* par l'*Eichmass*, instrument qui permet de porter sur une droite quelconque à partir d'un point quelconque, non plus une longueur quelconque, mais une longueur égale à l'unité.

Une question analogue est traitée dans un autre article de M. HILBERT: *Über die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.*

Dans la géométrie plane ordinaire, le plan est symétrique, ce qui se traduit par l'égalité des angles à la base du triangle isocèle.

On doit faire figurer cette *symétrie du plan* dans la liste des axiomes métri-

ques. Dans toutes les géométries plus ou moins étranges dont nous avons parlé jusqu'ici, dans celles du moins où l'on admet les axiomes métriques, dans la géométrie métrique non archimédienne, dans les géométries nouvelles de M. Dehn, dans celles qui ont fait l'objet du mémoire *Über eine neue Begründung* .... cette symétrie du plan est toujours supposée. Est-elle une conséquence des autres axiomes métriques? Oui, comme le montre M. Hilbert, si l'on admet l'axiome d'Archimède. Non, dans le cas contraire. Il y a des géométries non archimédiennes où tous les axiomes métriques sont vrais, à l'exception de celui de la symétrie du plan.

Dans cette géométrie, il n'est pas vrai que les angles à la base d'un triangle isocèle soient égaux; il n'est pas vrai que dans un triangle un côté soit plus petit que la somme des deux autres; le théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse n'est pas vrai. C'est pour cette raison, que cette géométrie s'appelle *non-pythagoricienne.*

J'arrive à un important mémoire de M. Hilbert qui est intitulé *Grundlagen der Geometrie,* qui porte par conséquent le même titre que sa *Festschrift,* mais où il se place cependant à un point de vue tout différent. Dans sa *Festschrift,* en effet, comme on l'a vu par l'Analyse qui précède, les rapports de la notion d'espace et de la notion du groupe, tels qu'ils résultent des travaux de Lie, sont laissés de côté ou relégués au second plan. Les propriétés générales des groupes n'apparaissent pas dans la liste des axiomes fondamentaux. Il n'en est pas de même dans le mémoire dont nous allons parler.

Par rapport aux idées de Lie, le progrès réalisé est considérable. Lie supposait que ses groupes étaient définis par des équations analytiques. Les hypothèses de M. Hilbert sont beaucoup plus générales. Sans doute cela n'est pas encore entièrement satisfaisant, puisque si la *forme* du groupe est supposée quelconque, sa *matière,* c'est-à-dire le plan qui subit les transformations, reste assujetti à être une *Zahlenmannigfaltigkeit* au sens de Lie. Ce n'est pas moins un pas en avant, et d'ailleurs M. Hilbert analyse mieux qu'on ne l'avait fait avant lui l'idée de *Zahlenmannigfaltigkeit* et donne des aperçus qui pourront devenir le germe d'une théorie axiomatique de l'Analysis situs.

Il est impossible de n'être pas frappé du contraste entre le point de vue où sa place ici M. Hilbert et celui qu'il avait adopté dans sa *Festschrift.* Dans cette *Festschrift* les axiomes de continuité occupaient le dernier rang et la grande affaire était de savoir ce que devenait la géométrie quand on les mettait de côté. Ici au contraire, c'est la continuité qui est le point de départ et M. Hilbert s'est surtout préoccupé de voir ce qu'on tire de la continuité seule, jointe à la notion du groupe.

Il nous reste à parler d'un mémoire intitulé: *Flächen von konstanter Krümmung.* On sait que BELTRAMI a montré qu'il y a dans l'espace ordinaire des surfaces qui sont l'image du plan non-euclidien, ce sont les surfaces à courbure constante négative; on sait quelle impulsion cette découverte a donnée à la géométrie non-euclidienne. Mais est-il possible de représenter le plan non-euclidien tout entier sur une surface de BELTRAMI sans point singulier? M. HILBERT démontre que non.

En ce qui concerne les surfaces à courbure constante positives auxquelles se rapporte la géométrie de RIEMANN, M. HILBERT démontre que à part la sphère il n'y a pas d'autre surface fermée de cette sorte.

Equations Intégrales.

Dans ces dernières années, M. HILBERT s'est surtout occupé de perfectionner la théorie des équations intégrales. On sait que les fondements de cette théorie ont été jetés il y a quelques années par M. FREDHOLM; depuis la fécondité de sa méthode et la facilité avec laquelle elle s'applique à tous les problèmes de la physique mathématique se sont affirmées chaque jour avec plus d'eclat. C'est là certainement une des découvertes les plus remarquables qui aient été faites en mathématiques et à elle seule, elle mériterait les plus hautes récompenses; si aujourd'hui cependant ce n'est pas au premier inventeur, mais à l'auteur de perfectionnements importants que nous avons décidé de décerner le prix Bolyai, c'est que nous avons dû prendre en considération, non-seulement les travaux de M. HILBERT sur les équations intégrales, mais l'ensemble de son œuvre qui intéresse les branches les plus diverses de la Science Mathématique et dont les autres parties de ce rapport permettent d'apprécier l'intérêt. Mais nous ne pouvions aborder ce sujet sans rendre hommage au service immense que M. FREDHOLM a rendu à la Science.

La théorie de M. FREDHOLM est une généralisation des propriétés élémentaires des équations linéaires et des déterminants. Cette généralisation pouvait être poursuivie de deux façons différentes; soit en envisageant une infinité *discrète* de variables liées par une infinité d'équations linéaires ce qui conduit aux déterminants d'ordre infini; soit en considérant une fonction inconnue $\varphi(x)$ (c'est-à-dire en dernière analyse une infinité *continue* d'inconnues) et cherchant à la déterminer à l'aide d'équations où cette fonction figure dans des intégrales sous le signe $\int$. C'est cette seconde voie où s'est engagé M. FREDHOLM.

Soit $K(x, y)$ une fonction qu'on appelle le *noyau;* l'intégrale

$$\psi(x) = \int K(x, y)\,\varphi(y)\,dy$$

prise entre des limites fixes, peut être regardée comme une transformée de $\varphi(x)$ par une sorte de transformation linéaire et être représentée par $S\varphi(x)$.

Les équations intégrales peuvent alors se mettre sous la forme:

$$a\varphi(x) + \lambda S\varphi(x) = f(x) \tag{1}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée; l'équation est dite de la première sorte si le coëfficient a est nul, et de la seconde sorte si ce coëfficient est égal à 1.

La relation (1) doit être satisfaite pour toutes les valeurs de y comprises dans le champ d'intégration; elle équivaut donc à une infinité *continue* d'équations linéaires.

Fredholm a traité le cas des équations de la seconde sorte; la solution peut se mettre alors sous la forme du quotient de deux expressions analogues aux déterminants et qui sont des fonctions entières de λ. Pour certaines valeurs de λ, le dénominateur s'annule. On peut alors trouver des fonctions $\varphi(x)$ (appelées *fonctions propres*) qui satisfont à l'équation (1) quand on y remplace $f(x)$ par 0.

Le résultat suppose que le noyau $K(x, y)$ est limité; s'il n'en était pas ainsi on serait amené à envisager les noyaux *réitérés;* si on répète n fois la substitution linéaire S, on obtient une substitution de même forme avec un noyau différent $K_n(x, y)$; il suffit qu'un de ces noyaux réitérés K_n soit limité pour que la méthode reste applicable moyennant un artifice très simple. Or cela arrive dans un grand nombre de cas, comme l'a montré Fredholm. La généralisation pour le cas où la fonction inconnue dépend de plusieurs variables et pour celui où il y a plusieurs fonctions inconnues se fait sans difficulté.

Fredholm a appliqué ensuite sa méthode à la résolution du problème de Dirichlet et à celle d'un problème d'élasticité, montrant ainsi par quelle voie on peut aborder toutes les questions de physique mathématique.

Telle est la part du premier inventeur; quelle est maintenant celle de Hilbert? Considérons d'abord un nombre fini d'équations linéaires; si le déterminant de ces équations est symétrique, leurs premiers membres peuvent être regardés comme les dérivées d'une forme quadratique, et il en résulte pour les équations de cette forme une série de propriétés bien dignes d'intérêt et bien connues des géomètres. Le cas correspondant pour les équations intégrales est celui où le noyau est symétrique, c'est-à-dire où:

$$K(x, y) = K(y, x)$$

C'est celui auquel s'attache M. Hilbert. Les propriétés des formes quadratiques d'un nombre fini de variables peuvent être généralisées de façon à s'appliquer aux équations intégrales de cette forme symétrique. La généralisation se fait par un simple passage à la limite; mais ce passage présentait des difficultés dont M. Hilbert s'est tiré par une méthode dont on doit admirer la simplicité, la sûreté et la généralité. Les développements auxquels on parvient sont *uniformément* convergents; mais cette uniformité se présente sous une forme nouvelle qui mérite d'attirer l'attention. Dans les développements figure une fonction arbitraire $u(x)$ (ou plusieurs) et le reste de la série quand on y a pris n termes est inférieur à une limite qui ne dépend que de n et ne dépend pas de la fonction arbitraire pourvu que cette fonction soit assujettie à l'inégalité

$$\int u^2(x)\, d\, x < 1$$

l'intégrale étant prise entre des limites convenables. C'est là une considération entièrement nouvelle utilisable dans des problèmes bien différents.

Hilbert retrouve ainsi quelques-uns des théorèmes de Fredholm par une voie nouvelle; mais j'insisterai surtout sur les résultats les plus originaux.

Tout d'abord le dénominateur des expressions de Fredholm est une fonction de λ qui n'admet que des zéros réels et c'est là une généralisation du théorème élémentaire relatif à »l'équation en S.» Vient ensuite une formule où figurent sous le signe $\int$ deux fonctions arbitraires $x(s)$ et $y(s)$ et que l'on doit considérer comme la généralisation des formules élémentaires qui permettent la décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés.

Mais j'ai hâte d'arriver à la question du développement d'une fonction arbitraire procédant suivant les fonctions propres. Ce développement analogue à la série de Fourier, ou à tant d'autres séries que jouent un rôle capital en physique mathématique est-il possible dans le cas général? La condition suffisante pour qu'une fonction soit susceptible d'un tel développement, c'est qu'on puisse la mettre sous la forme $Sg(x)$, $g(x)$ étant continue. C'est là la forme définitive du résultat, tel qu' Hilbert l'énonce dans sa 5e communication. Dans la 1ère il avait dû lui imposer certaines restrictions; nous devons ici citer le nom de M. Schmidt qui dans l'intervalle avait fait paraître un travail qui a aidé M. Hilbert à s'affranchir de ces restrictions. La seule condition imposée à notre fonction est de pouvoir se mettre sous la forme $Sg(x)$, et au premier abord elle parait assez complexe, mais dans un grand nombre de cas et par exemple si le noyau est une fonction de Green, elle exige seulement que la fonction possède un certain nombre de dérivées.

M. Hilbert fut conduit ensuite à développer ses vues de la manière suivante: il considère cette fois une forme quadratique à un nombre infini de variables et il en étudie les transformations orthogonales; c'est comme s'il voulait étudier les diverses formes de l'équation d'une surface du second degré dans l'espace à un nombre infini de dimensions lorsqu'on la rapporte à divers systèmes d'axes rectangulaires. Il forme à cet effet ce qu'il appelle la forme résolvante de la forme donnée. Soit $K(x)$ la forme donnée, $K(\lambda, x, y)$ la forme résolvante cherchée; elle sera définie par l'identité:

$$K(\lambda, x, y) - \frac{1}{2}\lambda \Sigma_r \frac{dK(x)}{dx_r} \frac{dK(\lambda, x, y)}{dx_r} = \Sigma x_r y_r.$$

Lorsque la forme $K(x)$ ne dépend que d'un nombre fini de variables, la forme résolvante se présente comme le quotient de deux déterminants qui sont des polynômes entiers en λ. L'auteur applique à ce quotient les procédés de passage à la limite qui lui sont familiers; la limite du quotient existe même quand celles du numérateur et du dénominateur n'existent pas.

Dans le cas d'un nombre fini de variables, $K(\lambda, x, y)$ est une fonction rationnelle de λ et cette fonction rationnelle peut être décomposée en fractions simples. Qu' advient-il de cette décomposition quand le nombre des variables devient infini? Les pôles de la fonction rationnelle en λ, peuvent dans ce cas ou bien tendre vers certains points limites en nombre infini, mais discrets.

L'ensemble des ces points constitue ce que l'auteur appelle le *spectre discontinu* de la forme. Ils peuvent aussi admettre comme points limites tous les points d'un ou de plusieurs segments de l'axe réel. L'ensemble de ces segments constitue le *spectre continu* de la forme.

Les fractions simples correspondant au spectre discontinu formeront par leur ensemble une série convergente; celles qui correspondent au spectre continu se changeront à la limite en une intégrale de la forme:

$$\int \frac{\sigma d\mu}{\lambda - \mu}$$

où l'on fait varier la variable d'intégration μ tout le long des segments du spectre continu, et où σ est une fonction convenable de μ. La fonction rationnelle $K(\lambda, x, y)$ n'a donc pas alors pour limite une fonction méromorphe, mais une fonction uniforme avec des coupures. La décomposition en éléments simples ainsi transformée reste valable. Si la forme donnée est *limitée*, c'est-à-dire si elle ne peut dépasser une certaine valeur quand la somme des carrés des variables est

inférieure à I, on peut déduire de là une manière de simplifier cette forme par une transformation orthogonale, analogue à la simplification qu'éprouve l'équation d'un ellipsoïde quand on rapporte cette surface à ses axes.

Parmi les formes quadratiques nous distinguerons celles qui sont *proprement continues* (vollstetig) c'est-à-dire celles dont l'accroissement tend vers zéro, quand les accroissements des variables tendent simultanément vers zéro d'une manière quelconque. Une pareille forme ne possède pas de spectre continu et il en résulte des simplifications considérables dans les formules.

D'autres théorèmes sur les systèmes de formes quadratiques simultanés, sur les formes bilinéaires, sur la forme de Hermite s'étendent également au cas d'un nombre infini de variables.

Il y avait dans cette théorie le germe d'une extension de la méthode de Fredholm à des noyaux auxquels l'analyse du géomètre suédois n'était pas applicable, et des élèves de Hilbert devaient mettre ce fait en évidence. Quoi qu'il en soit, M. Hilbert s'occupa d'abord d'étendre sa façon d'envisager les équations intégrales aux cas où le noyau est dissymétrique. A cet effet il introduit un système quelconque de fonctions orthogonales, suivant lesquelles il est possible de développer une fonction arbitraire par des formules analogues à celle de Fourier. Au lieu d'une fonction inconnue, il prend comme inconnues les coëfficients du développement de cette fonction; une équation intégrale peut ainsi être remplacée par un système d'une infinité *discrète* d'équations linéaires entre une infinité *discrète* de variables. La théorie des équations intégrales se trouve ainsi rattachée d'une part aux idées de M. von Koch sur les déterminants infinis, et d'autre part aux recherches de M. Hilbert que nous venons d'analyser et où le rôle essentiel est joué par des fonctions dépendant d'une infinité discrète de variables.

A chaque noyau correspondra ainsi une forme bilinéaire dépendant d'une infinité de variables. Si le noyau est symétrique, cette forme bilinéaire est symétrique et peut être regardée comme dérivant d'une forme quadratique. Si le noyau satisfait aux conditions énoncées par Fredholm, on voit que cette forme quadratique est proprement continue et par conséquent ne possède pas de spectre continu. C'est là une manière de retrouver les résultats de Fredholm et si indirecte qu'elle soit, elle ouvre des vues entièrement neuves sur les raisons profondes de ces résultats et par là sur la possibilité de nouvelles généralisations.

Les équations intégrales se prêtent à la résolution de certaines équations différentielles dont les intégrales sont assujetties à certaines conditions aux limites et c'est là un problème fort important pour la physique mathématique. Fredholm l'avait résolu dans quelques cas particuliers et M. Picard avait généralisé

ses méthodes. M. Hilbert devait faire de la question une étude systématique. Considérons une équation différentielle:

$$\Delta u = f,$$

où u est une fonction inconnue d'une ou plusieurs variables, f une fonction connue et Δ une expression différentielle linéaire quelconque. Cette équation peut être considérée au même titre qu'une équation intégrale comme un système infini d'équations linéaires liant une infinité continue de variables, comme une sorte de transformation linéaire d'ordre infini permettant de passer de f à u. Si on résout cette équation, on trouve:

$$u = Sf$$

Sf se présentant cette fois sous la forme d'une expression intégrale. Alors Δ et S sont les symboles de deux transformations linéaires d'ordre infini inverses l'une de l'autre. Le noyau de cette expression intégrale Sf est ce qu'on appelle une *fonction de Green.* Cette fonction avait été rencontrée pour la première fois dans le problème de Dirichlet, c'était alors la fonction de Green proprement dite, trop connue pour que j'insiste; on en avait déjà obtenu des généralisations diverses. Il appartenait à Hilbert de donner une théorie complète. A chaque expression différentielle Δ, supposée du 2^d ordre et de type elliptique, à chaque système de conditions aux limites, correspond une fonction de Green. Citons la formation des fonctions de Green dans le cas où l'on n'a qu'une variable indépendante et où elles se présentent sous une forme particulièrement simple, et la discussion des diverses formes que peuvent affecter les conditions aux limites. Cela posé, imaginons que l'on ait résolu le problème dans le cas d'une équation différentielle auxiliaire peu différente de celle qui est proposée, n'en différant pas en tout cas par les termes du 2^d ordre; on pourra alors par une transformation simple ramener le problème à la résolution d'une équation de Fredholm, où le rôle du noyau est joué par la fonction de Green relative à l'équation différentielle auxiliaire.

Toutefois la considération de cette équation auxiliaire, la nécessité de la choisir et de la résoudre pouvait encore constituer un embarras, M. Hilbert s'en est affranchi dans sa 6^e communication. L'équation différentielle est encore transformée en une équation de Fredholm, où le rôle du noyau est joué par une fonction que l'auteur appelle *Paramétrix.* Elle est assujettie à toutes les conditions qui définissent la fonction de Green, une seule exceptée, la plus gênante il est vrai; elle n'est pas astreinte à satisfaire à une équation différentielle; elle reste donc arbitraire dans une très large mesure. La transformation subie par

l'équation différentielle est comparable à celle qu'éprouverait un système d'équations linéaires sion remplaçait les variables primitives par des combinaisons linéaires convenablement choisies de ces variables. La méthode n'est nullement restreinte au cas où l'équation différentielle envisagée est adjointe à elle-même.

M. Hilbert a examiné en passant une foule de questions relatives aux équations intégrales et montré la possibilité de leur application dans les domaines les plus variés. Il a par exemple étendu la méthode au cas d'un système de deux équations aux dérivées partielles de 1er ordre du type elliptique, aux équations intégrales *polaires*, c'est-à-dire où le coëfficient a dans l'équation intégrale (1) au lieu d'être constamment égal à 1 est une fonction de x et en particulier est égal tantôt à $+1$, tantôt à -1.

Il l'a appliquée au problème de Riemann pour la formation des fonctions d'une variable complexe assujetties à certaines conditions aux limites, au théorème des oscillations de Klein, à la formation des fonctions fuchsiennes, et en particulier au problème suivant: déterminer λ de façon que l'équation.

$$\frac{d}{dx}\left[(x-a)(x-b)(x-c)\frac{dy}{dx}\right]+(x+\lambda)y=0$$

soit une équation fuchsienne.

Une des applications les plus inattendues est celle que fait M. Hilbert à la théorie des volumes et des surfaces de Minkowski, et par laquelle il rattache à la méthode de Fredholm une question importante pour ceux qui s'intéressent à l'analyse philosophique des notions fondamentales de la géométrie.

Principe de Dirichlet.

On sait que Riemann avait démontré d'un trait de plume les théorèmes fondamentaux sur le problème de Dirichlet et la représentation conforme en s'appuyant sur ce qu'il appelait le principe de Dirichlet; envisageant une certaine intégrale dépendant d'une fonction arbitraire U, et que nous appellerons l'intégrale de Dirichlet, il montrait que cette intégrale ne peut s'annuler et il en concluait qu'elle devait avoir un minimum, et que ce minimum ne pouvait être atteint que quand la fonction U était harmonique. Ce raisonnement était fautif, comme on l'a montré depuis, car il n'est pas certain que le minimum puisse être effectivement atteint, et, s'il l'est, qu'il puisse l'être pour une fonction continue.

Les résultats étaient exacts cependant; on a beaucoup travaillé sur cette question, on a montré que le problème de Dirichlet peut toujours être résolu, et on l'a même effectivement résolu; il en est de même pour un grand nombre d'autres problèmes de physique mathématique qui auraient pu autrefois paraître

abordables par la méthode de RIEMANN. Ce n'est pas ici le lieu de faire le long historique de ces travaux; je me bornerai à mentionner le point final d'aboutissement qui est la méthode de FREDHOLM.

Il semblait que ce succès eût rejeté pour jamais dans l'oubli l'aperçu de RIEMANN et le principe de DIRICHLET lui-même. Beaucoup le regrettaient cependant; ils sentaient qu'on était privé ainsi d'un instrument puissant et ils ne pouvaient croire que la force de persuasion que conservait malgré tout l'argument de RIEMANN, et qui semblait reposer sur je ne sais pas quelle adaptation de la pensée mathématique à la réalité physique, ne fût en réalité qu'une pure illusion due à de mauvaises habitudes d'esprit. M. HILBERT voulut rechercher s'il ne serait pas possible, avec les nouvelles ressources de l'analyse mathématique, de transformer l'aperçu de RIEMANN en une démonstration rigoureuse.

Voici comment il y est parvenu; considérons l'ensemble des fonctions U satisfaisant aux conditions proposées; choisissons dans cet ensemble une suite indéfinie S de fonctions telles que les intégrales de Dirichlet correspondantes tendent en décroissant vers leur limite inférieure. Il n'est pas certain qu'en chaque point du domaine envisagé cette suite S converge; elle pourrait osciller entre certaines limites. Mais on peut détacher dans S une suite partielle S_1, qui converge en un point M_1 du domaine; dans S_1, détachons une autre suite partielle S_2 qui convergera toujours en M_1, mais qui de plus convergera encore en M_2. En continuant de la sorte nous obtiendrons une suite qui convergera en autant de points que nous voudrons; et par un artifice simple, nous en déduirons une autre suite qui convergera en tous les points d'un ensemble dénombrable, par exemple en tous les points dont les coordonnées sont rationnelles. Si l'on pouvait alors démontrer que les dérivées de toutes les fonctions de la suite sont inférieures en valeur absolue à une limite donnée, on pourrait conclure immédiatement que la suite converge uniformément dans tout le domaine et l'application des règles du calcul des variations ne présenterait plus de difficulté spéciale.

Pour établir le point qui reste à démontrer, M. HILBERT a employé deux artifices différents, il n'a pas développé le premier autant qu'il serait désirable, et il s'est surtout attaché au second. Celui-ci consiste à remplacer la fonction u proposée par la fonction v qui s'en déduit par une double quadrature et dont elle est la dérivée seconde par rapport aux deux variables indépendantes. Les dérivées de v étant les intégrales premières de u, on peut leur assigner une limite supérieure, à l'aide de quelques inégalités faciles à démontrer. Seulement il faut se résigner à un détour nouveau et à un artifice d'ailleurs simple pour appliquer à cette nouvelle fonction inconnue v les règles du calcul des variations qui s'appliquaient tout naturellement à la fonction u.

Il est inutile d'insister sur la portée de ces découvertes qui dépasse de beaucoup le problème special de Dirichlet. Nous ne devons pas nous étonner que de nombreux chercheurs se soient engagés sur la voie ouverte par M. Hilbert. Nous devons citer MM. Levi, Zaremba et Fubini ; mais je crois avant tout devoir signaler M. Ritz qui, s'écartant un peu de la route commune, a imaginé une méthode de calcul numérique applicable à tous les problèmes de physique mathématique, mais qui y a utilisé plusieurs des procédés ingénieux créés par son maître M. Hilbert.

M. Hilbert a récemment appliqué sa méthode à la question de la représentation conforme. Je n'analyserai pas ce mémoire dans le détail. Je me bornerai à dire qu'il fournit le moyen de faire cette représentation pour un domaine limité par un nombre infini de courbes ou pour une surface de Riemann simplement connexe d'une infinité de feuillets. C'est donc une solution nouvelle du problème de l'uniformisation des fonctions analytiques.

Divers.

Nous avons passé en revue les principaux sujets d'études où M. Hilbert a marqué sa trace, ceux pour lesquels il montrait une sorte de prédilection et où il est revenu à diverses reprises; nous devons signaler encore d'autres problèmes dont il s'est occupé occasionnellement et sans y insister. Je crois devoir me borner à énoncer dans un ordre chronologique les résultats les plus saillants qu'il a obtenus de la sorte.

Si l'on excepte les formes binaires, les formes quadratiques, et les formes ternaires biquadratiques, la forme définie la plus générale de son degré n'est pas décomposable en une somme de carrés d'autres formes en nombre fini.

On peut trouver par des procédés élémentaires les solutions en nombre entiers d'une équation diophantiqune de genre nul.

Si un polynôme entier dépendant de plusieurs variables et de plusieurs paramètres est irréductible quand ces paramètres restent arbitraires, on peut toujours attribuer à ces paramètres des valeurs entières telles que le polynôme reste irréductible.

Par conséquent il existe toujours des équations d'ordre n à coëfficients entiers et admettant un groupe donné.

Le théorème fondamental de Dedekind sur les nombres complexes à multiplication commutative peut s'établir aisément en s'appuyant sur l'un des lemmes fondamentaux de la théorie des invariants de M. Hilbert.

L'équation diophantique obtenue en égalant à $\pm$ 1 le discriminant d'une équa-

tion algébrique de degré n, possède toujours des solutions rationnelles, mais sauf pour le 2^d et le 3^e degrés ne possède pas de solutions entières.

Parmi les surfaces réelles du 4^e ordre, certaines formes, logiquement concevables ne sont pas possibles; par exemple il ne peut pas y en avoir qui soient composées de 12 surfaces fermées simplement connexes ou d'une surface unique avec onze trous.

Conclusions.

Après cet exposé, un long commentaire serait inutile. On voit quelle a été la variété des recherches de M. Hilbert, l'importance des problèmes auxquelles il s'est attaqué. Nous signalerons l'élégance et la simplicité des méthodes, la clarté de l'exposition, le souci de l'absolue rigueur. En cherchant à être parfaitement rigoureux, on risque parfois d'être long, et ce n'est pas là acheter trop cher une correction sans laquelle les mathématiques ne seraient rien. Mais M. Hilbert a su éviter ce que ces longueurs auraient pu avoir d'un peu pénible pour ses lecteurs, en ne leur laissant jamais perdre de vue le fil conducteur qui lui a servi à s'orienter. On voit toujours aisément par quel enchaînement d'idées il a été amené à se poser un problème et à en trouver la solution. On sent que, plus analyste que géomètre au sens ordinaire du mot, il a néanmoins aperçu l'ensemble de son travail d'un coup d'œil, avant d'en distinguer les détails, et il sait faire profiter le lecteur de cette vue d'ensemble.

M. Hilbert a exercé une influence considérable sur les progrès récents des sciences mathématiques, non seulement par ses travaux personnels, mais par son enseignement, par les conseils qu'il donnait à ses élèves et qui leur permettaient de contribuer à leur tour à ce développement de nos connaissances en se servant des méthodes créées par leur maître.

Il n'est pas besoin, ce semble, d'en dire davantage pour justifier le choix de la Commission qui a été unanime à attribuer à M. Hilbert le prix Bolyai pour la période 1905—1909.

ZUR BIOGRAPHIE VON WEIERSTRASS.

Von

G. MITTAG-LEFFLER

in Stockholm

Unter dem hier angegebenen Titel werde ich in den folgenden Heften der Acta mathematica allerlei aus Weierstrass' Nachlasse veröffentlichen. Es sind teils von ihm für eigenen Gebrauch verfertigte Manuskripte, teils Auszüge aus wissenschaftlichen Briefen, die entweder an mich gerichtet sind, oder an andere Mathematiker, die dieselben gütigst zu meiner Verfügung gestellt haben. Hoffentlich werden im Laufe dieser Publikation noch mehr solcher Manuskripte oder Briefe, von welchen eine grosse Zahl existiert, mir zur Publikation übergeben werden. Es scheint mir eine Pflicht jedes Schülers und Freundes des grossen Mathematikers seinerseits dazu beizutragen, dass eine solche Publikation stattfinde, weil noch viele von Weierstrass' Freunden leben und etwa dunkle Punkte durch ihre persönlichen Mitteilungen aufgeklärt werden können. Wenn die Publikation nicht in der nächsten Zeit stattfindet, wird auch zweifellos sehr viel kostbares Material verschwinden. Weierstrass übte in seiner Lebenszeit durch seine Gespräche und seine Vorlesung einen sehr grossen Einfluss auf die Entwickelung der mathematischen Wissenschaft aus. Eine solche Publikation, wie ich sie hier anfange, wird zweifellos, wenn sie von anderen seiner Freunde und änderen Forschern unterstützt wird, diesen Einfluss noch lange Zeit und noch mehr als es nur durch seine Werke geschehen kann, fortsetzen.

Ich fange damit an verschiedene Mitteilungen über das n-Körperproblem, welches Weierstrass immer ausserordentlich interessierte, zu veröffentlichen.

Auszug aus Briefen von C. Weierstrass an Sophie Kowalevski das n-Körperproblem betreffend.

16 December 1874.

. . . .

Der Gegenstand, womit ich mich noch weiter beschäftige, wird Dich noch mehr interessiren; leider kann ich in Beziehung auf denselben nur erst von einer Hoffnung auf Erfolg berichten, und muss ausführlichere Mittheilung überhaupt der mündlichen Besprechung vorbehalten. Du erinnerst Dich, liebes Herz, dass wir zu der Zeit, als unsere Freundschaft eine innigere geworden war, so dass ich zuweilen das Bedürfniss empfand, auch über Arbeiten, die ich gern machen möchte, mit Dir zu reden, und wir uns auch wohl in wissenschaftliche Träume und Phantasien verloren, oftmals von den Bedingungen der Stabilität des Weltsystems gesprochen haben, und den vielen Fragen, mit denen dies Problem zusammenhängt. Du weisst auch, dass die eigentliche mathematische Aufgabe, um die es sich handelt, folgendermassen formulirt werden kann.

Es seien zur Bestimmung von n Functionen einer reellen Grösse t gegeben n Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = G_1(x_1, \ldots x_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = G_n(x_1, \ldots x_n),$$

wo $G_1, \ldots G_n$ ganze Functionen von $x_1, \ldots x_n$ mit reellen Coefficienten bezeichnen. Es fragt sich, wie müssen diese Functionen G beschaffen sein, und welche Bedingungen die Werthe von $x_1, \ldots x_n$ für $t = 0$ erfüllen, damit $x_1, \ldots x_n$ *reguläre* Functionen von t (innerhalb der Grenzen $-\infty$ $+\infty$) werden. Namentlich aber ist zu ermitteln, unter welchen Umständen jede der Grössen x beständig zwischen endlichen Grenzen schwankt. Endlich sollen, wo möglich, Entwicklungen von $x_1, \ldots x_n$, die ihrem functionalen Charakter entsprechen, aufgefunden werden.

Ich habe mich nun einige Wochen sehr ernsthaft mit dieser Frage beschäftigt, glaube auch einen Weg gefunden zu haben, der dereinst zum Ziele führen wird — aber es wird noch grösserer Anstrengung bedürfen, um ihn überhaupt gangbar zu machen.

. . . .

1 Januar 1875.

Meine liebe Sonja.

Ich danke Dir recht herzlich für das schöne Weihnachtsgeschenk, das Du

mir mit Deinem letzten Briefe gemacht hast. Es spricht sich in demselben ein wissenschaftlicher Enthusiasmus aus, der mich entzückt; sowie mich die treue Anhänglichkeit, die Du Deinem Lehrer und Freunde bewahrst, glücklich macht. Aber ich fürchte fast, ich habe zu grosse Erwartungen in Dir erregt, indem ich, was sonst nicht grade meine Gewohnheit ist, in der Uberzeugung, dass ich Dir eine Freude damit machen werde, mich verleiten liess, von dem zu sprechen, was ich noch zu arbeiten gedenke. Das Ziel, welches ich erreichen möchte, liegt noch in weiter Ferne, in unbestimmten Umrissen von mir; bis jetzt habe ich kaum etwas anderes gethan als über die Mittel gesonnen, durch welche ich mir den Weg zu ebnen hoffe. Ausserdem ist es, wie Du selbst einsiehst, eine dringende Nothwendigkeit, dass ich zunächst meine alten Arbeiten zum Abschluss bringe.

. . . .

15 August 1878.

. . . .

Weniger glücklich bin ich gewesen mit den angefangenen Untersuchungen über die Lösung der dynamischen Probleme durch Reihenentwicklungen, welche der Besonderheit der zu integrirenden Differentialgleichungen entsprechen. Ich komme bis zu einem gewissen Punkt; ich forme z. B. die Differentialgleichungen für das Problem der n Körper so um, dass sie eine beliebig weit fortzusetzende Integration in Reihenform formell gestatten, aber meine Versuche, die Convergenz der Entwicklung zu erweisen, scheitern an einem Hinderniss, das ich nicht zu bewältigen im Stande bin. Die Glieder der Reihen haben alle die Gestalt

$$A_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_r} \cos\left[\nu_1 k_1 (t - T_1) + \nu_2 k_2 (t - T_2) + \ldots + \nu_r k_r (t - T_r)\right]$$

wo die A, k, T Constanten sind. Die Grössen $T_1, \ldots T_r$ sind, wenn die Ordnung des zu integrirenden Systems von Differentialgleichungen $2r$ ist, r der Integrations-Constanten. In den Coefficienten $A_{\nu_1 \ldots \nu_r}$ kommen dieselben nicht vor, sondern andere, welche mit den $k_1, \ldots k_r$ durch r Gleichungen zusammenhängen. Diese Coefficienten erscheinen aber in Bruchform, und es werden die Nenner unendlich klein, wenn die Summe der absoluten Beträge der ganzen Zahlen $\nu_1, \ldots \nu_r$ unendlich gross wird. Es muss also gezeigt werden, dass auch die Zähler unendlich klein werden, und ebenso die Brüche selbst, was bei der complicirten Zusammensetzung der Ausdrücke unmöglich erscheint. — Das Factum selbst ist mir nicht auffallend, es kommt sehr oft vor, dass eine algebraische Function mehrerer Argumente sich *nur* in der Form eines Bruches darstellen lässt, wenn sie auch bei endlichen Werthen der Argumente niemals unendlich gross wird. Aber wie gesagt, ich komme über die daraus entspringende Schwierigkeit nicht hinweg.

. . . .

1 Februar 1881.

. . . .

Ich habe, seit Du fort bist, mich noch angestrengt mit den linearen Differentialgleichungen, deren Coefficienten reellperiodische Functionen einer Veränderlichen sind, beschäftigt, und glaube jetzt zur Behandlung derselben den richtigen Weg gefunden zu haben. Doch muss ich mich dabei auf eine besondere Gattung solcher Gleichungen beschränken, welche aber grade diejenige ist, die bei Problemen der analytischen Mechanik vorkommt.

Das Haupttheorem, welches sich mir dargeboten hat, will ich Dir mittheilen. »Es sei

$$F(x_1, \ldots x_{2n}) = \sum_{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}(t)\, x_\lambda x_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, \ldots 2n)$$

eine homogene Function zweiten Grades der $2n$ Veränderlichen $x_1, \ldots x_{2n}$; ihre Coefficienten sollen reelle Functionen der Veränderlichen t und aus Gliedern von der Form

$$A \operatorname{Cos}(\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \ldots)t + B \operatorname{Sin}(\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \ldots)t$$

zusammengesetzt sein, wo $a_1, a_2, \ldots$ beliebige reelle Grössen und $\nu_1, \nu_2, \ldots$ ganze (pos. oder neg.) Zahlen bedeuten. Ferner nehme ich an, es seien die Functionen $F_{\lambda\mu}(t)$ so beschaffen, dass bei reellen Werthen von $t, x_1, \ldots x_{2n}$ die Function $F(x_1, \ldots x_{2n})$ ihr Zeichen nicht ändern kann. Dies vorausgesetzt nehme ich nun zwischen $x_1, \ldots x_{2n}$ und t die folgenden Differentialgleichungen an:

$$\begin{aligned} \frac{dx_a}{dt} &= \frac{\partial F(x_1, \ldots x_{2n})}{\partial x_{n+a}} \\ \frac{dx_{n+a}}{dt} &= -\frac{\partial F(x_1, \ldots x_{2n})}{\partial x_a} \end{aligned} \qquad (a = 1, \ldots n)$$

so haben die allgemeinsten, diesen Differentialgleichungen genügenden Ausdrücke von $x_1, \ldots x_{2n}$ die Form:

$$x_\lambda = \sum_\varrho \{f_{\lambda,\varrho}(t) \operatorname{Cos}(m_\varrho t) + f'_{\lambda,\varrho}(t) \operatorname{Sin}(m_\varrho t)\} \qquad \lambda = 1, \ldots 2n$$

wo die m_ϱ, deren Anzahl nicht grösser als n ist, reelle, im Allgemeinen aus den $a_1, a_2, \ldots$ nicht zusammensetzbare Constante, die $f_{\lambda,\varrho}(t)$ und $f'_{\lambda,\varrho}(t)$ aber Functionen von derselben Beschaffenheit und Zusammensetzungsweise wie die $F_{\lambda\mu}(t)$ sind.« — Streng beweisen kann ich dies Theorem bis jetzt nur für den Fall, dass die Zahl der Grössen $a_1, a_2, \ldots$ sich auf Eins reducirt. Der Weg aber, den ich zur

wirklichen Entwicklung der Ausdrücke von $x_1, \ldots x_{2n}$ verfolge, ist unabhängig von dieser Voraussetzung, und wenn derselbe sich in dem speciellen Fall bewährt, so wird auch der allgemeine keine Schwierigkeit machen. Könnte ich jetzt einige Wochen ausschliesslich diesen Untersuchungen widmen, so würde ich bald zur Gewissheit darüber kommen, ob die Gedanken, von denen ich mich jetzt leiten lasse, richtig sind oder nicht. — Komme ich mit den linearen Differentialgleichungen von der angegebenen Form zurecht, so glaube ich, dass auch diejenigen Differentialgleichungen, die z. B. zur Bestimmung der Planetenbahnen dienen sollen, einer rationalen Behandlungsweise sich werden unterwerfen lassen. Dass alle bis jetzt versuchten Wege zur Integration derselben nicht zum Ziele führen können, davon bin ich jetzt mehr wie je überzeugt. . . . .

6 März 1881.

. . . . . . Von mir habe ich wenig zu sagen. Ich bin in diesem Jahre recht fleissig gewesen, aber doch nicht mit dem entsprechenden Erfolg. Deine Anwesenheit hat mich veranlasst, meine alten Untersuchungen über die Integration der dynamischen Differentialgleichungen wieder aufzunehmen; ich habe auch, wie ich Dir bereits schrieb, einige Fortschritte gemacht, aber immer noch sehe ich Schwierigkeiten vor mir, die mir zuweilen unüberwindlich vorkommen. Ich habe diesen Winter im Seminar mich ausführlich über die bisherigen Methoden zur Bestimmung der Planeten-Bewegungen unter den in unsrem Planetensystem stattfindenen Umständen ausgesprochen, und bin mehr und mehr zu der Ueberzeugung gekommen, dass zur wahren Lösung der Probleme, um die es sich dabei handelt, ganz andere Wege als die bisher betretenen eingeschlagen werden müssen — aber ich sehe diese neuen Wege immer noch nur in nebelhafter Form vor mir. Hätte ich Jemanden hier, mit dem ich mich täglich über alles das was ich versuche aussprechen könnte, so würde mir vielleicht vieles klarer werden. . . .

14 Juni 1882.

. . . . Die Abhandlung P.'s über die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

kenne ich nicht. Wo steht dieselbe? Was endlich die von P. angekündigte Integration der Differentialgleichungen der Mechanik angeht, so kann ich darüber folgendes sagen. Ich habe vor zwei Wintern im Seminar etwas über den Gegenstand vorgetragen und unter andern folgenden Satz bewiesen:

»Wenn beliebig viele materielle Punkte nach dem Newton'schen Gesetze oder irgend einem andern, bei dem an die Stelle von r^2 eine analyt. Function

von r tritt, die bei reellen und positiven Werthen der letztern Grösse nur für $r=0$ unendlich gross wird — auf einander wirken, und es sind die Anfangsbedingungen der Bewegung so beschaffen, dass niemals zwei Punkte zusammentreffen, und auch keine zwei in's Unendliche sich von einander entfernen; so sind die Coordinaten der sich bewegenden Punkte analytische Functionen der Zeit t, eindeutig definirt nicht nur für alle reellen Werthe dieser Grösse, sondern auch für alle complexen, deren zweite Coordinate ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer bestimmten Grenze bleibt.» Der Satz, von dem nach APPELL's Mittheilung P. ausgeht, ist also nur richtig, wenn die Bedingungen der Stabilität des Weltsystems erfüllt sind. Die Feststellung dieser Bedingungen ist aber vielleicht der schwierigste Theil der ganzen Untersuchung. Wenn z. B. nur zwei Punkte vorhanden sind und zu irgend einer Zeit die Bewegung eines jeden gegen den andern gerichtet ist, so sind die Coordinaten nicht Functionen der Zeit von der angegebenen Beschaffenheit. Wenn P. im Stande ist, die Coefficienten der Reihe, in welche sich die Coordinaten unter Voraussetzung der Stabilität des Systems entwickeln lassen, wirklich zu bestimmen, so wäre es immerhin möglich, dass dann die Bedingungen, unter denen die Reihe convergirt, sich feststellen liessen, diese wären dann aber die Stabilitäts-Bedingungen. Aber auch dann glaube ich nicht, dass jene Reihenform den wahren analytischen Character der darstellenden Functionen ausdrücken werde; dem widerspricht schon der einfache Fall, in welchem zwei Punkte vorhanden sind und die Bewegung eines jeden um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt in einer Ellipse erfolgt. Aber wir wollen abwarten. . . . .

Auszug aus Briefen von C. Weierstrass an G. Mittag-Leffler das n-Körperproblem betreffend.

Berlin, W. Linkstr: 33. den 8:ten März 83.

. . . . .

Wenn Sie Herrn GYLDÉN sehen, so bitte ich, mich bei demselben entschuldigen zu wollen, dass ich seinen freundlichen Brief von vorigem Herbst noch nicht beantwortet habe. Ich wollte ihm gern einiges über die Störungstheorie schreiben, namentlich aber einige Punkte klar stellen, über die er durch die Aufzeichnungen eines Ihrer früheren Schüler aus meinen Seminar-Vorträgen, wie es mir scheint zu nicht zutreffenden Voraussetzungen verleitet worden ist.

Ich habe keineswegs, wie Herr GYLDÉN annimmt, Vorträge über die Störungstheorie gehalten, dazu würde ich nicht vorbereitet gewesen sein, wenn auch die Zeit gereicht hätte. Mein Thema war vielmehr, den analytischen Charakter der durch algebraische Differentialgleichungen definirten Functionen einer Veränder-

lichen festzustellen. Davon habe ich dann eine Anwendung auf die Differentialgleichungen des Problems der n Körper gemacht, und bei dieser Gelegenheit über die bisherige Behandlungsweise dieses Problems einige Bemerkungen ausgesprochen, in denen ich mit Herrn Gyldén vollständig darin übereinstimmte, dass die bisher versuchten Annäherungsmethoden, namentlich auch die auf der Variation der Constanten beruhenden, zur vollständigen Lösung des Problems, das heisst zur Erlangung von Ausdrücken, welche die *Coordinaten* der sich bewegenden Punkte als Functionen der Zeit für einen beliebig gross angenommenen Zeitraum und mit vorgeschriebener Genauigkeit geben, unbrauchbar seien.

Das Haupttheorem, das ich aus den vorangegangenen allgemeinen Untersuchungen über Differentialgleichungen für das Problem der n Körper zog, lautet in genauer Fassung also:

Es seien $m_1, m_2, \ldots m_n$ die Massen von n materiellen Punkten, $x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda$ die Coordinaten von m_λ zur Zeit t, und es mögen sich die Punkte der folgenden Differentialgleichungen gemäss bewegen:

$$m_\lambda \frac{d^2 x_\lambda}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial x_\lambda}, \quad m_\lambda \frac{d^2 y_\lambda}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial y_\lambda}, \quad m_\lambda \frac{d^2 z_\lambda}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial z_\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots n)$$

in denen F eine analytische Function von $x_1 y_1 z_1 \ldots x_n y_n z_n$ bedeutet, welche für alle reellen Werthe dieser Grösse eindeutig definirt ist und einen ebenfalls reellen Werth besitzt der nur dann unendlich gross wird, wenn zwei der Punkte zusammentreffen (also auch dann nicht, wenn die Punkte zum Theil oder sämmtlich sich ins Unendliche entfernen). Angenommen nun, es gehe die Bewegung in der Art vor sich, dass niemals zwei Punkte zusammentreffen, so sind $x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n$ eindeutige analytische Functionen von t, nicht bloss für alle reellen Werthe dieser Grösse, sondern auch für alle complexen, in denen die zweite Coordinate (der Factor von i) dem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze liegt. Dazu bemerke ich noch Folgendes. Man wird schwerlich *à priori* die Bedingungen ermitteln können, die erfüllt sein müssen, damit niemals zwei Punkte zusammentreffen können, man wird vielmehr dieselben als erfüllt voraussetzen müssen und dann giebt das vorstehende Theorem über die analytische Natur der darzustellenden Functionen in soweit Aufschluss, dass man auf sie die Ergebnisse der neueren Functionenlehre anzuwenden im Stande sein wird.

Poincaré hat, wie mir mitgetheilt worden ist, das in Rede stehende Theorem ebenfalls hergeleitet, wenigstens unter der Voraussetzung des Newton'schen Gesetzes und daraus die Folgerung gezogen, es sei möglich, die Coordinaten aller Punkte in convergirenden Reihen von der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi(t)^\nu$$

zu entwickeln, wo $\varphi(t)$ eine *bestimmte* Function von t ist. Dies ist sehr leicht einzusehen. Der Bereich der Grösse t in dem die Coordinaten eindeutige Functionen sind, ist ein Parallelstreifen, der die Linie des reellen Werthes von t in sich fasst, diesen Streifen kann man auf einem Kreis abbilden, wodurch sich die Function $\varphi(t)$ ergiebt. Aber man erhält auf diese Weise nicht Aufschluss darüber, ob die gemachte Voraussetzung erfüllt ist oder nicht und es ist auch die Form, in der sich die Ausdrücke der Coordinaten darstellen, nicht die der Natur der zu beschreibenden Bewegungen angemessene.

Ich selbst habe über das Problem mancherlei Speculationen angestellt, deren Ergebnisse jedoch mich noch nicht befriedigen.

Berlin, 1 Jan. 85.

. . . . .

Dagegen scheint mir das Problem, die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Systems materieller Punkte in dem Falle, *wo* die Stabilität des Systems feststeht, durch convergirende Reihen zu integriren, ein zweckmässiges zu sein, dessen Bearbeitung möglicherweise einen schönen Erfolg haben könnte.[1] . . . . .

[1] Bezieht sich auf eine Ueberlegung über die Preisfragen, die für den Preis gestellt werden sollten, welchen König Oscar II am sechzigsten Jahrestage seiner Geburt auszutheilen bestimmt hatte.

Als erste Preisfrage wurde auch die folgende in der von Weierstrass gegebenen Fassung angenommen. »Es sollen für ein beliebiges System materieller Punkte, die einander nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, unter der Annahme, dass niemals ein Zusammentreffen zweier Punkte stattfinde, die Coordinaten jedes einzelnen Punktes in unendliche, aus bekannten Functionen der Zeit zusammengesetzte und für einen Zeitraum von unbegrenzter Dauer gleichmässig convergirende Reihen entwickelt werden.

Dass die Lösung dieser Aufgabe, durch deren Erledigung unsere Einsicht in den Bau des Weltsystems auf das wesentlichste würde gefördert werden, nicht nur möglich, sondern auch mit den gegenwärtig uns zu Gebote stehenden analytischen Hülfsmitteln erreichbar sei, dafür spricht die Versicherung Lejeune-Dirichlet's, der kurz vor seinem Tode einem befreundeten Mathematiker mitgetheilt hat, dass er eine allgemeine Methode zur Integration der Differentialgleichungen der Mechanik entdeckt habe, sowie auch, dass es ihm durch Anwendung dieser Methode gelungen sei, die Stabilität unseres Planetensystems in vollkommen strenger Weise festzustellen. Leider ist uns von diesen Untersuchungen Dirichlet's, ausser der Andeutung, dass zur Auffindung seiner Methode die Theorie der kleinen Schwankungen einen gewissen Anhalt biete, nichts erhalten worden (Kummer, Gedächtnissrede auf Lejeune-Dirichlet, Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1860, p. 35); es darf aber als gewiss

Berlin, 7. 8. 85.

. . . . .

Ich beantworte nun zunächst Ihren letzten Brief, weil dies das Dringendste ist. Glücklicherweise bin ich im Stande, Ihnen über die zur Sprache gebrachten Punkte Auskunft zu geben — ich brauche mich nur auf einen Vortrag zu beziehen, den ich vor einigen Jahren im Seminar gehalten, und der damals, in Nachschriften verbreitet, ebenso wie jetzt die Preisfrage das Missfallen einiger Astronomen erregt hat, weil ich das Verlangen gestellt hatte, es müssten diejenigen, welche mit der Störungstheorie sich beschäftigen, zunächst die Ergebnisse der neueren Functionenlehre — im weitesten Sinne des Worts — sich gehörig zu eigen zu machen suchen, insbesondere bevor sie eine unbekannte Function darzustellen unternähmen, den analytischen Charakter derselben möglichst erforschen, um daraus für den zweckmässigsten Ausdruck der Function Aufschluss zu gewinnen. Viele von unseren Astronomen haben aber über den an sich lobenswerthen Eifer, die Methoden der praktischen Astronomie möglichst zu verwollkommnen, um sichere, in künftiger Zeit zu verwerthende Beobachtungen zu machen, den Sinn für das höchste Ziel ihrer Wissenschaft verloren, das doch kein anderes ist, als die Gewinnung möglichst vollkommener Einsicht in den Bau des Weltsystems und die Erkenntniss, dass und *wie* alle in denselben vor sich gehenden Bewegungen durch *ein* Grundgesetz bestimmt werden.

Doch zur Sache. In jenem Vortrag begann ich mit der Discussion der folgenden Differentialgleichungen, in denen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu bestimmende Functionen einer Veränderlichen t bedeuten, $G_\lambda(x_1, \ldots x_n)$ aber (für $\lambda = 1, \ldots n$) eine gegebene ganze rationale Function von $x_1, \ldots x_n$, welche t nicht explicite enthält:

$$\frac{dx_\lambda}{dt} = G_\lambda(x_1, \ldots x_n) \qquad (\lambda = 1, \ldots n).$$

Setzt man fest, dass für einen bestimmten Werth t_0 von t $x_1, \ldots x_n$ beziehlich die willkürlich vorgeschriebenen Werthe $a_1, \ldots a_n$ erhalten sollen; so lassen sich zunächst $x_1, \ldots x_n$ in der Form von Potenzreihen von $t - t_0$ darstellen:

$$x_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t - t_0;\ a_1, \ldots a_n),$$

angenommen werden, dass sie nicht in schwierigen und verwickelten Rechnungen bestanden haben, sondern in der Durchführung eines einfachen Grundgedankens, den wieder aufzufinden ernster und beharrlicher Forschung wohl gelingen möchte.

Sollte indessen die gestellte Aufgabe Schwierigkeiten darbieten, die zur Zeit nicht zu überwinden wären, so könnte der Preis auch ertheilt werden für eine Arbeit, in der irgend ein anderes bedeutendes Problem der Mechanik in der oben angedeuteten Weise vollständig erledigt würde.» (Diese Zeitschrift, Bd 7.

für deren Coefficienten sich Ausdrücke ergeben, welche ganze rationale Functionen von $a_1, \ldots a_n$ und den Coefficienten der G_λ mit durchweg *positiven* Zahlcoefficienten sind.

Bildet man nun (für $\lambda = 1, \ldots n$) eine ganze Function $\overline{G}_\lambda(x_1, \ldots x_n)$ mit lauter reellen und *positiven* Coefficienten, die so gewählt werden müssen, das keiner von ihnen kleiner ist als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten in G_λ, versteht unter A_λ eine positive Grösse, die nicht kleiner ist als $|a_\lambda|$ und ersetzt das vorgelegte System von Differential-Gleichungen durch dieses:

$$\frac{d\overline{x}_\lambda}{dt} = \overline{G}_\lambda(\overline{x}_1, \ldots \overline{x}_n);$$

so erhält man

$$\overline{x}_\lambda = \overline{\mathfrak{P}}_\lambda(t - t_0;\ A_1, \ldots A_n),$$

wo der Ausdruck auf der Rechten aus $\mathfrak{P}_\lambda(t - t_0;\ a_1, \ldots a_n)$ dadurch hervorgeht, dass man in derselben jeden Coefficienten der Functionen G_λ durch den entsprechenden der Functionen $\overline{G}_\lambda$, und $a_1, \ldots a_n$ beziehl. durch $A_1, \ldots A_n$ ersetzt. Dann ist, wenn man einen beliebigen Coefficienten einer der Reihen $\mathfrak{P}_\lambda$ herausgreift, der absolute Betrag desselben sicher nicht grösser als der entsprechende positive Coefficient von $\overline{\mathfrak{P}}_\lambda$; folglich werden, wenn die Reihen $\overline{\mathfrak{P}}_\lambda$ sämmtlich convergiren, wofern der absolute Betrag von $t - t_0$ kleiner als r ist, die Reihen $\mathfrak{P}_\lambda$ jedenfalls für dieselben Werthe von t convergiren und analytische Functionen dieser Grössen darstellen. (Ich führe diese bekannten Sachen nur des Zusammenhangs wegen an, und um jenen Vortrag getreu zu reproduciren). Functionen $\overline{G}_\lambda$, welche den gestellten Bedingungen entsprechen, erhält man z. B., wenn man unter g, a positive Grössen und unter m eine ganze positive Zahl verstehend

$$\overline{G}_\lambda = g(1 + x_1 + \cdots + x_n)^m$$

setzt, und g und m hinlänglich gross annimmt. Wenn man dann noch $A_1 = A_2 \cdots = A_n = a$ setzt, so werden die $\overline{x}_\lambda$ alle einander gleich, und man hat, wenn eine derselben mit x bezeichnet wird,

$$\frac{dx}{dt} = g(1 + nx)^m.$$

Daraus ergiebt sich:

(für $\nu = 1, 2, \ldots \infty$)

$$\text{I)} \qquad \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} = (m, \nu)\, n^{\nu-1} g^\nu (1 + nx)^{\nu m - \nu + 1},$$

wo (m, ν) eine Zahl bezeichnet, die gleich 1 ist für $\nu = 1$ und für die übrigen Werthe von ν mittels der Relation

$$\text{II)} \qquad (m, \nu) = \frac{(\nu - 1)(m - 1) + 1}{\nu} (m, \nu - 1)$$

bestimmt wird. Demnach hat man

$$\text{III)} \qquad x = a + \sum_{\nu=1}^{\infty} (m, \nu)\, n^{\nu-1} g^{\nu} (1 + n a)^{\nu(m-1)+1} (t - t_0)^{\nu}$$

Dividirt man dann das $(\nu + 1)$:te Glied dieser Reihe durch das vorhergehende, so ist der Quotient

$$\text{IV)} \qquad \frac{\nu(m - 1) + 1}{\nu + 1} \cdot n g (1 + n a)^{m-1} (t - t_0);$$

Da nun $\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \frac{\nu(m-1)+1}{\nu+1} = m - 1$ ist, so convergirt die vorstehende Reihe für jeden der Bedingung

$$|t - t_0| < \frac{1}{(m - 1)\, n g (1 + n a)^{m-1}}$$

genügenden Werth von t.

Hiermit ist nun bewiesen, nicht nur, dass die vorstehenden Reihen

$$\mathfrak{P}_\lambda (t - t_0;\ a_1, \ldots a_n)$$

stets einen gemeinschaftlichen Convergenzbezirk besitzen, wie man auch $a_1, a_2, \ldots a_n$ annehmen möge, sondern auch, *dass der Radius dieses Bezirks stets grösser bleibt als eine angebbare Grösse, wenn für den absoluten Betrag eines jeden Coefficienten der Functionen G_λ, sowie für den absoluten Betrag jeder der Grössen $a_1, \ldots a_n$ eine endliche, übrigens beliebig grosse obere Grenze festgesetzt wird.*

Sind also die Coefficienten der G_λ eindeutige analytische Functionen beliebig vieler, aber von t unabhängiger Grössen $p, q, \ldots$ und beschränkt man die letzteren auf einen bestimmten Bereich, dergestalt, dass im Innern und an der Grenze desselben keiner der genannten Coefficienten unendlich gross wird, die $a_1, \ldots a_n$ aber auf einen beliebigen, ganz im Endlichen liegenden Bereich; so existirt eine bestimmte positive Grösse r, für welche gilt, *dass die Reihen*

$$\mathfrak{P}_1 (t - t_0;\ a_1 \ldots a_n), \ldots \mathfrak{P}_n (t - t_0;\ a_1, \ldots a_n)$$

eindeutige analytische Functionen der Grössen $t, p, q, \ldots a_1, \ldots a_n$ sind, wenn

$$|t - t_0| < r$$

angenommen und die Veränderlichkeit von $p, q, \ldots a_1, \ldots a_n$ so, wie angegeben, beschränkt wird.

Dieser Satz, der von grosser Tragweite ist, ergiebt sich einfach daraus, dass in Folge der für die Grösse der einzelnen Coefficienten der Reihen $\mathfrak{P}_\lambda$ ermittelten Grenzbestimmung, jede dieser Reihen für alle, den gestellten Bedingungen genügenden Werthsysteme der Grössen $t, p, q, \ldots a_1, \ldots a_n$ *gleichmässig* convergirt.

Nunmehr mögen die Coefficienten der Functionen G_λ sämmtlich reelle Grössen sein und auch den $a_1, \ldots a_n, t_0$ bestimmte reelle Werthe beigelegt werden, so dass jetzt die Reihen

$$\mathfrak{P}_1(t-t_0;\ a_1, \ldots a_n) \ldots\ldots \mathfrak{P}_n(t-t_0;\ a_1, \ldots a_n),$$

wenn der Radius ihres gemeinschaftlichen Convergenzbezirks mit T bezeichnet wird, und der Veränderlichen t nur reelle, der Bedingung

$$-T < t - t_0 < T$$

genügende Werthe gegeben werden, ein bestimmtes, die vorgelegten Differentialgleichungen befriedigendes System reeller Functionen $x_1, \ldots x_n$ darstellen.

Diese Functionen lassen sich nun auf die gewöhnliche Weise fortsetzen.

Im gemeinschaftlichen Convergenzbezirk der Reihen $\mathfrak{P}_\lambda(t-t_0; a_1, \ldots a_n)$ nehme man einen bestimmten reellen Werth t_1 von t beliebig an und setze

$$a'_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t_1 - t_0;\ a_1, \ldots a_n),$$

so stellen die Reihen $\mathfrak{P}_1(t-t_1;\ a'_1, \ldots a'_n), \ldots \mathfrak{P}_n(t-t_1;\ a'_1, \ldots a'_n)$ für die ihrem gemeinsamen Convergenzbezirk angehörigen Werthe von t Fortsetzungen der durch die ursprünglichen Reihen definirten Functionen dar. Mit diesen kann man dann in derselben Art weiter verfahren: man nimmt im gemeinsamen Convergenzbezirk derselben einen reellen Werth t_2 an, setzt

$$a''_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t_2 - t_1;\ a'_1, \ldots a'_n),$$

so stellen auch die Reihen

$$\mathfrak{P}_1(t-t_2;\ a''_1, \ldots a''_n), \ldots \mathfrak{P}_n(t-t_2;\ a''_2, \ldots a''_n)$$

Fortsetzungen der in Rede stehenden Functionen dar; u. s. w.

Nun lässt sich leicht beweisen: Wenn t' ein bestimmter reeller Werth von t ist und es lässt sich auf die beschriebene Weise aus der ursprünglichen Reihe $\mathfrak{P}_\lambda$ ein System von Reihen

$$\mathfrak{P}_1(t-t'), \ldots \mathfrak{P}_n(t-t')$$

ableiten, so erhält man stets *dasselbe* System, wie man auch bei der Ableitung verfahren, d. h. welche vermittelnden Werthe $t_1, t_2, \ldots$ man auch anwenden möge. Ferner, wenn man für irgend einen Werth t' ein solches System von Reihen erhalten kann, so ist dies auch möglich für alle Werthe t'', die in einer gewissen

Umgebung von t' liegen. Daraus folgt denn, dass diejenigen Werthe t', für welche es möglich ist, ein System von Reihen

$$\mathfrak{P}_1(t-t'), \dots \mathfrak{P}_n(t-t')$$

zu erhalten, welche aus den ursprünglichen

$$\mathfrak{P}_1(t-t_0;\ a_1, \dots a_n), \dots \mathfrak{P}_n(t-t_0;\ a_1, \dots a_n)$$

auf die angegebene Weise abgeleitet werden, *eine continuirliche Folge* bilden, deren Grenzpunkte T_1, T_2 sein mögen ($T_1 < T_2$), wo dann T_1 auch $-\infty$ und $T_2 = +\infty$ sein kann.

Hiermit ist bewiesen:

Unter der Voraussetzung, dass unter t jetzt eine reelle Veränderliche verstanden werde und dass man festsetze, es sollen die Grössen $x_1, \dots x_n$ für einen bestimmten Werth t_0 von t vorgeschriebene reelle Werthe $a_1, \dots a_n$ erhalten, existirt für die zwischen zwei bestimmten Grenzen T_1, T_2 liegenden Werthe von t *ein* bestimmtes System reeller und continuirlicher Functionen $x_1, \dots x_n$ welche den vorgelegten Differentialgleichungen genügen. Ist t' irgend ein bestimmter Werth von t und sind $x'_1, \dots x'_n$ die zugehörigen Werthe von $x_1, \dots x_n$, so ist für alle Werthe von t in einer gewissen Umgebung von t'

$$x_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t-t';\ x'_1, \dots x'_n) \qquad (\lambda = 1, \dots n).$$

Angenommen nun, es habe T_2 einen endlichen Werth. Dann wird, wenn t sich der Grenze T_2 nähert, wenigstens eine der Grössen x_λ unendlich gross. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde nach dem vorhin bewiesenen der Radius des gemeinsamen Convergenzbezirks der Reihen

$$\mathfrak{P}_\lambda(t-t';\ x'_1, \dots x'_n)$$

beständig grösser bleiben als eine endliche Grösse, wie nahe auch t' an T_2 heranrücken möge, und man könnte für einen Werth t'', der $> T_2$ wäre aus den vorstehenden Reihen andere

$$\mathfrak{P}_1(t-t''), \dots \mathfrak{P}_n(t-t'')$$

ableiten; was wider die Annahme ist. Ebenso wird gezeigt, dass in dem Falle, wo T_1 einen endlichen Werth hat, und t sich der Grenze T_1 nähert, wenigstens eine der Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ unendlich gross wird.

Ist dagegen $T_2 = +\infty$ oder $T_1 = -\infty$, so sind zwei Fälle möglich. Es werden entweder, wenn t sich der betr. Grenze nähert, einige der Grössen x_λ unendlich gross — in dem Sinne, dass unter den Werthen, welche sie nach und nach annehmen, beliebig grosse sich finden — oder es kann auch der absolute Betrag einer jeden beständig unter einer endlichen Grenze bleiben.

Nehmen wir nun an, es trete der letztere Fall ein, d. h. es existire für alle reellen Werthe der Veränderlichen t ein den vorgelegten Differentialgleichungen genügendes System continuirlicher Functionen $x_1, \dots x_n$, und es gebe zugleich für den absoluten Betrag einer jeden eine endliche obere Grenze, so dass auch positive Grössen $A_1, \dots A_n$ existiren, für welche bei jedem Werthe von t

$$|x_\lambda| < A_\lambda \text{ ist für } \lambda = 1, \dots n.$$

Nach dem Obigen giebt es nun für den Radius des gemeinsamen Convergenzbezirks der Reihen

$$\mathfrak{P}_\lambda(t - t_0;\ a_1, \dots a_n)$$

eine endliche untere Grenze (r), wenn den $a_1, \dots a_n$ nur solche Werthe beigelegt werden, deren absoluten Beträge nicht grösser sind als bez. $A_1, \dots A_n$.

Man hat aber, wenn für einen Werth t' von t

$$x_\lambda = x'_\lambda$$

ist,

$$x_1 = \mathfrak{P}_1(t - t';\ x'_1, \dots x'_n), \dots x_n = \mathfrak{P}_n(t - t';\ x'_1 \dots x'_n).$$

Diese Reihen convergiren also für jeden reellen und imaginären Werth von t, welcher der Bedingung

$$|t - t'| < r$$

genügt.

Wenn man also auf die vorhin beschriebene Weise aus dem Systeme der Functionen-Elemente

$$\mathfrak{P}_1(t - t_0;\ a_1, \dots a_n), \dots \mathfrak{P}_n(t - t_0;\ a_1, \dots a_n)$$

andere Systeme ableitet, dabei aber den vermittelnden Grössen t_1, t_2 u. s. w. ebenso wie der Grösse t_0 nur reelle Werthe giebt; so erhält man für *jeden* reellen Werth t' *ein* solches System, dessen Geltungsbereich alle reellen und complexen Werthe von t umfasst, für welche der absolute Betrag von $t - t'$ unter einer gewissen Grenze liegt; diese Grenze ist für jeden Werth von t' grösser als die eben definirte Grösse r.

Dies vorausgeschickt, denke man sich in der die complexen Grössen repräsentirenden Ebene um jeden Punkt t' (unter t' wieder eine reelle Grösse verstanden) als Mittelpunkt einen Kreis beschrieben, dessen Radius gleich ist dem Radius des gemeinsamen Convergenzbezirks der Reihen

$$\mathfrak{P}_\lambda(t - t';\ x'_1, \dots x'_n),$$

und bezeichne mit $\mathfrak{T}$ die Gesammtheit derjenigen Punkte t, die im Inneren irgend eines solchen Kreises liegen. Dann ist $\mathfrak{T}$ eine Fläche, welche von zwei symme-

trischen Linien begrenzt wird, die an verschiedener Seite der Linie der reellen t liegen, und zwar so, dass sie von dieser überall einen Abstand, der $> r$ ist, haben.

Jetzt setze man, wenn t irgend ein dem Inneren von $\mathfrak{T}$ angehöriger Werth ist, und t' der Mittelpunkt eines der Kreise, in dem t liegt,

$$\varphi_\lambda(t) = \mathfrak{P}_\lambda(t-t';\ x'_1, \ldots x'_n),$$

so ist leicht zu zeigen, dass der Werth von $\varphi_\lambda(t)$ unabhängig ist von der Lage des Punktes t' und dass deshalb auf diese Weise für die dem Bereiche $\mathfrak{T}$ angehörigen Werthe t ein System continuirlicher analytischer Functionen

$$\varphi_1(t), \ldots \varphi_n(t)$$

definirt wird, welche für $x_1, \ldots x_n$ gesetzt, den vorgelegten Differentialgleichungen genügen, für $t = t_0$ die Werthe $a_1, \ldots a_n$ annehmen und für alle reellen Werthe von t ebenfalls reelle Werthe haben.

Das System der Differentialgleichungen, von welchem die Bestimmung der Bewegungen von $(n+1)$ nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehenden materiellen Punkte abhängt, lässt sich leicht auf ein anderes von der im Vorstehenden vorausgesetzten Form zurückführen.

Es seien $m_0, m_1, \ldots m_n$ die Massen der sich bewegenden Punkte, $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ die Coordinaten des Punkts m_α zur Zeit t, $s_{\alpha\beta}$ der reciproke Werth des Abstands von m_α und m_β, und

$$\xi_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta}(x_\beta - x_\alpha),\quad \eta_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta}(y_\beta - y_\alpha),\quad \zeta_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta}(z_\beta - z_\alpha).$$

Dann hat man, wenn

$$x'_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt},\quad y'_\alpha = \frac{dy_\alpha}{dt},\quad z'_\alpha = \frac{dz_\alpha}{dt} \qquad (\alpha = 0, \ldots n)$$

gesetzt wird,

$$m_\alpha \frac{dx'_\alpha}{dt} = \sum_\beta{}' m_\alpha m_\beta s^2_{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta}$$

$$m_\alpha \frac{dy'_\alpha}{dt} = \sum_\beta{}' m_\alpha m_\beta s^2_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}$$

$$m_\alpha \frac{dz'_\alpha}{dt} = \sum_\beta{}' m_\alpha m_\beta s^2_{\alpha\beta} \zeta_{\alpha\beta}$$

Ferner

$$\frac{ds_{\alpha\beta}}{dt} = -s^2_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta}(x'_\beta - x'_\alpha) + \eta_{\alpha\beta}(y'_\beta - y'_\alpha) + \zeta_{\alpha\beta}(z'_\beta - z'_\alpha))$$

$$\frac{d\xi_{\alpha\beta}}{dt} = s_{\alpha\beta}(x'_\beta - x'_\alpha) - s_{\alpha\beta}\xi_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta}(x'_\beta - x'_\alpha) + \eta_{\alpha\beta}(y'_\beta - y'_\alpha) + \zeta_{\alpha\beta}(z'_\beta - z'_\alpha))$$

$$\frac{d\eta_{\alpha\beta}}{dt} = s_{\alpha\beta}(y'_\beta - y'_\alpha) - s_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta}(x'_\beta - x'_\alpha) + \eta_{\alpha\beta}(y'_\beta - y'_\alpha) + \zeta_{\alpha\beta}(z'_\beta - z'_\alpha))$$

$$\frac{d\zeta_{\alpha\beta}}{dt} = s_{\alpha\beta}(z'_\beta - z'_\alpha) - s_{\alpha\beta}\zeta_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta}(x'_\beta - x'_\alpha) + \eta_{\alpha\beta}(y'_\beta - y'_\alpha) + \zeta_{\alpha\beta}(z'_\beta - z'_\alpha)).$$

Wenn man also die Grössen

$$x'_\alpha,\ y'_\alpha,\ z'_\alpha,\ s_{\alpha\beta},\ \xi_{\alpha\beta},\ \eta_{\alpha\beta},\ \zeta_{\alpha\beta}$$

als die zu bestimmenden Functionen von t ansieht, so hat man für dieselben ein System von Differentialgleichungen, welche die Form der obigen haben.

Es ist aber, wenn man

$$\begin{aligned} S = m_0 m_1 s_{01} + m_0 m_2 s_{02} + \cdots + m_0 m_n s_{0n} \\ + m_1 m_2 s_{12} + \cdots + m_1 m_n s_{1n} \\ + \cdots + m_{n-1} m_n s_{n-1,n} \end{aligned}$$

setzt,

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha (x'^2_\alpha + y'^2_\alpha + z'^2_\alpha) = S + \text{Const.}$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass von den Grössen x'_α, y'_α, z'_α keine unendlich gross werden kann (bei reellen Werthen von t), so lange alle Grössen $s_{\alpha\beta}$ endliche Werthe haben, d. h. so lange nicht zwei Punkte des Systems einander unendlich nahe kommen. Da unter den Grössen $\xi_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$, $\zeta_{\alpha\beta}$ die Gl.

$$\xi^2_{\alpha\beta} + \eta^2_{\alpha\beta} + \zeta^2_{\alpha\beta} = 1$$

besteht, so kann von diesen bei reellen Werthen von t keine unendlich gross werden. Es ergiebt sich also aus dem vorher Bewiesenen:

Wenn die Bewegung des Systems in der Art vor sich geht, dass es für den Abstand je zweier seiner Punkte eine von Null verschiedene untere Grenze giebt, so sind die Grössen

$$\frac{dx_\alpha}{dt},\ \frac{dy_\alpha}{dt},\ \frac{dz_\alpha}{dt}$$

und somit auch die Coordinaten $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$, *nicht nur für alle reellen Werthe von* t, *sondern auch für alle, die einen Bereich* $\mathfrak{T}$ *von der vorhin angegebenen Beschaffenheit angehören, eindeutige analytische Functionen.*

Es ist hierbei nicht ausgeschlossen, dass die Coordinaten mit t ohne Ende wachsen; im Gegentheil, das ist ja stets der Fall, wenn der Schwerpunkt des Systems nicht ruht. Aber auch die Differenzen

$$x_\beta - x_\alpha,\ y_\beta - y_\alpha,\ z_\beta - z_\alpha$$

können für einzelne oder auch alle Punktepaare mit t ohne Ende wachsen — das trifft sicher ein bei vielen der kleinen Massen, die das Weltall durchschwärmen — aber es bleibt der ausgesprochene Satz bestehen — die oben mit τ bezeichnete Grösse hat einen von Null verschiedenen Werth, die Linien, welche den Bereich $\mathfrak{T}$ begrenzen, behalten auch im Unendlichen einen endlichen Abstand von der Linie der reellen t.

Damit glaube ich Ihre erste Frage beantwortet zu haben, viel breiter, als es nöthig gewesen wäre — Sie wollen dies aber freundlichst entschuldigen — denn es ist mir leichter geworden, mich so gehen zu lassen wie vor meinen Zuhörern im Seminar, als den Versuch zu machen, in ganz knapper Zusammenfassung, wie es für Sie genügt haben würde, das Wesentliche der Sache darzustellen.

Giebt man der Grösse t nur solche Werthe, deren zweite Coordinate zwischen zwei Grenzen ($-\tau$ und τ) liegt, so kann man die letzteren so klein annehmen, dass eine Entwicklung der Grössen $x'_\alpha, y'_\alpha, z'_\alpha$ nach Potenzen der von Poincaré eingeführten Grösse

$$\frac{e^{\frac{t}{k}} - 1}{e^{\frac{t}{k}} + 1},$$

wo k mit τ zusammenhängt, möglich wird, indem man diese Grösse statt t in die Differentialgleichungen einführt.

Die so sich ergebenden, für jeden der jetzt betrachteten Werthe von t convergirenden Reihen sind zwar praktisch unbrauchbar, da sie für einigermassen grosse Werthe von t äusserst schwach convergiren. Aber sie beweisen doch, dass es überhaupt — unter der gemachten Voraussetzung —, Entwicklungen von $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ giebt, welche, — ebenso wie die Bestandtheile, aus denen sie zusammengesetzt sind — eindeutige analytische Functionen von t sind und gleichmässig convergiren — wenigstens wenn man t auf ein endliches, aber beliebig gross anzunehmendes Intervall beschränkt. Was also in der Preisfrage verlangt wird, ist keine an sich nicht zu erfüllende Forderung. Den Astronomen sind successive

Annäherungen ein geläufigerer Begriff als die Entwickelung in gleichmässig convergirende Reihen — jedes *richtige* Annäherungs-Verfahren liefert aber eine solche Entwickelung. Mit Vorbedacht ist darum in der Preisfrage in Betreff der Functionen, aus denen die verlangten Reihen zusammengesetzt sein sollen, keinerlei Vorschrift gegeben.

Was nun Ihre ferneren Fragen angeht, so kann ich mich kurz fassen.

Ich bin der Meinung, dass es vergeblich sein würde, eine Lösung des Problems der n Körper zu erstreben, wenn etwa, wie auch der Anfangszustand des Systems angenommen werde, *immer* mit der Zeit zwei Körper einander unendlich nahe kommen würden — oder dass dieses doch nur vermieden werden könnte durch die Annahme bestimmter Relationen unter den Anfangswerthen von x_a, y_a, z_a und x'_a, y'_a, z'_a, die ja jede kleinste Störung wieder vernichten würde. *Ich setze also voraus*, ohne es bis jetzt mit *völliger* Strenge beweisen zu können — die Möglichkeit, dass es unter gewissen Bedingungen so sei — dass im Allgemeinen je zwei Körper beständig in einem Abstande verbleiben, der eine von Null verschiedene untere Grenze hat; d. h. ich denke mir, dass man versuchen möge zu ermitteln, wie sich unter der in Rede stehenden Voraussetzung die zu bestimmenden Functionen in Reihen von der verlangten Beschaffenheit entwickeln lassen — wobei ich, wie gesagt, den Begriff der Entwicklung einer Function in eine Reihe im weitesten Sinne fasse. Kommt man auf diesem Wege zu einem Resultat, so wird ohne Zweifel die Feststellung der Bedingungen, unter denen die gemachten Voraussetzungen zulässig sind, gleichzeitig sich ergeben. Ob es dabei nöthig oder zweckmässig sei, den Fall, wo ein Körper sich mit der Zeit in's Unendliche entfernt — in jedem gegebenen Augenblick aber in einer endlichen Entfernung von den übrigen sich befindet — zu trennen von dem der Stabilität im engeren Sinne, wo es für den Abstand je zweier Körper eine endliche untere und obere Grenze giebt — das lasse ich unentschieden.

Dass ich an die *bestimmte* Äusserung Dirichlet's, er könne durch seine Methode beweisen, dass für unser Planeten-System die Bedingungen der Stabilität (wohl im engeren Sinne genommen) erfüllt seien, erinnert habe, das ist, wie Sie richtig vermuthen, geschehen, um die bei der Stellung der Frage gemachte Voraussetzung zu rechtfertigen aber auch, um zur Inangriffnahme des in den Augen Vieler unlösbaren Problems, zu ermuthigen. Wird dasselbe durch die Stellung unserer Preisfrage auch nur um einen wesentlichen Schritt weiter geführt, so werden wir sicher zufrieden sein.

. . . . .

Berlin, 23 V 1888. W. Friedr. Wilhelmstr. 14.

. . . . .

Sie werden mich entschuldigen, wenn ich heute nur auf *einen* Punkt Ihres Schreibens, welcher der Erledigung am dringensten bedarf, eingehe.

Herrn KRONECKER's Auslassungen in der am 12:ten v. M. der Akademie vorgetragenen Notiz, *dürfen nicht unbeantwortet bleiben,* und es muss die Antwort, wenn auch ruhig gehalten, doch an Bestimmtheit und Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig lassen. Jedoch halte ich es für durchaus gerathen, damit zu warten, bis die Einlieferungsfrist für die Einsendung der Concurrenzschriften verstrichen sein wird.

Ich bin bereit, in dem Sitzungsbericht der Akademie einen Artikel erscheinen zu lassen, der nachweisen soll, das KR.'s Ausstellungen mit Ausnahme *eines* ganz unwesentlichen Punktes, durchaus unbegründet sind. Da KR. hartnäckig darauf besteht, er wisse nicht, dass *ich* die betr. Preisfrage redigirt habe (was mir allerdings kindisch erscheint), so möchte es am besten sein, wenn ich ihm im Namen der Commission antworte, die ja in der That für alle Fragen solidarisch verantwortlich ist. Ich gebe Ihnen daher in der Kürze die wesentlichsten Momente meiner beabsichtigten Entgegnung mit der Bitte an, mich benachrichtigen zu wollen, ob Sie damit einverstanden sind. Sie würden mich verpflichten, wenn Sie die Güte hätten, auch HERMITE von dem Inhalt dieses Schreibens in Kenntniss zu setzen. Ich würde das selbst thun, wenn es mir gegenwärtig nicht noch so schwer wäre. Uebrigens werde ich Herrn HERMITE eine französische Uebersetzung meines Artikels seiner Zeit zukommen lassen.

Nach einigen einleitenden Worten über den Inhalt und Ursprung des von KR. mit nicht zu verkennender Absichtlichkeit stets nur als »Publication der Acta math.» bezeichneten Schriftstücks beabsichtige ich, folgendes auszuführen.

1. Dass es möglich sei, die Coordinaten beliebig vieler, dem NEWTON'schen Gesetze gemäss sich bewegender materieller Punkte als Functionen der Zeit unter der gemachten Voraussetzung in Reihen von der in der Preisfrage geforderten Form und Beschaffenheit zu entwickeln *lässt sich strenge beweisen.* Ich habe dies bereits vor 10 Jahren in einem Seminarvortrage gethan, und zu demselben Resultat ist noch Hr. POINCARÉ gekommen.

2. Wenn DIRICHLET's Untersuchungen, auf das Problem der n Körper angewandt, ihn in der That auf ein Annäherungsverfahren geführt haben, das zu leisten vermochte, was KUMMER in der Gedächtnissrede darüber sagt — woran ich meinerseits nicht zweifele — so würden sich aus dem Resultate dieses Ver-

fahrens *unmittelbar* Reihen[1] von der geforderten Form ergeben, so dass man durchaus berechtigt ist, die Ergebnisse der DIRICHLET'schen Untersuchungen als thatsächlichen Beweis dafür anzuführen, dass die Herstellung jener Reihen nicht nur möglich, sondern auch mit den jetzigen Hülfsmitteln *ausführbar* sei.

3. Ich halte fest daran, aus innern und äussern Gründen, dass zwischen der von DIRICHLET zur Integration der dynamischen Differenzialgleichungen angewandten allgemeinen Methode und dem von ihm gelieferten Beweis für die Stabilität des Planetensystems ein Zusammenhang stattgefunden habe. Dagegen spricht weder der Umstand, dass DIRICHLET Herrn KRONECKER zuerst von dem genannten Beweise und dann erst »zu einem ganz anderen Zeitpunkte», d. h. in Wirklichkeit einen oder zwei Tage später von seinen allgemeineren, auf die Probleme der Mechanik sich beziehenden Untersuchungen Mittheilungen gemacht hat, noch auch die Versicherung KR.'s, dass die erste Mittheilung »anspruchlos gehalten», die andere »fast in der Form einer feierlichen Eröffnung» erfolgt sei. Nur das Eine ergibt sich aus KR.'s *jetzigen* Angaben, dass DIRICHLET den Stabilitätsbeweis bereits im Wesentlichen fertig gehabt hat, während die andere Untersuchung noch nicht zu Ende geführt war. Aus der KUMMER'schen Gedächtnissräde war dies nicht zu entnehmen; es steht darin kein Wort darüber, ob die eine oder die andere DIRICHLET'sche Entdeckung die früher gemachte sei, ja es blieb zweifelhaft, ob D. von seinem Stablitätsbeweise überhaupt mit KR. gesprochen habe. Diese Unklarheit in der KUMMER'schen Darstellung der Sache ist aber, wie Herr K. uns jetzt mit grosser Naivität sagt, *absichtlich* von ihm herbeigeführt worden, da er, statt sich auf die Rolle eines treuen Berichterstatters zu beschränken, aus mir nicht erklärbaren Gründen von vorn herein beflissen gewesen ist, jene beiden Entdeckungen aus einander zu halten und nicht zuzugeben, dass die *Prinzipien*, welche DIRICHLET zur Lösung der Probleme der Mechanik im allgemeinen geführt haben, von ihm auch zur Beantwortung aller damit in Verbindung stehenden Fragen hätten angewandt werden können.

4. Die einzige nach KR.'s jetziger Darstellung der Sache unzweifelhaft irrige Angabe in der von mir der Preisfrage beigefügten Erläuterungen besteht also darin, dass DIRICHLET Herrn KRONECKER *mitgetheilt* habe, er sei durch seine Integrations-Methode zu dem Stabilitätsbeweise gelangt. Würden aus dem betr. Passus die Worte »durch diese Methode» weggelassen, so würde alles durchaus correct sein.

Uebrigens ist für die Absicht, in welcher in den genannten Erläuterungen auf DIRICHLET's Untersuchungen hingewiesen worden, der von mir begangene

[1] Nichts deutet darauf hin, dass unter den in der Preisfrage geforderten Reihen die von D. mit Recht als unzweckmässig betrachteten Entwickelungsformen zu verstehen seien.

Irrthum ganz *bedeutungslos*. Die Thatsache, dass in einem Systeme beliebig vieler Körper, die nach dem NEWTON'schen Gesetze einander anziehen, eine Stabilität der Bewegung möglich ist, so dass der Abstand je zweier Körper weder jemals unendlich klein noch jemals unendlich gross werden kann, musste angeführt werden, da die Kenntniss dieser Thatsache einem Bearbeiter der gestellten Preisfrage möglicherweise von grossem Nutzen sein konnte; auf welche Weise oder zu welcher Zeit aber DIRICHLET dieselbe erkannt habe, war dabei sehr gleichgültig. Daran würde sich selbst dann nichts ändern, wenn das von mir in Nr. 3 als meine persönliche Ueberzeugung ausgesprochene widerlegt werden könnte.

Dies ist im Wesentlichen, was ich zu sagen beabsichtige. Die Form, in der es zu geschehen hat, werde ich sorgfaltig überlegen. Herr KR. hat seine Äusserungen sehr vorsichtig gehalten — nur wer die Briefe gelesen, welche er in der Preisfrageangelegenheit an Sie gerichtet hat, kann den wahren Zweck seines Angriffs erkennen, während er anscheinend nur einer nach seiner Ansicht falschen Auffassungsweise seiner frühern Mittheilungen über DIRICHLET's letzte Arbeiten hat vorbeugen wollen.

Berlin, 27 Juni 88.

In Betreff der beabsichtigten Abwehr von KRONECKER's Angriff muss ich bemerken, dass ich *zur Zeit* die Sache müsste ruhen lassen, wenn HERMITE nicht *gern* seine Zustimmung dazu giebt, dass ich im Namen und Auftrag der Commission vorgehe. K. steift sich hartnäckig darauf, dass er absolut nicht wisse, von wem die beanstandete Preisfrage gestellt und motivirt worden sei; von einem gegen mich gerichteten Angriff könne also nicht die Rede sein. Dagegen lässt sich öffentlich nichts sagen, obwohl es natürlich eine leere Ausrede ist. Uebrigens ist es in diesem Augenblicke überhaupt peinlich für mich, gegen K. auftreten zu sollen, aus dem Grunde, weil neuerdings der Bruch zwischen uns beiden vollständig geworden ist.

Berlin, 29 Juni 88.

Es ist bereits von mir angedeutet worden, warum ich unter den inzwischen eingetretenen Umständen nicht gern *für meine Person allein* KRONECKER's Auslassungen über die Preisfrage zurückweisen möchte. Nun ersehe ich zudem aus einem eben eingegangenen Schreiben von Frau KOWALEVSKY, dass HERMITE

gar keine Lust hat — aus nationalen Rücksichten wie er sagt — sich in eine »question toute allemande» einzumischen. Unterlassen Sie es darum, ihm zuzureden. Ich werde dann, *nachdem über die Preisertheilung entschieden ist*, Veranlassung nehmen, mich über die erste Preisfrage mit einiger Ausführlichkeit auszusprechen, und dabei dann auch KRONECKER's Einwendungen gehörig betrachten. Denn dann kann ich mich nennen als den, der die Frage vorgeschlagen hat, was jetzt unschicklich ist, wie es überhaupt mit dem literarischen Anstand (unvereinbar)[1] ist, eine noch schwebende Preisfrage zum Gegenstand öffentlicher Erörterung zu machen. . . . .

Berlin, 15 Nov. 88.

. . . . .

5. Die Abhandlung: »Sur le probleme des trois Corps et les équations de la Dynamique»[2] (mit dem Motto: Nunquam praescriptos transibunt sidera fines.) ist unbedingt eine Arbeit von grosser Bedeutung, wenn sie auch nicht eine Lösung des allgemeinen Problems enthält, auf das sich die erste der gestellten Preisfragen bezieht, sondern nur einen speciellen Fall desselben behandelt. Es war aber ausdrücklich freigestellt, falls die gestellte Aufgabe Schwierigkeiten darbieten sollte, die zur Zeit nicht zu überwinden wären, derselben ein anderes bedeutendes Problem der Dynamik zu substituiren, und es würde deshalb, wenn auch die Arbeit nur für den behandelten besonderen Fall die Lösung der — bisher noch in keinem Falle des Dreikörperproblems erledigte — Stabilitätsfrage brachte, zu erwägen sein, ob dies nicht eine so erhebliche Leistung sei, dass die Arbeit gekrönt werden könne. Dieselbe leistet aber viel mehr. Die Astronomen zwar werden von ihr nicht sehr erbaut sein, nicht bloss, weil für die Bedürfnisse der praktischen Astronomie unmittelbar kein Gewinn aus ihr zu ziehen ist, sondern auch, weil sie Illusionen zerstört, denen man sich lange hingegeben hat, und manches, anscheinend sicher begründetes Ergebniss der bisherigen Untersuchungen als unhaltbar nachweist. So z. B. ist die Behauptung LAPLACE's — die man in jedem Lehrbuche der Astronomie wiederholt findet, auch noch im Kosmos, wo sie als Resultat tiefer analytischer Forschung hingestellt wird — dass das Planetensystem dem Zerfalle preisgegeben sein würde, wenn die mittleren Bewegungen zweier Planeten commensurabel wären, so wenig aufrecht zu halten, dass vielmehr die Möglichkeit besteht, dass die Bewegung des ganzen Systems *periodisch* sei im

[1] Das Wort fehlt im Manuskript. (M. L.)

[2] Diejenige Arbeit von POINCARÉ, die später den Preis erhalten hat. (M. L.)

strengen Sinne des Worts. Noch mehr Aufsehen — wohl auch Bedauern — wird der Nachweis erregen, dass es unmöglich sei — was von NEWCOMB, LINDSTEDT u. A., mit anscheinendem Erfolge versucht worden ist — die Coordinaten der Planeten in convergirende Reihen von der Form

$$\sum_{\nu_1 \nu_2 \cdots} A_{\nu_1 \nu_2 \cdots} \frac{\cos}{\sin} (\nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \cdots) t$$

zu entwickeln, wo t die Zeit und $c_1, c_2, \ldots, A_{\nu_1 \nu_2 \cdots}$ Constanten bedeuten. Aber gerade auf diesen »résultats négatifs» scheint mir der Hauptwerth der Untersuchung zu beruhen, indem daraus unwiderleglich hervorgeht, dass zur Lösung des Problems der n Körper ein ganz anderer Weg als der bisher betretene eingeschlagen werden muss, wenn es sich darum handelt, dass dadurch unsere Einsicht in den Bau des Weltsystems wirklich gefördert werde. Freilich ist meine Hoffnung, dass dies Ziel schon jetzt als ein erreichbares sich erweisen werde — eine Hoffnung, die sich hauptsächlich auf die bekannten Mittheilungen über die letzten, auf die Probleme der Dynamik bezüglichen Arbeiten DIRICHLET's sich stützte — durch die Schrift bedeutend herabgestimmt worden. Aber immerhin ist es ein nicht gering anzuschlagender Gewinn, dass die eigentlichen Schwierigkeiten des Problems jetzt klarer als bisher dargelegt worden sind. Indessen enthält die Schrift auch positive Resultate von sehr bedeutender Wichtigkeit. Dahin rechne ich — ausser der schon erwähnten Lösung der Stabilitätsfrage in einem besonderen Falle — u. a. die im ersten Capitel entwickelte »Théorie des invariants intégraux» sowie die im 2:ten Capitel behandelte »Théorie des solutions périodiques» — es sind dies Untersuchungen, welche überhaupt für die Erkenntniss des analytischen Charakters der durch algebraische Differentialgleichungen definirten Functionen einer Variablen von Bedeutung sind. Ganz besonders möchte ich aber hervorheben, was im zweiten Theile der Schrift in Betreff der »asymptotischen Bewegungen» ermittelt worden ist. Abgesehen von dem Gebrauch, der von den Resultaten dieser Untersuchung in dem im folgenden Capitel behandelten, schon erwähnten speciellen Falle gemacht wird, lehren sie, dass selbst in dem Falle, wo mehr als zwei nach dem NEWTON'schen oder auch nach einem anderen Gesetze sich anziehende Körper sich so bewegen, dass der Abstand je zweier derselben beständig zwischen zwei endlichen Grenzen bleibt, Bewegungsformen existiren, von denen wir bisher kaum eine Ahnung hatten und für welche wir auch die entsprechende (von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ gültig bleibende) analytische Darstellungsform noch nicht kennen, in Betreff welcher nur feststeht, dass sie nicht die Gestalt trigonometrischer Reihen haben kann.

Hiernach trage ich kein Bedenken, die in Rede stehende Bewerbungsschrift

für preiswürdig zu erklären. Da es Ihrem Könige daran liegen könnte, dies schon jetzt zu erfahren, so bitte ich, es ihm mittheilen zu wollen, falls Sie dies für angemessen erachten. Das für die Veröffentlichung bestimmte Referat, das von dem Vorstehenden — welchem Sie und HERMITE hoffentlich zustimmen werden — dem Inhalte nach nicht abweichen wird — aber sehr sorgfältig abgefasst werden muss, werde ich gegen Ende d. M. einschicken.

Sie können dem Könige sagen, dass die in Rede stehende Schrift zwar nicht als Lösung der gestellten Preisfrage zu betrachten, aber doch von einer solchen Bedeutung sei, dass von ihrem Erscheinen nach meiner Ueberzeugung eine neue Epoche in der Geschichte der »Mécanique céleste» sich datiren werde. Der Zweck, den Se. Majestät bei der Preisausschreibung im Auge hatten, sei also im Wesentlichen erreicht.

Die in Rede stehende Arbeit lässt allerdings, was ich nicht verschweigen darf, in Beziehung auf Darstellung Vieles zu wünschen übrig, so dass sie sehr schwer zu lesen ist. Auch gegen die vollkommene Strenge einiger Beweise möchten sich Einwendungen erheben lassen. Es wäre sehr zu wünschen, dass der Verfasser sich entschlösse, seine Schrift vor dem Erscheinen noch einer sorgfältigen Revision zu unterwerfen, um die vorhandenen Mängel nach Möglichkeit zu entfernen.

. . . . . .

Berlin, 19 Nov. 88.

Mein lieber Freund.

Ihren soeben mir zugegangenen Brief von 16:ten d. beantworte ich sofort.

Es würde mir lieb sein, wenn Sie eine französische Übersetzung meines Gutachtens Herrn HERMITE zuschickten. Im Resultat wird er ohne Zweifel mit mir übereinstimmen, im Übrigen aber wolle er bedenken, dass wir Deutschen uns in Schriftstücken dieser Art weniger lebhaft und enthusiastisch auszudrücken pflegen als es bei den Franzosen Sitte ist. Eine Phrase, wie er sie in Betreff der astron. Arbeit dem Berichte hinzugefügt zu sehen wünscht, findet sich, wenn ich mich recht erinnere, am Schlusse meines Briefes an Sie; theilen Sie ihm dieselbe gefälligst mit, ich bin gern bereit, sie in meinen Bericht aufzunehmen. Wesentliche Änderungen werde ich in diesem Berichte nicht vornehmen, nur auf die Fassung die möglichste Sorgfalt verwenden. Sie können sich übrigens gefasst darauf machen, dass unsere Entscheidung von mehr als einer Seite einer sehr scharfen Kritik wird unterworfen werden. Herr KR., der mit mir bis jetzt kein Wort über die Preisfrage gesprochen hat und so thut, als ob zwischen uns absolut nichts vorgefallen sei, hat doch unter der Hand bei Bekannten von mir

Erkundigungen eingezogen, ob sie nicht erfahren hätten, dass eine der eingegangenen Arbeiten den Preis erhalten werde. Sehr leid thut es mir, dass Gyldén sich über ungerechte Behandlung beklagt. Obwohl für mich keine Veranlassung vorliegt, seiner Arbeiten zu erwähnen, da er sich nicht um den Preis beworben hat, so würde ich doch gern ihm volle Anerkennung ausgesprochen haben, wenn ich es mit gutem Gewissen könnte. Aber, so sehr ich mich daran bemüht habe, ich verstehe G.'s Arbeiten nicht, oder vielmehr, ich bleibe im Ungewissen darüber, ob die Resultate richtig sind oder nicht. Das mag an meiner mangelhafter Kenntniss des Gegenstandes liegen, aber tüchtigen theoretischen Astronomen geht es ebenso. Ich habe drei mit Störungstheorie vollkommen vertraute Astronomen zu Rathe gezogen, sie stimmen alle darin überein, dass G.'s Untersuchungen bis jetzt durchaus kein befriedigendes Resultat geliefert haben — weder für die Praxis noch für die Theorie.

. . . .

Mit freundlichsten Grüssen von Haus zu Haus
Ihr aufrichtig ergebener
Weierstrass.

Berlin, 8. I. 89.

Lieber Freund!

Erst heute bin ich im Stande, den angefangenen Bericht wieder aufzunehmen. Nach einem früheren Briefe von Ihnen glaube ich annehmen zu können, dass mein vorläufig erstatteter Bericht genügen werde, bei dem Könige die Ertheilung des Preises an den Verfasser der mit dem Motto: »Nunquam transibunt etc.» versehenen Abhandlung zu beantragen. Ich hatte deshalb die Entwerfung des für die Öffentlichkeit bestimmten Berichts, der so, wie ich ihn zu fassen gedachte, keine leichte Arbeit war, aufgeschoben, ohne zu bedenken, dass mir nicht mehr die Kräfte so wie früher zu Gebote stehen und ich auf Unterbrechungen durch Unwohlsein gefasst sein musste. Uebrigens habe ich bis zu Weihnachten hin fast meine ganze Zeit auf das Studium der in Rede stehenden Abhandlung verwandt. Sie ist sehr schwer zu lesen, Hermite . . . . .
hat sie schwerlich in ihren Einzelheiten studirt. Ich bin noch auf manche Bedenken gestossen und in Betreff mehrerer Punkte auch jetzt noch nicht völlig im Klaren.

Was nun Hermite's Bericht über die Arbeit angeht, so kann ich mich mit demselben einverstanden erklären, *falls er* — wie Sie sagen — *nur für den König bestimmt sein soll.* Vor der Öffentlichkeit könnte ich Vieles, das er enthält, nicht

verantworten. Jemand, der nur H.'s Bericht vor Augen hätte, müsste glauben, dass die wichtigsten und schwierigsten Fragen des Problems der n Körper, z. B. die Stabilitäts-Frage, in der Preisschrift *erledigt* seien, während man doch nur sagen kann, dass dies in einem sehr speciellen Falle, und auch in diesem nur unter einschränkenden Bedingungen geschehen sei. Sagt doch der Verfasser selbst am Schlusse seiner Arbeit, dass er sich geirrt habe in der Annahme, es werde sich die Stabilitäts-Frage im allgemeinen Falle in analoger Weise wie in dem speciellen behandeln lasse, und giebt auch die Gründe dafür an, warum dies nicht angeht. Allerdings sagt HERMITE eigentlich nur, dass die wichtigsten Fragen der Mécanique céleste von dem Verfasser nach neuen und genialen Methoden *behandelt worden seien* — dies ist ja vollkommen richtig, aber ich glaube doch, dass eine klare Darlegung des wirklichen Inhalts der Schrift für den Leser lehrreicher und für den Verfasser mindestens ebenso ehrenvoll gewesen sein würde als HERMITE's enthusiastische Lobrede. Was ich in meinem vorläufigen Bericht gesagt habe, halte ich in allen Stücken aufrecht. Der Nachweis, dass die Bewegung eines Systems materieller Punkte bei gegebener Kräftefunction unter bestimmten Bedingungen eine periodische sein kann, und noch mehr die Entdeckung der asymtotischen Bewegungen, sind Leistungen von der höchsten Bedeutung und können ohne Uebertreibung als epochemachend bezeichnet werden. Dasselbe gilt von den am Schlusse der Arbeit angegebenen »Résultats négatifs», die ich für wahr halte, wenn mir auch die Beweiskraft der dafür angegebenen Gründe nicht überall einleuchtet. Was dagegen die Behandlung der Stabilitätsfrage anlangt, so habe ich ausser dem bereits angeführten noch allerlei zu erinnern. Nach des Verfassers — am Schlusse der Einleitung und im Anfang des ersten Kapitels gegebenen — Definition würde die Bewegung eines Systems materieller Punkte als eine stabile zu bezeichnen sein, wenn die Entfernung je zweier Punkte ständig (d. h. von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$) unter einer angebbaren Grenze bleibt. Im mathematischen Sinne ist dagegen nichts zu sagen, im physikalischen aber muss auch gefordert werden, dass sie nicht unendlich klein werden dürfe. Nun kann ich zwar beweisen, dass bei gewissen Anziehungsgesetzen, zu denen das NEWTON'sche gehört, ein Zusammentreffen zweier Punkte im Verlaufe einer *endlicher* Zeit nur unter ganz besondern Umständen, deren Eintreten unendlich wenig wahrscheinlich ist, stattfinden kann, so dass man diesen allerdings möglichen Fall füglich bei Seite lassen kann, dann aber sind die Coordinaten der einzelnen Punkte und die Entfernungen je zweier eindeutige und stetige analytische Functionen der Zeit t, welche in einem *endlichen* Zeitintervall weder unendlich gross noch unendlich klein werden können. Wenn aber die Zeit ohne Ende wächst, so wird jede der genannten Entfernungen entweder einer bestimmten Grenze (die auch unendlich gross oder gleich Null sein

kann) sich nähern oder in der Art schwanken, dass sie jeden zwischen zwei bestimmten Grenzen (von denen die obere auch unendlich gross und die untere auch gleich Null sein kann) [gelegenen Werth][1] unendlich oft annimmt. Ein gleiches gilt, wenn t der Grenze $-\infty$ sich nähert. Man sieht also, dass schon in einem System von nur wenigen Punkten eine grosse Zahl von einander wesentlich verschiedenen Bewegungsformen möglich sind, und untersucht werden muss, welche Formen wirklich statt finden können. In dem speciellen in der Preisschrift behandelten Falle des Dreikörper-Problems muss also, nach Feststellung der Bedingungen, unter denen die Abstände des massenlosen Punktes von den beiden andern beständig unter einer angebbaren Grenze bleibt, untersucht werden, ob nicht auch der Fall möglich sei, dass jener Punkt einem der anderen im Verlaufe der Zeit unendlich nahe komme oder in der Vergangenheit unendlich nahe gewesen sei. Es scheint mir, dass dies wirklich so sein könne. Ob man nun in einem solchen Falle die Bewegung eine stabile nennen wolle oder nicht, ist ziemlich gleichgültig; jedenfalls aber wäre dann die Bewegungform wesentlich eine andere als in dem Falle, wo jeder der genannten Abstände beständig zwischen zwei endlichen Grenzen bleibt. In der Preisschrift finde ich keinen Aufschluss über die angeregte Frage.

. . . . .

Ich muss für heute hiermit schliessen, hoffe aber nunmehr baldigst mit meinem Berichte fertig zu werden; den Hermite'schen habe ich von ihm noch nicht erhalten. Um jedem Missverständnisse zuvorzukommen, wiederhole ich aber

Ich schliesse mich dem Hermite'schen Bericht, wenn er nur für den König bestimmt ist, bedingungslos an. Dagegen muss ich aber die Bedingung stellen, dass, wenn wir uns nicht über einen gemeinschaftlichen Bericht für die Acta vereinigen können, der meinige unverändert abgedruckt werde, neben oder ohne den Hermite'schen. Beide Berichte widersprechen einander nicht, sind aber von verschiedener Färbung. Bei meinem Berichte habe ich übrigens noch einen anderen Zweck im Auge gehabt, worüber ich Ihnen in den nächsten Tagen schreibe.

. . .

Berlin, 2. 2. 89

. . . . .

Im Anschluss an meinen vorhergehenden Brief möchte ich Folgendes bemerken. Bei meinem Einwande, dass mir aus Poincaré's Darstellung nicht hervorzugehen scheine, dass der gestörte Planet einem der beiden anderen nicht

[1] Das Wort fehlt im Manuskript. (M. L.)

unendlich nahe kommen könne, hatte ich einen wesentlichen Punkt übersehen. In der Gleichung

$$\frac{1}{2a} + G + \mu F_1 = C$$

nimmt P. von vorn herein die Constante C positiv und erheblich grösser als $\frac{3}{2}$ an. Warum, ist nicht gehörig motivirt, sondern wird erst bei genauerem Studium klar — nämlich es lässt sich nur unter dieser Annahme der Stabilitätsbeweis auf dem von Poincaré eingeschlagenen Wege führen. Mir ist übrigens die Auseinandersetzung, die P. in der Note B giebt viel klarer erschienen als die des Textes. . . . . .

Soeben erhalte ich auch die Noten F, G zu der Poincaré'schen Abhandlung. Durch die Note G wird mir bestätigt, was ich angenommen hatte, dass P. wenn er von einer *eindeutigen analytischen* Function der bei einem dynamischen Problem vorkommenden Grössen spricht, darunter etwas Anderes versteht wie wir — die Function ist ihm eindeutig, wenn sie stets dieselbe Änderung erfährt, sowie man auch von einem System reeller Argumente derselben zu einem anderen reellen Systeme übergehen möge. Ich würde, um diesen Charakter der Function zu bezeichnen, mich anders ausdrücken, indess kommt wenig darauf an, nur möchte es gut sein, an der Stelle (in den résultats négatifs) wo zuerst von einer solchen Function die Rede ist, auf die Note G zu verweisen.

Nun hätte ich noch ein Desiderium, worüber ich selbst an P. schreiben werde.

P. behauptet, dass aus der Nichtexistenz mehrerer eindeutigen (analytischen) Integrale bei einem dynamischen Probleme nothwendig die Unmöglichkeit folge, das Problem durch Reihen von der Form

$$\sum C_{\nu\nu'\ldots} \frac{\cos}{\sin} (\nu a t + \nu' a' t + \cdots)$$

zu lösen. Diese Behauptung, die von fundamentaler Bedeutung ist, wird ohne Beweis ausgesprochen. Nun glaube ich zwar der Sache einigermassen auf den Grund zu sehen, bin aber doch nicht ganz sicher darin, und fürchte, dass es den meisten Lesern eben so gehen möge. Ich möchte daher sehr wünschen, dass P. seinen Gedankengang auch noch in einer Note darlege.

Die Nachricht von der Preisertheilung stand schon am 23:sten in einer hiesigen Zeitung. Wie sie in gewissen Kreisen aufgenommen worden ist, können Sie sich vorstellen. Erfährt nunmehr doch auch das grosse Publicum, welche Mathematiker der König in die Commission berufen hat — und welche nicht. Ich verschone Sie aber mit dem Klatsch, der bei dieser Gelegenheit aufgerührt wird.

Meinen Bericht werde ich bis Ende nächster Woche festgestellt haben. Was ihn mir schwer gemacht hat ist der Umstand, dass ich es für notwendig gefunden, die Stellung der Preisfrage, welche von verschiedenen Seiten her angefochten worden ist, zu rechtfertigen, ohne dass es aussieht als eine Abwehr von Angriffen. Sie werden den wenigen Zeilen, in denen ich dies versucht habe, schwerlich ansehen, welche Mühe sie mir gekostet — eine längere Abhandlung darüber zu schreiben wäre mir viel leichter gewesen. Ein Punkt namentlich hat mich gequält. Während einige Kritiker die Aufgabe überhaupt für unlösbar erklären, haben andere es getadelt, dass die Beschränkung — »unter der Annahme, dass niemals ein Zusammentreffen zweier Punkte stattfinde» hinzugefügt ist — denn dadurch sei ein wesentlicher Theil der Untersuchung bei Seite geschoben und die Stabilitätsfrage stillschweigend zur Hälfte als erledigt angenommen worden. Nun hatte ich jene Beschränkung mit Vorbedacht und aus guten Gründen gemacht. Ich hatte mir nämlich, was ich natürlich nicht ausdrücklich sagen durfte, einen Beweis dafür zurecht gelegt, dass *unter der Voraussetzung des* NEWTON'schen Gesetzes ein Zusammentreffen zweier Punkte in einem bestimmten Augenblicke nur unter ganz besonderen Umständen, deren Eintreffen unendlich wenig wahrscheinlich ist, erfolgen kann. Man kann also von diesem Falle füglich absehen. Dann aber werden die Coordinaten der sich bewegenden Punkte in der That eindeutige analytische [Functionen][1] der Zeit und es ist eine Entwicklung derselben in Reihen von der verlangten Form möglich.

Nun, diesen Beweis, der ziemlich complicirt ist, hatte ich vergessen, und beim Versuche, ihn wieder herzustellen, kam ich, wie es zu gehen pflegt, auf allerlei Bedenklichkeiten. Kurz, nur nach grosser Anstrengung ist es mir gelungen, wenigstens für ein System von drei Punkten das Behauptete strenge zu beweisen.

Der Beweis beruht auf Folgendem. Angenommen, in einem Systeme von n materiellen Punkten, die nach dem NEWTON'schen [Gesetze][1] einander anziehen, finde zur Zeit t_0 ein Zusammentreffen irgend zweier Punkte (nicht mehrerer) statt, so lassen sich, wenn t hinlänglich nahe bei t_0 angenommen wird, die Coordinaten sämmtlicher Punkte nach ganzen positiven Potenzen von

$$(t_0 - t)^{\frac{1}{3}}$$

entwickeln, die allgemeinsten Ausdrücke derselben enthalten dann nicht $6n$ sondern nur $6n-2$ willkürliche Constanten. Daraus folgt, dass wenn zur Zeit

[1] Das Wort fehlt im Manuskript. (M. L.

t_0 die Anfangswerthe der Coordinaten und ihrer ersten Ableitung nach Willkür angenommen werden, die Wahrscheinlichkeit eines Zusammentreffen zweier Punkte unendlich klein ist. Für $n = 3$ lässt sich ferner leicht zeigen, dass alle drei Punkte nur in dem Falle zusammentreffen können, wenn drei bei den Flächensätzen vorkommenden Integrationsconstanten verschwinden. Es scheint mir daher unbedenklich den in Rede stehenden Satz als allgemein gültig hinzustellen.

Es ist aber wohl zu bemerken, dass durch diesen Satz nicht die Möglichkeit ausgeschlossen ist, dass nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit zwei Punkte — ohne zusammenzutreffen — einander unendlich nahe kommen. Wie die Sache sich aber wirklich verhält, habe ich nicht ermitteln können.

. . . .

Berlin, 6. März 89.

. . . . .

Endlich bin ich, nach abermaliger, nicht zu vermeidender Unterbrechung, mit dem versprochenen Brief fertig geworden. Ich kann ihn aber erst morgen früh absenden, da ich ihn doch muss einschreiben lassen, wozu es mir heute zu spät geworden ist. Zu meinem Schrecken sah ich erst heute Morgen, dass ich mich im Datum geirrt und den *neunten* auf Montag verlegt hatte. Sie erhalten den Bericht druckfertig, aber in der definitiven Abfassung sehr abgekürzt gegen meinen ersten Entwurf. Ich habe mich hauptsächlich über Bedeutung und Zweck der Preisfrage ausgesprochen. Was ich über die gekrönte Preisschrift gesagt, stimmt im Wesentlichen überein mit dem in meinem vorläufigen Bericht enthaltenen.

. . . . .

Berlin, 6. 3. 89 Abends.

. . . . .

Ich habe mich nun doch entschlossen, das Beiliegende noch spät Abends uneingeschrieben abgehen zu lassen, damit es Freitag Mittag in Ihre Hände gelange. Noch ist ja keiner meiner Briefe an Sie verloren gegangen. Was noch fehlt, schicke ich morgen nach; Sie können sich aber jedenfalls mit meinem früheren Bericht helfen, der sich dem Inhalte nach nicht wesentlich von dem, was auf den folgenden Seiten gesagt wird, unterscheidet.

. . . . .

Berlin, 3. 4. 89.

. . . . .

Ein rechter Unstern hat über der Abfassung des versprochenen Berichts gewaltet, und ich kann mir lebhaft vorstellen, wie ungehalten Sie darüber sind, dass die Sache so lange sich hingezögert hat. Indessen hören Sie, wie es mir ergangen ist. Schon wenige Tage nach der Abreise der Frau KOWALEVSKY von hier stellte sich wieder, wie im vergangenen Jahr, ein heftiger Bronchialkatarrh bei mir ein, an dem ich bis nach Weihnachten gelitten habe. Dann befand ich mich eine Zeitlang besser, so dass ich in den ersten Tagen des Januars eine kleine Vorlesung beginnen konnte, ich hatte dringende Gründe, nicht das ganze Semester hindurch unthätig zu sein. Aber noch an demselben Abend, als ich die erste Hälfte meines Berichts — der im Concept fertig war — an Sie abschickte, überfiel mich ein ernstliches Unwohlsein, an dessen Folgen ich noch immer leide. Indessen hätte ich die Abschrift doch wohl schon in der vergangenen Woche fertig stellen können, wäre nicht ein Umstand eingetreten, der mir die Nothwendigkeit auferlegte, dem Berichte insofern eine andere Fassung zu geben, dass ich den Inhalt der Preisschrift eingehender, als es ursprünglich geschehen, und ohne den Gebrauch analytischer Formeln zu vermeiden, darstellen, und so dem kundigen Leser eine Vorstellung von der Bedeutung der POINCARÉ'schen Arbeit beizubringen versuchen muss.

Um ihnen dies zu erklären, muss ich Ihnen zunächst sagen, dass Ihr an den Secretär der Pariser-Akademie gerichteter Brief vom 18 Febr. hier viel böses Blut gemacht hat und dass man für alles, was man daran auszusetzen hat, merkwürdigerweise nicht etwa Sie, sondern *mich* verantwortlich macht. Sie sagen zwar ausdrücklich, dass Sie den Brief im Auftrage des Königs geschrieben haben und dieser Umstand ist für jeden nicht Böswilligen ein hinlänglicher Beweis dafür, dass ich in keinerlei Weise an dem Brief direct betheiligt gewesen sei — aber man besteht darauf, dass dem Inhalte desselben doch meine Beurtheilung der g. Preisschrift zu Grunde liegen müsse. Nun sind es besonders zwei Stellen, gegen die sich namentlich unser kleiner Freund heftig ausgelassen hat — hinter meinem Rücken natürlich. Zuerst die Phrase: »comptera parmi les plus importantes productions mathématiques du siècle». Das sei unbedingt zu viel gesagt. Aber wer vermag dies zu beurtheilen, ohne die Schrift gelesen zu haben? Es kommt alles darauf an, wie weit man die Grenzen der wichtigsten Productionen des Jahrhunderts zieht. In meinem Berichte kommt indessen nichts dergleichen vor — ich begnüge mich, die P.'sche Abhandlung als eine Arbeit von ungewöhnlicher Bedeutung zu bezeichnen und diese meine Ansicht gedenke ich in jeder Beziehung aufrecht zu halten. Sodann findet man es in hohen Grade unpassend, dass Sie

den Secretar deswegen beglückwünschen, dass die beiden Preisgekrönten Franzosen seien. Gewiss würde es unpassend gewesen sein, wenn *ich* in einem officiellen oder privaten Schreiben dies gesagt hätte, oder wenn Sie es mit meiner Billigung geschrieben — aber, wie die Sachen liegen, kann ich doch in keiner Weise verantwortlich gemacht werden für ein Kompliment, das Sie — vielleicht im Auftrage des Königs — dem Secretar machen, der bei der von Ihnen angeführten Gelegenheit die Ausschreibung der Preisfragen so sympatisch begrüsst hat, während Andere sich von vorn herein abfällig darüber ausgesprochen haben.

Ich habe mich übrigens darauf beschränkt, Freund und Feind auf meine demnächst zu veröffentlichende Beurtheilung der Preisschrift zu verweisen, mit dem Bemerken, dass ich für jedes darin stehende Wort, aber auch für nichts anderes, die volle Verantwortlichkeit übernehme. Das Vorstehende bitte ich als eine nur für Sie bestimmte Mittheilung zu betrachten. Sie werden aber daraus entnehmen, dass mein Bericht ein durchaus sachlicher sein muss und so weit dies überhaupt möglich ist — den wesentlichen Inhalt der Preisschrift wieder zu geben hat. Ich habe zu dem Ende die Abhandlung selbst und sämmtlich dazu gehörigen Noten — für deren Zusendung ich Ihnen sehr dankbar bin — noch einmal durchstudirt und bin heute damit fertig geworden. Die geometrische Form, unter der P. viele seiner wichtigsten Resultate darstellt, gestattet keine kurze Relation; aber es ist mir jetzt leicht, alles analytisch in leicht verständlicher Weise auszudrücken, so dass es mir nun nicht schwer fallen wird, meinen Zweck in einer Weise, gegen die auch P. nichts einzuwenden haben wird, zu erreichen. Bleibe ich nur 2—3 Tage leidlich wohl, so dass mir das Schreiben nicht zu grosse Mühe macht, so hoffe ich in dieser Zeit fertig zu werden — auch zu meiner eigenen Befriedigung.[1]

Manuskript von Weierstrass.

Es seien gegeben die folgenden n Differentialgleichungen, in denen t eine reelle Veränderliche, $x_1, \ldots x_n$ zu bestimmende Functionen derselben und $G_1(x_1, \ldots x_n)$, $G_n(x_1, \ldots x_n)$, ganze rationale Functionen von $x_1, \ldots x_n$ bedeuten:

$$\text{I)} \qquad \frac{dx_1}{dt} = G_1(x_1, \ldots x_n), \ldots \frac{dx_n}{dt} = G_n(x_1, \ldots x_n).$$

Die Coefficienten von $G_1, \ldots G_n$ sollen reelle Grössen sein: wenn dann festgestellt wird, dass für einen bestimmten reellen Werth t_0 von t die Grössen

[1] Weierstrass' Krankheit hat ihm nie erlaubt den Bericht fertig zu stellen (M. L.).

$x_1, \ldots x_n$ *vorgeschriebene* reelle Werthe $x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}$ erhalten sollen, so existirt für alle Werthe von t innerhalb eines bestimmten, die Grösse t_0 enthaltenden Intervalls

$$T_1 \ldots T_2$$

ein System von n reellen und *regulären* Functionen

$$\varphi_1(t), \ldots \varphi_n(t)$$

welche für $x_1, \ldots x_n$ gesetzt die vorstehenden Differentialgleichungen befriedigen und zugleich für $t = t_0$ die angegebenen Werthe annehmen.

Die Grenzen des genannten Intervalls (von denen T_1 auch gleich $-\infty$, $T_2 = +\infty$ sein kann) sind dadurch bestimmt, dass, wenn die Veränderliche stetig wachsend oder stetig abnehmend sich einer von ihnen unendlich nähert, wenigstens eine der Grössen $x_1, \ldots x_n$ unendlich gross wird.

Dies vorausgeschickt, führe man an Stelle der n Veränderlichen $x_1, \ldots x_n$ $n+1$ andere $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ ein mittels der Gleichungen

$$\text{2)} \qquad \xi_\lambda = \frac{2x_\lambda}{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \quad (\lambda = 1, \ldots n)$$

$$\text{3)} \qquad \xi_0 = \frac{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Dann hat man

$$\text{4)} \qquad \xi_0^2 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1,$$

$$\text{5)} \qquad \xi_\lambda = (1 + \xi_0) x_\lambda.$$

Ferner

$$\frac{d\xi_0}{dt} = -\frac{4\left(x_1 \frac{dx_1}{dt} + \ldots\right)}{(1 + x_1^2 + \ldots)^2} = -(1+\xi_0)^2\left(x_1 \frac{dx_1}{dt} + \ldots\right) = -(1+\xi_0)\left(\xi_1 \frac{dx_1}{dt} + \ldots\right)$$

also

$$\text{6)} \quad \frac{d\xi_0}{dt} = -(1+\xi_0)\sum_1^n{}_\lambda\, \xi_\lambda G_\lambda(x_1, \ldots x_n) = -(1+\xi_0)\sum_1^n{}_\lambda\, \xi_\lambda G_\lambda\left(\frac{\xi_1}{1+\xi_0}, \ldots \frac{\xi_n}{1+\xi_0}\right),$$

$$\text{7)} \quad \frac{d\xi_\mu}{dt} = (1+\xi_0) G_\mu\left(\frac{\xi_1}{1+\xi_0}, \ldots \frac{\xi_n}{1+\xi_0}\right) - \xi_\mu \sum{}_\lambda G_\lambda\left(\frac{\xi_1}{1+\xi_0}, \ldots \frac{\xi_n}{1+\xi_0}\right)\xi_\lambda \; (\mu = 1, \ldots n)$$

Die Gleichungen (6, 7) kann man nun auf die Form bringen:

8) $$\frac{d\xi_\lambda}{dt} = (1+\xi_0)^{-m} G_\lambda(\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n), \quad (\lambda = 0, 1, \ldots n)$$

wo m eine ganze positive Zahl und $G_0, G_1, \ldots G_n$ ganze rationale Functionen von $\xi_0, \ldots \xi_n$, die nicht sämmtlich durch $1 + \xi_0$ theilbar sind, bedeuten.

Führt man nun noch eine neue Veränderliche u ein mittels der Gleichung

9) $$dt = (1+\xi_0)^m du$$

so genügen die Functionen von u, in welche $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ dadurch übergehen, den Differentialgleichungen

10) $$\frac{d\xi_\lambda}{du} = G_\lambda(\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n) \quad (\lambda = 0, 1, \ldots n).$$

Setzt man fest, dass $u = 0$ sein solle für $t = t_0$, so folgt aus (9)

11) $$t - t_0 = \int_0^u (1+\xi_0)^m du.$$

Geht man umgekehrt aus von den Gleichungen (10, 11), so hat man, wenn zunächst keine Relation unter den Veränderlichen $\xi_0, \ldots \xi_n$ angenommen und $G_\lambda\left(\frac{\xi_1}{1+\xi_0}, \ldots \frac{\xi_n}{1+\xi_0}\right)$ mit $\overline{G}_\lambda$ bezeichnet wird

10, a) $$\frac{d\xi_0}{dt} = -(1+\xi_0)\sum_{\lambda=1}^{n} \xi_\lambda \overline{G}_\lambda$$
$$\frac{d\xi_\mu}{dt} = (1+\xi_0)\overline{G}_\mu - \xi_\mu \sum_{\lambda=1}^{n} \xi_\lambda \overline{G}_\lambda \quad (\mu = 1, \ldots n).$$

Daraus folgt, wenn $s = \sum_{\lambda=0}^{n} \xi_\lambda^2$, $\sum_{\lambda=1}^{n} \xi_\lambda \overline{G}_\lambda = S$ gesetzt wird

$$\frac{ds}{dt} = -2(1+\xi_0)\xi_0 S + 2(1+\xi_0)S - 2(s - \xi_0^2)S$$
$$= 2(1-s)S$$

12) $$s - 1 = \text{Const.}\, e^{-2\int_0 S dt}.$$

Werden also die (reellen) Werthe, welche $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ für $u = 0$ annehmen sollen, so gewählt, dass für sie $s = 1$ ist, so ergiebt sich

$$\text{Const.} = 0$$

und man hat daher für jeden Werth von u

13) $$\sum_{\lambda=0}^{n} \xi_\lambda^2 = 1.$$

Da alsdann keine der Grössen $\xi_0, \dots \xi_n$ ihrem absoluten Betrag nach grösser als 1 werden kann, so existirt *ein* die Differentialgleichungen (10) befriedigendes System regulärer und reeller Functionen

14) $$\xi_0 = \psi_0(u), \dots \xi_n = \psi_n(u)$$

deren Argument jeden beliebigen reellen Werth annehmen kann. Setzt man dann

15) $$t - t_0 = \int_0^u (1 + \xi_0)^m du$$

so wird t eine reelle Function von u, welche beständig wächst, wenn u beständig wachsend das Interwall

$$-\infty \dots + \infty$$

durchläuft. Dieselbe nähert sich daher, wenn u beziehlich den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ unendlich nahe kommt, zwei bestimmten Grenzen T_1, T_2, zwischen denen die Constante t_0 liegt, und es ist u eine Function von t, welche stetig wachsend von $-\infty$ zu $+\infty$ übergeht, wenn t stetig wachsend das Interwall $T_1 \dots T_2$ durchläuft.

Setzt man dann

16) $$x_\lambda = \frac{\xi_\lambda}{1 + \xi_0}, \quad \lambda = 1, \dots n$$

unter der Voraussetzung, es seien die Werthe, welche $\xi_0, \dots \xi_n$ für $t = t_0$ annehmen, so gewählt, dass für diesen Werth von t die Gleichungen (16) bestehen, so sind $x_1, \dots x_n$ die den Differentialgleichungen (1) unter den festgestellten Bedingungen genügenden Functionen von t.

Erster Teil des Berichts von Weierstrass über die Poincaré'sche Preisarbeit.

Von den ausgeschriebenen vier Preisfragen hat nur die erste Bearbeiter gefunden. Dieselbe war gestellt worden in der Hoffnung, dass sie sich mit den gegenwärtig uns zu Gebote stehenden Hülfsmitteln werde erledigen lassen. Diese Hoffnung gründete sich auf folgende Erwägungen.

In einem frei sich bewegenden Systeme materieller Punkte, welche einander nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, kann sich kein Punkt im Verlaufe einer endlichen Zeit unendlich weit von dem Schwerpunkte entfernen. Dagegen ist es möglich, dass der Abstand zweier Punkte unendlich klein werde, wenn sich die Zeit einer bestimmten endlichen (positiven oder negativen) Grenze nähert. Es lässt sich jedoch zeigen, dass dies ein Ausnahmefall ist, der nur unter ganz besonderen Umständen eintreten und daher füglich unberücksichtigt bleiben kann. Unter dieser Voraussetzung sind aber die Coordinaten der einzelnen Punkte, wie sich aus bekannten functionentheoretischen Sätzen ergiebt, während eines Zeitraums von unbegrenzter Dauer eindeutige und stetige analytische Functionen der Zeit; und solche Functionen können stets, und zwar auf mannigfaltige Weise in Reihen von der in der Preisfrage geforderten Beschaffenheit dargestellt werden. Es stand also fest, dass die Lösung des vorgelegten Problems möglich sei. Dass sie aber auch ausführbar sein werde, liess sich freilich nicht a priori annehmen. Indessen konnte selbstverständlich nicht die vollständige Entwickelung der Reihen, um die es sich handelt, sondern nur die Auffindung und Beschreibung eines zur successiven Bildung ihrer Glieder dienenden Verfahrens verlangt werden, und dass dies keine die Kräfte der Analysis übersteigende Aufgabe sei, dafür sprach — wie in den der Preisfrage beigegebenen Erläuterungen hervorgehoben worden ist — was wir von den auf die Integration der dynamischen Differentialgleichungen sich beziehenden Untersuchungen Dirichlet's wissen. Denn so unvollständig dies leider auch ist, soviel geht doch jedenfalls daraus hervor, dass sich mittels der von Dirichlet erdachten Methode, wenn wir im Besitze derselben wären, für jede der zu entwickelnden Functionen ein angenäherter Ausdruck in der Art müsste herstellen lassen, dass der Unterschied zwischen ihm und der Function in einem festgesetzten, beliebig langen Zeitintervall eine vorgeschriebene, beliebig klein anzunehmende Grenze nicht überschritte.

Dann aber würde man auch im Stande sein, die Function durch eine unbedingte und gleichmässig konvergierende Reihe darzustellen, also das vorgelegte Problem in der vorgeschriebenen Form zu lösen.

Indessen machen sich, wenn aus der Lösung des Problems für unsere Einsicht in die wahre Natur der Bewegungen der Himmelskörper eine wesentliche Förderung erwachsen soll, noch andere, jedenfalls nicht leicht zu erfüllende Forderungen geltend. Unter der im Vorstehenden angegebenen Voraussetzung ist die Bewegung des betrachteten Systems von ewiger Dauer, und es kann der Abstand je zweier Punkte im Verlaufe einer *endlichen* Zeit weder unendlich gross noch unendlich klein werden.

Soll dies aber auch für einen unendlich langen Zeitraum gelten, so müssen

Bedingungen erfüllt sein, welche sich bisher noch nicht genügend haben feststellen lassen, deren Erforschung aber stets als eine der wichtigsten Aufgaben der Mechanik des Himmels betrachtet worden ist und darum auch von jedem Bearbeiter der Preisfrage als nächster Gegenstand der Untersuchung hätte in's Auge gefasst werden müssen. Wenn auch nicht zu erwarten, dass die schwierige Frage sich vollständig werde erledigen lassen, so durfte man doch hoffen, dass man wenigstens in Betreff der Stabilität unseres Planetensystems zu einem sichern Resultate gelangen werden. In Bezug auf den dabei einzuschlagenden Weg liess sich im voraus auch nicht einmal eine Vermuthung aussprechen. Möglicherweise könnte man zum Ziele kommen, wenn man, die Stabilität des Systems *voraussetzend*, die zu entwickelnden Functionen durch Reihen, in denen jedes Glied eine beständig endlich bleibende und stetige Function der Zeit sein müsste, darzustellen versuchte, und, wenn dies gelänge, die Convergenz der Reihen zu beweisen im Stande wäre. In der That haben namhafte Astronomen und Mathematiker in neuer Zeit diesen Gedanken verfolgt und sind zu dem Ergebnisse gekommen, dass die auf dem Schwerpunkt der Sonne bezogenen Coordinaten der Planeten oder auch die veränderlichen Bahnelemente derselben durch Reihen von der Form

$$\sum_{(\nu_1, \nu_2, \ldots)} \{C_{\nu_1 \nu_2 \ldots} \sin (c_0 + \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \cdots) t\} \qquad \nu_1, \nu_2, \ldots \text{ ganze (positive oder negative) Zahlen}$$

darstellbar seien, wo t die Zeit, und $c_1, c_2, \ldots, C_{\nu_1 \nu_2 \ldots}$ von t unabhängige Grössen bedeuten.

Indessen konnte nur nachgewiesen werden, dass den Differentialgleichungen der Bewegung in dem betrachteten Falle unter gewissen Voraussetzungen durch Reihen von der angegebenen Form *formell* genügt werden kann; ob aber diese Reihen convergent und die wahren Ausdrücke der darzustellenden Grössen seien, war zur Zeit, als die Preisaufgabe ausgeschrieben wurde, eine unerledigte Frage, auf die notwendig eingegangen werden musste.

In dem Vorstehenden habe ich die Gesichtspunkte angedeutet, welche bei der Prüfung der eingegangenen, unter N:r 7, 9, 10 verzeichneten Concurrenzschriften für mich massgebend gewesen sind.

EINE BEMERKUNG ZUR MITTAG-LEFFLER'SCHEN APPROXIMATION EINER BELIEBIGEN ANALYTISCHEN FUNKTION INNERHALB DES STERNGEBIETES.

(Auszug aus einem Briefe des Verfassers an Herrn Prof. MITTAG-LEFFLER.)

Von

LEOPOLD FEJÉR

in KOLOZSVÁR.

. . . Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

eine beliebige Potenzreihe, deren Konvergenzradius von Null verschieden ist. Herr Professor haben bewiesen, dass man auf unendlich-vieler Weise eine Folge

$$F_0(x),\ F_1(x),\ \ldots,\ F_n(x),\ \ldots \tag{2}$$

aufstellen kann, deren Glieder ganze transcendente (oder auch ganze rationale) Funktionen von x sind, so dass innerhalb des Sterngebietes, welches zur Stelle $x = 0$ und zur Funktion $f(x)$ gehört,

$$\lim_{n=\infty} F_n(x) = f(x), \tag{3}$$

wobei die Konvergenz gleichmässig ist innerhalb jedes Gebietes, das vollständig im Innern des Sterngebietes liegt. Die Potenzreihe von $F_n(x)$ entsteht aus der Potenzreihe (1) von $f(x)$ dadurch, dass die Glieder von (1) durch absoluten Konstanten multipliziert werden. $f(x)$ bedeutet an der rechten Seite von (3) die unmittelbare analytische Fortsetzung von (1) in das Sterngebiet hinein.

Man bekommt z. B. nach Herrn LINDELÖF eine solche Folge (2), wenn man in

$$F(\alpha, x) = a_0 + \frac{a_1}{1^{\alpha.1}} x + \frac{a_2}{2^{\alpha.2}} x^2 + \cdots + \frac{a_\nu}{\nu^{\alpha.\nu}} x^\nu + \cdots, \tag{4}$$

$$(\alpha > 0)$$

für α, der Reihe nach, die Glieder einer Folge

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots \tag{5}$$

einsetzt, deren Glieder alle positiv sind und mit wachsendem n zu Null konvergieren. (E. Lindelöf, Le Calcul des Résidus, 1905, Chapitre V.)

Man betrachte nun die Summe der ersten $(n+1)$ Glieder der Reihe (1), und der Reihe (4):

$$s_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

$$\sigma_n(\alpha, x) = a_0 + \frac{a_1}{1^{\alpha.1}} x + \cdots + \frac{a^n}{n^{\alpha.n}} x^n,$$

$$(\alpha > 0).$$

Man bilde ihre Differenz

$$s_n(x) - \sigma_n(\alpha, x) = a_2 \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha.2}}\right) x^2 + \cdots + a_n \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha.n}}\right) x^n.$$

Ich will zunächst den absoluten Betrag dieser Differenz abschätzen, wenn $|x| \leq R$, wo R eine beliebige positive Grösse bedeutet.

Es sei ϱ eine positive Zahl, die kleiner ist als der Konvergenzradius der Reihe (1) (und auch kleiner ist als R). Es sei weiter $|f(x)| \leq M$, wenn $|x| = \varrho$. Dann ist

$$|a_\nu| \leq \frac{M}{\varrho^\nu},$$

$$(\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Weiter ist, bekanntlich,

$$1 - e^{-\sigma} < \sigma,$$

wenn σ eine beliebige positive Zahl bedeutet. Also ist

$$1 - \frac{1}{\nu^{\alpha.\nu}} = 1 - e^{-\alpha\nu\log\nu} < \alpha\nu\log\nu,$$

$$(\nu = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$$

Ich erhalte daher

$$|s_n(x) - \sigma_n(\alpha, x)| < \frac{M}{\varrho^2} \cdot \alpha \cdot 2 \log 2 \cdot R^2 + \cdots + \frac{M}{\varrho^n} \cdot \alpha \cdot n \log n \cdot R^n < \alpha M n^2 \log n \cdot \left(\frac{R}{\varrho}\right)^n,$$

$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Es sei nun z. B.

$$\alpha = \alpha_n = \frac{1}{n!}, \tag{7}$$

$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Dann ist

$$|s_n(x) - \sigma_n(\alpha_n, x)| < \frac{M n^2 \log n \cdot \left(\frac{R}{\varrho}\right)^n}{n!},$$

und daher

$$\lim_{n=\infty} (s_n(x) - \sigma_n(\alpha_n, x)) = 0, \tag{8}$$

und zwar gleichmässig in *jedem* Kreise

$$|x| \leqq R.$$

Dies vorausgeschickt betrachte ich nun die Folge von ganzen transcendenten Funktionen $F(\alpha_n, x)$, wo

$$\alpha_n = \frac{1}{n!},$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Es ist

$$F(\alpha_n, x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{\frac{\nu}{n!}}} x^\nu - (s_n(x) - \sigma_n(\alpha_n, x)).$$

Wenn ich nun Gleichung (8) berücksichtige, so erhalte ich den Satz:
Die Folge von ganzen transcendenten Funktionen

$$\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x), \ldots, \tag{9}$$

wo

$$\Phi_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{\frac{\nu}{n!}}} x^\nu,$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

konvergiert zu $f(x)$ innerhalb des Sterngebietes (u. z. gleichmässig innerhalb je-

des Gebietes, das vollständig im Innern des Sterngebietes liegt). *Die approximierenden ganzen transcendenten Funktionen $\Phi_n(x)$ haben hier die Spezialität, dass die ersten $(n+1)$ Koeffizienten der Potenzreihe von $\Phi_n(x)$ mit den ersten $(n+1)$ Koeffizienten der Potenzreihe von $f(x)$ resp. gleich sind.*[1]

Es ist übrigens klar, dass man mit Hilfe einer beliebigen MITTAG-LEFFLERschen Folge (2) eine Folge mit dieser Spezialität herstellen kann. Mann bedenke nur, dass aus (3) die Gleichungen

$$\lim_{n=\infty} F_n(0) = f(0),$$

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{d^\nu F_n(x)}{dx^\nu}\right]_{x=0} = \left[\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu}\right]_{x=0},$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

folgen.

Mit Anwendung der Folge (9) erhalte ich, im Innern des Sterngebietes, für $f(x)$ die Reihenentwickelung

$$f(x) = \Phi_0(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\Phi_{\nu+1}(x) - \Phi_\nu(x)). \tag{10}$$

[1] Ich habe schon in meiner ersten Note in Acta mathematica (Tome 23 pag. 60) eine Funktion hergestellt, welche die obengenannte Eigenschaft besitzt, nämlich die Funktion:

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^2}\sum_{\lambda_2=0}^{n^4}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(0)\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}.$$

Weil:

$$\sum_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\lambda} \frac{\underline{|\lambda}}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^\lambda = 1$$

bekommt man unmittelbar:

$$g_n(x) = F(0) + \frac{F'(0)}{\underline{|1}}x + \cdots + \frac{F^{(n^2)}(0)}{\underline{|n}}x^{n^2} + x^{n^2+1}G(x)$$

wo $G(x)$ ein Polynom in x vom Grade $n^4+\cdots+n^{2n}-1 = (n^{2n}-n^2)\frac{n^2}{n^2-1}-1$ bezeichnet.

Meine Funktion $g_n(x)$ hat also dieselben karakteristischen Eigenschaften die Herr FEJÉR für die Funktion $\Phi_{n^2}(x)$ erhält. Sie ist insofern einfacher als die FEJÉR'sche dass ihre Herleitung mehr elementar ist als die Herleitung des LINDELÖF'schen Satzes, welchen Herr FEJÉR zur Herstellung seiner Funktion braucht.

Wie Herr FEJÉR richtig angiebt können übrigens alle meine verschiedene Darstellungsformeln so modifizirt werden, dass sie die von Ihm angegebene karakteristische Eigenschaft erhalten. (M. L.)

Hier hat das allgemeine Glied der Reihe die Potenzreihenentwickelung

$$\Phi_n(x) - \Phi_{n-1}(x) = a_n \left(1 - \frac{1}{\frac{n}{n^{(n-1)!}}} \right) x^n + \cdots,$$

hat also, wenn $a_n \neq 0$, (für $n = 2, 3, 4, \ldots$) *an der Stelle* $x = 0$ *genau eine* n*-fache Nullstelle.*

Herr Kürschák teilte mir in einem Briefe seine Vermuthung über die Existenz einer solchen Reihenentwickelung (10) mit, und wünschte einen Beweis für diese Existenz. Er kam zu der Frage nach einer solchen Entwickelung, indem er ein funktionentheoretisches Analogon eines zahlentheoretischen Satzes von Herrn Hensel (Theorie der algebraischen Zahlen, 1908, Bd. I, pag. 41—43) aufzustellen versuchte. Dies gab mir die Veranlassung zur Konstruktion der Folge (9) — eine anspruchslose Bemerkung zu Ihrem wichtigen Theorem.

Ich bleibe hochachtungsvoll

Ihr ergebenster

Leopold Fejér.

SUR LA REPRESENTATION DES FONCTIONS MÉROMORPHES.

Par

A. BUHL

A TOULOUSE.

Le présent Mémoire est une contribution à l'étude du prolongement analytique. Les résultats fondamentaux dont je m'inspire sont ceux de M. G. MITTAG-LEFFLER dont on connaît les magnifiques travaux publiés ici même de 1898 à 1904.

J'ai eu en vue des méthodes beaucoup plus élémentaires que celles de M. MITTAG-LEFFLER. J'ai remarqué que si l'on cherchait à résoudre le problème du prolongement analytique pour les fonctions méromorphes — les plus simples pour lesquelles il se pose — on pouvait parvenir aux séries de polynômes dont le premier type est dû à M. BOREL, sans intervention du calcul intégral. De plus, l'usage de certaines fonctions sommatrices pourvues de zéros, telles la fonction σ, conduit à des résultats d'un caractère aussi étrange qu'intéressant. Il n'est nullement prouvé que ces résultats puissent s'étendre à des fonctions non méromorphes mais, même dans ce cas, la limitation serait remarquable, car elle constituerait alors de nouvelles propriétés particulières aux fonctions méromorphes. Ces premiers points constituent le Chapitre I.

Dans le Chapitre II j'essaie d'introduire la variable x dans les coefficients c_n des polynômes s_n et j'arrive à traiter complètement un cas particulier très élégant.

Dans le Chapitre III je retrouve rapidement l'une des intégrales curvilignes de M. MITTAG-LEFFLER; je montre que, dans le cas d'une fonction méromorphe, elle donne des résultats coïncidant pleinement avec ceux obtenus directement au Chapitre I et j'indique d'autres généralisations possibles de la formule fondamentale de ce Chapitre.

I. Séries de polynômes et séries de fractions rationnelles.[1]

1. L'origine étant un point régulier, supposons que nous connaissions les pôles d'une fonction méromorphe, les parties principales correspondantes et le développement taylorien valable dans le voisinage de l'origine. Je me propose de développer cette fonction en une série de polynômes augmentée d'une série de fractions rationnelles, ces deux séries pouvant converger dans tout le plan *et dépendant d'une fonction entière arbitraire*. Je me propose de montrer aussi que si, des connaissances précédentes, on retranche celle des parties principales on peut s'arranger à ne conserver que la série de polynômes qui n'en est pas moins propre à représenter la fonction méromorphe donnée.

Soient $F(x)$ la fonction méromorphe et $a_1, a_2, \ldots$ ses pôles rangés par ordre de modules croissants. Je suppose d'abord que ces pôles sont simples si bien que les parties principales correspondantes seront connues si l'on sait que a_i a pour résidu A_i. Soit un cercle C_k ayant l'origine pour centre et dont la circonférence passe entre a_k et a_{k+1}. Pour x dans ce cercle on aura

$$F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i}{x - a_i} + a_{k0} + a_{k1}x + a_{k2}x^2 + \cdots \tag{1}$$

Si $F(x)$ se réduit à une fraction rationnelle *dont le degré du numérateur ne surpasse pas celui du dénominateur*[2] on peut supposer que le cercle C comprend tous les pôles et alors la série entière de (1) se réduit à son premier terme a_{k0} et peut même disparaître totalement si le degré du numérateur est inférieur d'une unité à celui du dénominateur. Quant au développement de $F(x)$ valable à l'origine et dans le voisinage on peut l'écrire

$$F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} A_i \left(-\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \cdots \right) + a_{k0} + a_{k1}x + \cdots \tag{2}$$

et je désignerai par s_n la somme des $n+1$ premiers termes de ce développement. Donc s_n est le polynôme de degré n qui commence le développement taylorien précédent; je dirai que c'est un *polynôme taylorien*.

La formule (1) peut encore s'écrire

[1] Le titre choisi pour ce Chapitre rappelle intentionnellement celui d'un important Mémoire de M. E. Borel publié dans ce Recueil (T. 24, 1901) mais les points de vue sont différents. J'étudie ici une forme de développement particulière et peut-être spécialement remarquable à cause de son élégance.

[2] Dans mes publications précédentes cette hypothèse était faite implicitement toutes les fois qu'il s'agissait de fractions rationnelles

$$(2') \quad \begin{cases} F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} A_i \left[-\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \cdots - \frac{x^n}{a_i^{n+1}} + \frac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)} \right] \\ + (a_{k0} + a_{k1} x + \cdots + a_{kn} x^n) + a_{k,n+1} x^{n+1} + \cdots \end{cases}$$

ou

$$(3) \qquad F(x) = s_n + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)} + a_{k,n+1} x^{n+1} + a_{k,n+2} x^{n+2} +$$

Soit maintenant

$$f(\xi) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \cdots$$

une fonction *entière*. Je pose $c_n = \gamma_n \xi^n$ et aussi

$$\varphi_p(\xi) = f(\xi) - c_0 - c_1 - \cdots - c_{p-1} = \gamma_p \xi^p + \gamma_{p+1} \xi^{p+1} + \cdots$$

Si alors on multiplie tous les termes de la formule (3) par c_{n+p} et que l'on somme de $n = 0$ à $n = \infty$ il vient

$$(A) \quad \begin{cases} F(x)\varphi_p(\xi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p} s_n + \sum_{i=1}^{i=k} \varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) \left(\frac{a_i}{x}\right)^{p-1} \frac{A_i}{x-a_i} \\ \qquad + \sum_{n=0}^{n=\infty} (\gamma_p \xi^p + \cdots + \gamma_{p+n} \xi^{p+n}) a_{k,n+1} x^{n+1}. \end{cases}$$

J'ai donné cette formule, pour $p = 0$, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (T. IV, 6me série, 1908). On comprendra dans la suite pourquoi j'ai introduit ici l'indice p qui permet de déplacer les coefficients c par rapport aux sommes s; d'ailleurs la formule précédente n'a pas le maximum de simplicité pour $p = 0$ mais pour $p = 1$. Cette formule résulte aussi de la transformation de certaines intégrales étudiées par M. Mittag-Leffler puis par moi mais je reviendrai sur ce point dans le Chapitre III du présent travail. Il reste à la généraliser pour le cas où $F(x)$ présente non pas seulement des pôles simples mais des pôles d'ordre quelconque. Mais, avant d'en arriver là, je préfère montrer quelles sont ses propriétés essentielles.

2. Divisons par $\varphi_p(\xi)$ tous les termes de la formule (A). Etudions d'abord l'expression

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\gamma_p \xi^p + \cdots + \gamma_{p+n} \xi^{p+n}}{\varphi_p(\xi)} a_{k,n+1} x^{n+1}.$$

Il est toujours entendu que x est dans le cercle C_k et, par suite, la série dont le terme général est $a_{kn} x^n$ est convergente. Faisons maintenant cette *hypothèse*

fondamentale que la variable ξ aille à l'infini suivant un chemin tel que $|f(\xi)|$ croisse indéfiniment et d'ailleurs plus vite que n'importe quel polynôme. Dans ces conditions l'expression (4) tend vers zéro. En effet, dans la série (4), on peut mettre à part les q premiers termes, q étant fini, et ceux-ci tendent manifestement vers zéro; pour les termes restant, qui sont en nombre infini, le coefficient en ξ peut tendre vers 1 mais alors, si q est suffisamment grand, la convergence de la série en x entraîne que ces termes ont aussi une somme qui peut devenir plus petite en module que toute quantité donnée.

Nous admettrons toujours qu'il existe un chemin allant à l'infini suivant lequel une fonction entière croît en module plus vite qu'un polynôme. Si un tel chemin n'existait pas, d'après le théorème fondamental de Liouville, la fonction se réduirait à un polynôme.[1] Bien entendu il pourra exister plusieurs chemins de la nature indiquée et même une infinité. Ainsi e^ξ croît incomparablement plus vite en module que n'importe quel polynôme en ξ quand la variable ξ va à l'infini en s'éloignant *à droite* de l'axe imaginaire.

Bref, ξ allant à l'infini dans une direction convenable, on a

$$\text{(B)} \qquad F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n}{\varphi_p(\xi)} + \lim_{\xi=\infty} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{\varphi_p(x)} \left(\frac{a_i}{x}\right)^{p-1} \frac{A_i}{x-a_i}.$$

Remarquons bien que le second sigma porte sur k termes et sur k seulement quand x est supposé dans C_k.

Une pareille formule, indépendamment des conclusions que nous allons en tirer, paraît déjà très importante en elle-même. La variable x partant de l'origine, c'est-à-dire passant de C_0, dans C_1, dans C_2, etc., la formule (B) met en évidence les pôles a_1, a_2, . . . les uns après les autres. A ce point de vue elle est à rapprocher de la formule de décomposition de M. Mittag-Leffler; elle exige toutefois, pour former les polynômes s_n, la connaissance du développement taylorien de F dans le voisinage de l'origine. En revanche elle ne contient aucune expression qu'on ne sait pas déterminer, la fonction f ayant plutôt le rôle d'une fonction arbitraire.

3. Mais le plus grand intérêt, déjà signalé dans mes précédents travaux et sur lequel je vais revenir ici avec des résultats nouveaux, consiste à s'arranger à détruire le second sigma de (B).

[1] M. Mittag-Leffler (*Acta mathematica*, T. 29. p. 145) a réussi cependant à construire des fonctions entières ne devenant infinies dans aucune direction. Le paradoxe résulte de conventions sur les modes de croissance de deux fonctions associées d'une certaine manière, conventions qui n'ont rien à faire ici.

Pour cela il suffit de poser

$$\text{(C)}\qquad \lim_{\xi=\infty}\frac{\varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{\varphi_p(\xi)}=0 \text{ ou } \lim_{\xi=\infty}\frac{f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)}=0,\ i=1,2,\ldots k.$$

Les deux expressions limites (C) sont évidemment les mêmes dans les conditions où doivent croître $|\xi|$ et $|f(\xi)|$ puisque f et φ_p ne diffèrent que par des polynômes. Les conditions (C) en général ne seront réalisables que pour x dans de certaines régions du plan. C'est en s'arrangeant à étendre ces régions de plus en plus qu'on réalisera, au moyen de séries de polynômes en s_n, un prolongement analytique de plus en plus étendu.

Analysons les choses en détail.

Soit d'abord x dans C_0. On aura

$$F(x)=a_{00}+a_{01}x+a_{02}x^2+\quad .$$

$$F(x)\varphi_p(\xi)=\sum_{n=0}^{n=\infty}c_{n+p}\,s_n+\sum_{n=0}^{n=\infty}(\gamma_p\xi^p+\cdots+\gamma_{p+n}\xi^{p+n})\,a_{0,n+1}\,x^{n+1}.$$

Divisant par $\varphi_p(\xi)$ et faisant croître ξ conformément à l'hypothèse fondamentale du n° 2, il restera

$$\text{(5)}\qquad F(x)=\lim_{\xi=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{c_{n+p}\,s_n}{\varphi_p(\xi)},$$

formule qui n'est autre que (B) pour $k=0$ et qui, à ce titre, aurait pu être écrite immédiatement. Si maintenant x sort de C_0 il faut compléter le second membre par le terme du second sigma de (B) qui correspond à $i=1$ mais, d'autre part, ce terme complémentaire peut être immédiatement détruit par celle des conditions (C) qui correspond à $i=1$. Cette condition, en général, ne laissera plus à x la liberté de circuler dans toute la couronne C_1-C_0 mais seulement dans certaines régions de celle-ci. De même si x, sans pénétrer dans les régions précédemment interdites, peut passer dans la couronne C_2-C_1, le terme du second sigma de (B) qui correspond à $i=2$ va apparaître dans la formule (5) et on pourra le détruire par celle des conditions (C) qui correspond à $i=2$; cela pourra interdire à x certaines régions de la couronne C_2-C_1. Et ainsi de suite.

Le cas le plus important est celui où l'on se propose de faire circuler x dans tout le champ complexe. Mais alors, si l'on veut représenter $F(x)$ par des formules du type (5), toutes les conditions (C) interviennent à la fois. Chacune

conduit, en général, à limiter par une certaine courbe le domaine de validité de la formule (5). L'ensemble des domaines acceptables forme la *région de sommabilité.*

Tout ceci s'éclaircira et se mettra facilement d'accord avec des résultats connus en prenant l'exemple particulier de $f(\xi) = e^{\xi}$.

4. *Sommabilité exponentielle.* — Si $f(\xi) = e^{\xi}$ et si l'on pose d'autre part

$$\xi = \varrho\, e^{i\omega},\ x = r e^{i\theta},\ a_i = \alpha_i e^{i\tau_i},$$

on trouve immédiatement que le rapport de $f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)$ à $f(\xi)$ est une exponentielle dont la partie réelle de l'exposant est

$$\varrho\left[\frac{r}{\alpha_i}\cos(\theta + \omega - \tau_i) - \cos\omega\right].$$

Réaliser les conditions (C) c'est faire tendre de telles exponentielles vers zéro, ce qui arrivera quand ϱ croîtra indéfiniment si le crochet précédent reste négatif. Géométriquement c'est faire rester la variable x toujours du même côté que l'origine par rapport à la droite

$$r\cos(\theta + \omega - \tau_i) = \alpha_i \cos\omega$$

qui passe par le point $a_i(\alpha_i, \tau_i)$ et fait en ce point un angle $\frac{\pi}{2} - \omega$ avec le rayon vecteur $O a_i$. Il ne faut pas oublier que ξ est tenu de croître en module à droite de l'axe imaginaire, donc ω est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Il est très important de remarquer que si ξ va à l'infini dans une direction donnée les droites précédentes font des angles constants et tous les mêmes avec les rayons vecteurs tels que $O a_i$. Si la direction où ξ croît change, c'est à dire si l'angle ω varie, les mêmes droites tournent autour des points a_i d'un angle égal à celui dont ω a varié, mais en sens contraire.

Ceci posé supposons x dans C_0; on doit avoir, pour représenter $F(x)$, une formule du type (5) laquelle est simplement équivalente à la formule de Taylor.

Si x sort de C_0, le terme qui s'ajoute à cette formule du type (5) ne peut disparaître que si x ne franchit pas la droite A_1 passant par a_1 et faisant avec $O a_1$ un angle constant (fig. 1). Sous cette restriction x peut circuler dans ce qui reste de la couronne $C_1 - C_0$; si cette variable sort de là ce ne peut être qu'à la condition

de ne pas franchir la droite A_2, construite comme A_1, et ainsi de suite. On finit par obtenir comme région de sommabilité un contour mixtiligne qui devient le *polygone de sommabilité* de M. E. Borel si ξ croît par valeurs réelles car alors ω est nul et chaque droite A_i est perpendiculaire au rayon $O a_i$.

Je ne m'arrêterai pas davantage sur ces méthodes;[1] j'ai seulement voulu prendre un exemple simple pour le comparer avec ce qui va suivre.

5. *La fonction sommatrice σ.* — Sans insister sur les méthodes de sommabilité telles que celles du numéro précédent on peut cependant remarquer que les premières fonctions sommatrices employées furent des fonctions entières dépourvues de zéros. Si l'on prend des fonctions possédant une infinité de

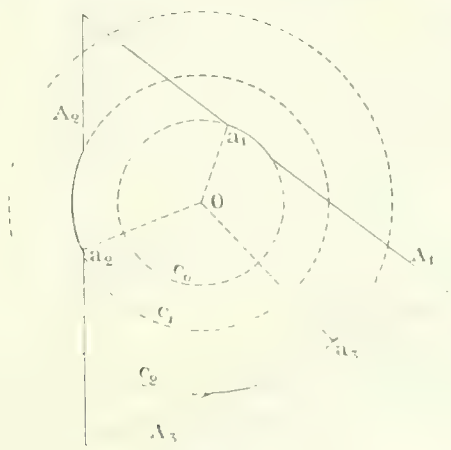

Fig. 1.

zéros on se trouve en présence de résultats complètement différents des précédents sur lesquels j'ai d'abord attiré l'attention dans une Note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (16 Mars 1908) puis dans un article du *Bulletin des Sciences mathématiques* (Juillet 1908).

Dans ces premières publications je supposais toujours $p = 0$; ici, au contraire, je conserverai la latitude, en laissant à p une valeur entière quelconque, de pouvoir déplacer les coefficients c_{n+p} par rapport aux polynômes tayloriens s_n, ce qui aura grande importance quand on étudiera la dérivation des séries obtenues (n° 8).

Considérons la fonction σ admettant pour zéros tous les sommets du

[1] Pour plus de développements on peut se reporter à un article de M. A. Costabel: Sur le prolongement analytique d'une fonction méromorphe (Enseignement mathématique, 1908, p. 377).

quadrillage orthogonal formé par les axes et des parallèles à ceux-ci d'abscisses et d'ordonnées $\pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$ On aura

$$(6) \qquad \sigma\xi = \xi + * - \frac{g_2 \xi^5}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{g_3 \xi^7}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{g_2^2 \xi^9}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} - \cdots,$$

les invariants g_2 et g_3 étant réels. Si 2ω et $2\omega'$ sont les périodes de la fonction $p\xi$, on a ici $2\omega = 2$, $2\omega' = 2i$ et une formule bien connue nous donne pour cas particulier

$$\sigma(\xi + 2m\omega) = (-1)^m e^{2m\eta(\xi + m\omega)} \sigma\xi,$$

m étant un entier et η un nombre *réel et positif*.[1] Dans ces conditions, si nous donnons à ξ les valeurs entières *impaires* 1, 3, 5, ..., la fonction $\sigma\xi$ croît en valeur absolue d'une manière exponentielle, c'est à dire incomparablement plus vite que n'importe quel polynôme en ξ pour la même suite de valeurs de la variable, ce qui est ici l'essentiel.

Donc on peut faire un raisonnement exactement identique à celui qui, au n° 3, a donné la formule (5) et réobtenir d'ailleurs cette formule (5), la fonction f contenue dans φ_p étant la fonction σ qui vient d'être définie; il est toujours entendu que ξ croît indéfiniment en prenant la suite des valeurs entières, positives et impaires. Naturellement représenter $F(x)$ par cette formule (5) n'a toujours pas plus de valeur que l'usage pur et simple de la formule de Taylor dans le cercle C_0. C'est maintenant, lorsqu'il va falloir sortir x de C_0 avec $\sigma\xi$ comme fonction sommatrice, que des considérations d'une toute autre nature vont s'introduire. Il s'agit toujours de transporter les conditions (C) dans la formule (B). Ici les deux formes données à la condition (C) sont encore équivalentes car φ_p ne diffère de $f = \sigma$ que par des polynômes. Cela dit posons

$$(7) \qquad a_k = \frac{1}{p}(a_{k1} + i a_{k2}),\ x = \frac{1}{p}(x_1 + i x_2),\ \xi_n = \prod_1^n (a_{k1}^2 + a_{k2}^2);$$

p est un entier réel et positif; a_{k1} et a_{k2} sont des entiers réels dont l'un est pair, l'autre impair; x_1 et x_2 sont des entiers pairs. Alors ξ, *pris égal à* ξ_n, croît indéfiniment par valeurs toujours impaires; $\frac{\xi x}{a_i}$ est un entier complexe dont

[1] J. Tannery et J. Molk. *Fonctions elliptiques*. T. I. pp. 165 et 201. P. Appell et E. Lacour. *id.* pp. 68 et 402

les deux parties sont paires si bien que $\sigma \frac{\xi x}{a_i}$ est toujours nul.

Alors la formule (B) se réduit bien à

$$F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n}{\varphi_p(\xi)}, \tag{8}$$

ξ croissant indéfiniment par les valeurs entières impaires ξ_n données par la dernière des formules (7). (*Bulletin des Sciences mathématiques.* Juillet 1908.)

Un pareil résultat ne peut paraître valable, en dehors du cercle C_0, que si x et les points singuliers a_k de $F(x)$ ont des cordonnées satisfaisant aux conditions énoncées à propos des formules (7). Mais, comme l'entier p qui figure[1] dans les formules (7) est aussi grand qu'on veut, les x et les a_k sont simplement assujettis à être des nombres rationnels qui peuvent s'approcher autant qu'on le voudra de toutes valeurs données à l'avance.

A ce point de vue la solution ici proposée pour le prolongement analytique d'une fonction méromorphe n'a aucune infériorité sur celles où x peut varier d'une manière continue. Même lorsque nous croyons considérer des ensembles continus nous n'y atteignons *pratiquement* que les ensembles dénombrables qui peuvent y être contenus; c'est là «la seule réalité accessible» (E. Borel, Les probabilités dénombrables, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1909, premier semestre). En général une formule à variable continue n'est *calculable* que pour des valeurs rationnelles de la variable. On ne perd donc rien à remplacer une telle formule par une autre à variable discontinue pourvu, bien entendu, qu'il ne s'agisse pas de discontinuités finies.

6. *Cas où $F(x)$ présente des pôles multiples.* — Comme on l'a déjà indiqué à la fin du numéro 1, il faut étendre les résultats précédents aux fonctions méromorphes ayant des pôles d'ordre quelconque. On rencontre ainsi de nouvelles propriétés du plus haut intérêt. Je rappelle d'abord quelques généralités.

Dans le voisinage d'un pôle d'ordre m la fonction $F(x)$ est développable par la formule de Laurent sous la forme

$$F(x) = \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} + a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)$$

Désignant par le symbole D une dérivation par rapport à x, on a sans peine

[1] Il est à peine besoin de faire remarquer que cet entier p n'a rien de commun avec l'indice p du second membre de (8).

$$(9)\quad\begin{cases} {}_{x=a}[F(x)(x-a)^m] = \quad A_m, \\ D_{x=a}[F(x)(x-a)^m] = 1!\,A_{m-1}, \\ D^2_{x=a}[F(x)(x-a)^m] = 2!\,A_{m-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D^{m-1}_{x=a}[F(x)(x-a)^m] = (m-1)!\,A_1; \end{cases}$$

quant à la partie principale du développement précédent on peut l'écrire

$$\frac{A_1}{x-a} - \frac{D}{1!}\frac{A_2}{x-a} + \frac{D^2}{2!}\frac{A_3}{x-a} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\frac{A_m}{x-a}.$$

Dans ces conditions, là où $F(x)$ possèdera un pôle a_i d'ordre m, la fraction rationnelle $\frac{A_i}{x-a_i}$ qui figure sous le sigma dans l'égalité (1) devra être remplacée par

$$\frac{A_{i1}}{x-a_i} - \frac{D}{1!}\frac{A_{i2}}{x-a_i} + \frac{D^2}{2!}\frac{A_{i3}}{x-a_i} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\frac{A_{im}}{x-a_i}.$$

Si, pour simplifier l'écriture, on pose

$$\sigma_{i,n} = -\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \frac{x^2}{a_i^3} - \cdots - \frac{x^n}{a_i^{n+1}},$$

on voit de même que l'expression

$$A_i\left[\sigma_{i,n} + \frac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)}\right]$$

qui figure dans (2') doit être remplacée par

$$(10)\quad\begin{cases} A_{i1}\left[\sigma_{i,n} + \dfrac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)}\right] \\ -A_{i2}\dfrac{D}{1!}\left[\sigma_{i,n+1} + \dfrac{x^{n+2}}{a_i^{n+2}(x-a_i)}\right] \\ +A_{i3}\dfrac{D^2}{2!}\left[\sigma_{i,n+2} + \dfrac{x^{n+3}}{a_i^{n+3}(x-a_i)}\right] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +(-1)^{m-1}A_{im}\dfrac{D^{m-1}}{(m-1)!}\left[\sigma_{i,n+m-1} + \dfrac{x^{n+m}}{a_i^{n+m}(x-a_i)}\right]. \end{cases}$$

Ceci entraîne que le terme

$$(11)\quad \varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)\left(\frac{a_i}{x}\right)^{p-1}\frac{A_i}{x-a_i}$$

qui figure sous le second sigma de (A) doit être remplacé sous ce sigma par

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \gamma_{n+p}\xi^{n+p}\left[\frac{A_{i1}x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)} - \frac{D}{1!}\frac{A_{i2}x^{n+2}}{a_i^{n+2}(x-a_i)} + \frac{D^2}{2!}\frac{A_{i3}x^{n+3}}{a_i^{n+3}(x-a_i)} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\frac{A_{im}x^{n+m}}{a_i^{n+m}(x-a_i)}\right].$$

En s'appuyant sur l'identité

$$(12)\qquad (-1)^{p-1}D_x^{p-1}\frac{x^{n+p}}{a^{n+p}(x-a)} = D_{z=a}^{p-1}\frac{x^{n+1}}{z^{n+1}(x-z)},$$

dont la vérification est immédiate en l'écrivant

$$(-1)^{p-1}D_x^{p-1}\left[\frac{1}{x-a}+\frac{1}{a}+\cdots+\frac{x^{n+p-1}}{a^{n+p}}\right] = D_a^{p-1}\left[\frac{1}{x-a}+\frac{1}{a}+\cdots+\frac{x^n}{a^{n+1}}\right],$$

le résultat précédent peut se considérer comme la valeur pour $z=a_i$ de l'expression suivante où les D sont des dérivations par rapport à z

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\gamma_{n+p}\xi^{n+p}\left[\frac{A_{i1}x^{n+1}}{z^{n+1}(x-z)} + \frac{D}{1!}\frac{A_{i2}x^{n+1}}{z^{n+1}(x-z)} + \cdots + \frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\frac{A_{im}x^{n+1}}{z^{n+1}(x-z)}\right].$$

Finalement cela peut s'écrire

$$(13)\qquad \left[A_{i1}+A_{i2}\frac{D}{1!}+A_{i3}\frac{D^2}{2!}+\cdots+A_{im}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\right]\left[\varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1}\frac{1}{x-z}\right],$$

le premier crochet contenant un opérateur, combinaison linéaire de dérivations, que l'on appliquera sans aucune confusion possible à la fonction de z contenue dans le second crochet. Dans le cas du pôle d'ordre 1, tous les A sauf A_{i1} sont nuls dans le premier crochet et on retombe sur l'expression (11) ainsi que cela doit être. En résumé, si l'on pose

$$\Delta_i^{m-1}\Phi(z) = A_{i1}\Phi(z) + \frac{A_{i2}}{1!}D\Phi(z) + \frac{A_{i3}}{2!}D^2\Phi(z) + \cdots + \frac{A_{im}}{(m-1)!}D^{m-1}\Phi(z),$$

la formule (A) s'écrit maintenant

$$(\mathrm{D})\qquad \left\{\begin{aligned} F(x)\varphi_p(\xi) = {} & \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}s_n + \sum_{i=1}^{i=k}\Delta_{i\;z=a_i}^{m-1}\left[\varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1}\frac{1}{x-z}\right] \\ & + \sum_{n=0}^{n=\infty}(\gamma_p\xi^p+\cdots+\gamma_{p+n}\xi^{p+n})\,a_{k,n+1}x^{n+1}. \end{aligned}\right.$$

Il ne sera pas utile de développer davantage le Δ. On remarquera simplement que c'est une forme linéaire et homogène par rapport à

$$\varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right),\ \xi\varphi'_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right),\ \ldots,\ \xi^{m-1}\varphi_p^{(m-1)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right). \tag{14}$$

Dans ce cas si l'on veut raisonner comme sur la formule (A) et notamment faire disparaître le second sigma de (D) on retombera sur des conditions du type (C) mais plus nombreuses puisqu'il faudra y considérer non seulement le numérateur égal au premier terme de la suite (14) mais y remplacer succesivement ce numérateur par tous les termes de cette suite.

Nous allons réexaminer, pour le cas des pôles multiples de $F(x)$, l'emploi des fonctions sommatrices e^ξ et $\sigma\xi$.

7. Tout d'abord et d'une manière générale si l'on considère que $\varphi_p(\xi)$ ne diffère de $f(\xi)$ que par un polynôme, on voit immédiatement que, pour ξ croissant dans une direction où $f(\xi)$ croît incomparablement plus vite que n'importe quel polynôme, le rapport d'une des expressions (14), soit $\xi^k\varphi_p^{(k)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)$, à $\varphi_p(\xi)$ se comporte exactement comme $\xi^k f^{(k)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) : f(\xi)$.

Les conditions (C) sont donc à remplacer par les expressions

$$\frac{f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)},\ \frac{\xi f'\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)},\ \ldots,\ \frac{\xi^{m-1} f^{(m-1)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)};\quad i = 1, 2, \ldots \tag{E}$$

dont la limite, pour ξ croissant toujours comme plus haut, doit être égalée à zéro. Si $f(\xi) = e^\xi$ ces conditions ne sont pas distinctes et ne diffèrent pas de la première déjà étudiée au n° 4. Donc *le procédé de sommabilité exponentielle,* dû à M. E. Borel, *appliqué à une fonction méromorphe, n'a besoin d'aucune modification quel que soit l'ordre des pôles de cette fonction.*

La conclusion va être toute différente avec $f(\xi) = \sigma\xi$ pour fonction sommatrice. Si, procédant comme au n° 5, on suppose toujours que les coordonnées de x, de ξ et des pôles a_i sont représentables par les formules (7), la première des expressions (E) est bien nulle, puisque $\frac{\xi x}{a_i}$ est toujours un zéro de σ, mais il n'y a aucune raison pour qu'il en soit de même des suivantes, les zéros de σ n'étant nullement tenus d'être des zéros pour toutes les dérivées de cette fonction. On tournera la difficulté en remplaçant $\sigma\xi$ par $(\sigma\xi)^m$, m étant un entier positif. Donc *la fonction sommatrice $\sigma\xi$ servant à la représentation d'une fonction méromorphe $F(x)$ à pôles simples,* comme il a été expliqué au n° 5, *il faut, pour étendre le procédé à une fonction ayant des pôles d'ordre m, que l'on remplace $\sigma\xi$ par $(\sigma\xi)^m$.*

Il est facile de voir que les développements (8) ainsi obtenus peuvent encore être variées d'une infinité de manières ce que j'ai déjà indiqué dans mon Mémoire du *Bulletin des Sciences mathématiques* (1908). Comme idée plus nouvelle on peut remarquer qu'on pourrait remplacer $\sigma\xi$ par $\tau\xi = e^{\sigma\xi} - 1$, fonction qui a évidemment les mêmes zéros que $\sigma\xi$ et qui, pour ξ réel, croît encore plus vite. De même $\tau\xi$ pourrait être remplacée par $e^{\tau\xi} - 1$ et ainsi de suite indéfiniment.

8. *Dérivabilité. Rôle des indices p.* — Puisque ξ est toujours supposé aller à l'infini dans une direction où $f(\xi)$ croît incomparablement plus vite que n'importe quel polynôme, il suit immédiatement de là que $\frac{\varphi_p(\xi)}{f(\xi)}$ tend vers 1 (du moins si p est fini) et que la formule (5) peut aussi bien s'écrire

$$F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n}{f(\xi)}. \tag{15}$$

Cette forme est particulièrement commode pour étudier sa dérivation. Supposons pour fixer les idées, que $F(x)$ soit une fonction méromorphe à pôles simples; sa dérivée $m^{\text{ième}}$ a des pôles d'ordre $m+1$. Les polynômes tayloriens qui sont $s_0, s_1, s_2, \ldots$ pour la fonction primitive sont $s_m^{(m)}, s_{m+1}^{(m)}, s_{m+2}^{(m)}, \ldots$ pour cette dérivée. Avec la méthode de sommation exponentielle, $f(\xi) = e^\xi$, nous avons alors sans précautions spéciales

$$F^{(m)}(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_{n+m}^{(m)}}{f(\xi)} \tag{16}$$

et, comme p est un entier arbitraire, il est indifférent d'écrire

$$F^{(m)}(x) = \lim_{\xi=0} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p+m}\, s_{n+m}^{(m)}}{f(\xi)} = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n^{(m)}}{f(\xi)}. \tag{17}$$

C'est dire que la série de polynômes tayloriens (15) peut être dérivée terme à terme. Ce résultat est dû à M. Borel qui paraît l'avoir prévu avant d'effectuer de véritables calculs (*Sur l'extension du théorème d'Abel aux séries sommables. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* 13 Janvier 1896.)

Supposons maintenant que la formule (15) soit l'analogue de la formule (8) c'est à dire qu'on emploie la fonction $\sigma\xi$ et les relations (7) comme il a été expliqué au n° 5. Alors (n° 7) on peut encore passer de (15) à (16) mais à conditon de substituer $(\sigma\xi)^{m+1}$ à $\sigma\xi$ puis, par le même raisonnement que précé-

demment, on obtiendra la formule (17). Donc *la formule* (15) *est m fois dérivable si $f(\xi) = (\sigma\xi)^{m+1}$ et elle ne l'est que m fois.*

On a donc un exemple précis de séries de polynômes spécialement construites pour être dérivables m fois et m fois seulement; dans l'état actuel de la théorie des séries de polynômes à variable complexe ce résultat me semble extrêmement remarquable.

9. *Cas où $F(x)$ est une fraction rationnelle.* — Il est intéressant de voir comment dégénèrent les résultats précédents quand $F(x)$ dégénère en une fraction rationnelle.

En commençant, s'il est nécessaire, par effectuer une division, on peut toujours admettre que le degré du numérateur ne surpassera pas celui du dénominateur. Alors, comme on l'a déjà remarqué au nº 1, le cercle C_k contenant tous les pôles, les coefficients $a_{k0}, a_{k1}, a_{k2}, \ldots$ disparaissent dans (1) ou se réduisent au premier d'entre eux. Dans ces conditions le dernier sigma des formules (A) ou (D) n'a plus de raison d'être. Par suite il n'est plus nécessaire de faire croître ξ indéfiniment *pour détruire ce sigma.* Mais, si l'on adopte la méthode de sommabilité de M. Borel ou une méthode analogue, la croissance indéfinie de ξ reste nécessaire pour satisfaire aux conditions du type (C). Il en est autrement avec la fonction sommatrice σ. Comme on a

$$\varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) = \sigma\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) - \gamma_0 - \gamma_1\frac{\xi x}{a_i} - \cdots - \gamma_{p-1}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)^{p-1},$$

les coefficients γ étant ceux de la formule (6), on voit que, *si p est nul ou égal à* 1, cette expression sera nulle en vertu des égalités (7). Et alors (A) donnera simplement

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{\sigma\xi}.$$

Les dérivées de φ_p sont dans les mêmes conditions que φ_p, si l'on remplace σ par une puissance convenable de cette fonction. Donc la formule précédente s'étend facilement au cas où la fraction rationnelle $F(x)$ a des pôles d'ordre quelconque. Mais on ne peut donner exactement la même physionomie aux règles de dérivation puisqu'on ne peut plus disposer de l'indice p.

II. Séries où les coefficients c_n dépendent de la variable x.

10. La théorie des séries de polynômes tayloriens, malgré les si importants travaux de M. G. Mittag-Leffler et à laquelle ce qui précède n'apporte qu'une

modeste contribution, paraît déjà pouvoir être généralisée de diverses manières.

Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (Juin 1907) j'avais déjà essayé de construire des formules assez générales pour que les coefficients c des polynômes s soient fonctions de ξ et de x et, en terminant l'article précité, j'avais même donné une formule pour la représentation de $\frac{1}{1-x}$ laquelle, à vrai dire, était plutôt une identité. Etant revenu depuis sur la question d'une manière plus profonde et en me bornant toujours au cas des fonctions méromorphes, j'ai obtenu d'autres résultats qui, cette fois, semblent nouveaux et bien remarquables par leur élégance.

Le cas tout à fait général, où l'on veut que c_n contienne x de façon quelconque, est trop vaste pour qu'on puisse le traiter immédiatement. Je me bornerai au cas très particulier mais très intéressant où $c_n = \gamma_n \xi^n$ est partout remplacé par $\frac{c_n}{x^n}$. Alors les notations restent les mêmes qu'au Chapitre précédent et le raisonnement qui nous a conduit à la formule (A) conduit à une formule toute semblable à cela près que ξ y est remplacé par $\frac{\xi}{x}$, savoir

$$(\mathrm{F}) \quad \begin{cases} F(x)\varphi_p\left(\frac{\xi}{x}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}}{x^{n+p}} s_n + \sum_{i=1}^{i=k} \varphi_p\left(\frac{\xi}{a_i}\right)\left(\frac{a_i}{x}\right)^{p-1} \frac{A_i}{x-a_i} \\ \qquad + \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\gamma_p \frac{\xi^p}{x^p} + \cdots + \gamma_{p+n}\frac{\xi^{p+n}}{x^{p+n}}\right) a_{k,n+1}\, x^{n+1}. \end{cases}$$

Cette formule suppose que $F(x)$ n'a que des pôles simples. Dans le cas des pôles d'ordre m le raisonnement du n° 6 peut encore être refait mot pour mot et l'on est conduit à modifier la formule précédente en y remplaçant le second sigma par

$$\sum_{i=1}^{i=k} \Delta_{z=a_i}^{m-1}\left[\varphi_p\left(\frac{\xi}{z}\right)\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1}\frac{1}{x-z}\right]$$

ce qui est une forme linéaire et homogène par rapport à

$$\varphi_p\left(\frac{\xi}{a_i}\right),\ \xi\varphi'_p\left(\frac{\xi}{a_i}\right), \ldots, \xi^{m-1}\varphi_p^{(m-1)}\left(\frac{\xi}{a_i}\right).$$

Si x ne sort pas du cercle taylorien C_0 le second sigma de (F) est inutile et il est à peine besoin de remarquer que la formule, abstraction faite de ce terme, peut être établie directement tout comme (5) au n° 3. Pour faire disparaître le troisième sigma de la formule (F) on peut encore diviser tous les termes par

$\varphi_p\left(\frac{\xi}{x}\right)$ et chercher à ce que cette expression croisse en module incomparablement plus vite que n'importe quel polynôme en $\frac{\xi}{x}$.

11. *Nouvel emploi de la fonction exponentielle.* — Si l'on prend $f\left(\frac{\xi}{x}\right) = e^{\frac{\xi}{x}}$, le module de cette expression est une exponentielle dont l'exposant est $\frac{\varrho}{r}\cos(\omega - \theta)$, les notations étant celles du début du n° 4. Si r est quelconque et si ϱ croît

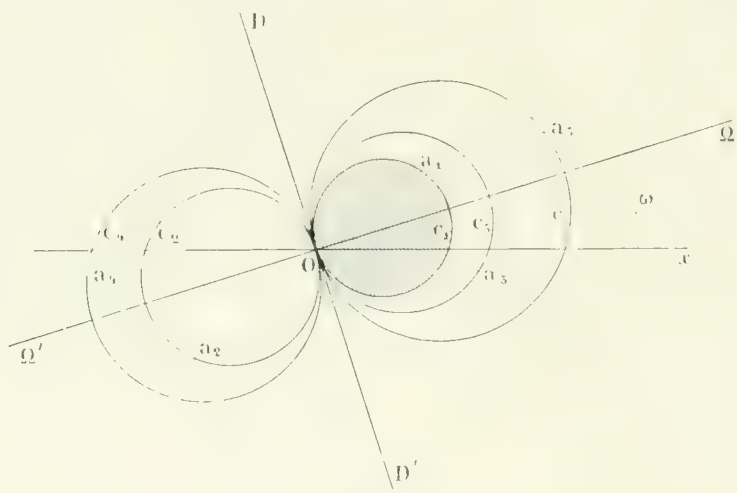

Fig. 2.

indéfiniment cette exponentielle croîtra de manière convenable si $\cos(\omega - \theta)$ est positif. Géométriquement si ξ part de l'origine suivant une demi-droite $O\Omega$ à laquelle on mène la perpendiculaire DOD', x doit circuler dans le demi-plan $D\Omega D'$. Voyons maintenant si l'on ne peut pas astreindre x à de nouvelles conditions de manière à faire disparaître aussi le second sigma de (F). Il faudrait pour cela que le rapport de $\varphi_p\left(\frac{\xi}{a_i}\right)$ à $\varphi_p\left(\frac{\xi}{x}\right)$ ou de $f\left(\frac{\xi}{a_i}\right)$ à $f\left(\frac{\xi}{x}\right)$ tende toujours vers zéro quand ξ va à l'infini le long de $O\Omega$. Or, toujours avec les notations du n° 4, on calcule immédiatement que ce rapport a pour module une exponentielle dont l'exposant est

$$\varrho\left[\frac{\cos(\omega - \tau_i)}{\alpha_i} - \frac{\cos(\omega - \theta)}{r}\right].$$

Quand ϱ croîtra indéfiniment ce module tendra vers zéro si le crochet qui multiplie ϱ est constamment négatif. Or considérons l'équation (fig. 2)

$$\frac{\cos(\omega - \tau_i)}{\alpha_i} - \frac{\cos(\omega - \theta)}{r} = 0;$$

c'est, en coordonnées polaires r et θ, l'équation d'une circonférence passant par l'origine O, par le point $a_i(\alpha_i, \tau_i)$ et dont le centre se trouve sur la droite $\Omega' O \Omega$ d'argument ω. Pour les circonférences du demi plan $D\Omega D'$ l'intérieur est la région négative; c'est au contraire l'extérieur pour celles de $D\Omega' D'$. Donc la variable $x(r, \theta)$ doit être assujettie à rester dans une région intérieure à toutes les circonférences C de $D\Omega D'$ et extérieure à toutes celles de $D\Omega' D'$. Il n'y a en évidence sur la figure qu'une seule région satisfaisant à de telles conditions; c'est le cercle, couvert de hachures, contenu dans la circonférence C_1 passant par a_1. Finalement, pour x dans ce cercle et ξ allant à l'infini sur $O\Omega$, on a

$$\text{(G)} \qquad F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n}{x^{n+p}\, \varphi_p\left(\frac{\xi}{x}\right)} = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n}{x^{n+p}\, f\left(\frac{\xi}{x}\right)}.$$

La conclusion serait la même avec la formule (F) complétée pour le cas des pôles a_i multiples, du moins tant que f serait la fonction exponentielle.

Cette formule (G) et le domaine C_1 qui lui correspond entraînent des réflexions dignes de remarque. Tout d'abord l'aire C_1 peut, dans certains cas, s'étendre beaucoup et, précisément faute de place, la figure n'a pas été faite dans une hypothèse avantageuse. Supposons, par exemple, que les pôles $a_1, a_3, a_5, \ldots$ soient à peu près rangés sur une droite passant par O; alors en faisant jouer à cette droite le rôle de DOD' on voit que la région de sommabilité pourra s'étendre sur presque tout le demi-plan $D\Omega D'$.

En outre il est intéressant de remarquer que la formule (G) et l'aire C_1 ont des propriétés plus proches de celles de la série de Taylor et de son cercle de convergence que de celles des séries sommables et du polygone de sommabilité de M. Borel. Le polygone borélien a, en général, un point singulier a_i sur chaque côté et ne peut être tracé que par la considération d'autant de points singuliers qu'il a de côtés utiles. Pour la formule de Taylor, au contraire, le cercle de convergence ne dépend que de la connaissance d'un seul point singulier, savoir celui qui est le plus proche de l'origine. Il se passe quelque chose de tout à fait analogue pour la formule (G). On détermine l'aire C_1 correspondante en partant d'un cercle passant par O et dont le centre part de O sur $O\Omega$; dès que la circonférence d'un tel cercle mobile rencontre un point singulier, tel a_1, l'aire C_1 est déterminée.

12. *Dérivabilité.* — Si $F(x)$ n'a que des pôles simples, $F^{(m)}(x)$ a des pôles d'ordre $m + 1$; les polynômes tayloriens sont $s_m^{(m)}, s_{m+1}^{(m)}, s_{m+2}^{(m)}, \ldots$ Donc

$$F^{(m)}(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_{m+n}^{(m)}}{x^{n+p} f\left(\frac{\xi}{x}\right)}.$$

Comme p est arbitraire on peut remplacer p par $p + m$, ce qui finalement revient à

$$F^{(m)}(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n^{(m)}}{x^{n+p} f\left(\frac{\xi}{x}\right)}.$$

Evidemment nous ne sommes plus dans le même cas qu'au nº 8 et ceci ne résulte plus d'une dérivation terme à terme de (G) mais c'est encore formuler pour (G) une règle de dérivation simple que de dire que, dans chaque terme, on doit dériver le numérateur seulement.

III. Le rôle des intégrales curvilignes.

13. Je considère comme très important d'avoir pu étudier le prolongement analytique des fonctions méromorphes, au moyen des expressions dont la première idée est due à MM. Mittag-Leffler et Borel, sans avoir eu recours au calcul intégral. La chose cesse probablement d'être possible pour des fonctions plus compliquées, notamment pour les fonctions non uniformes. Il importe alors de retrouver rapidement les formules dépendant d'intégrales curvilignes dues à M. Mittag-Leffler, de montrer comment elles donnent pour cas particuliers des formules telles que (A) et (D) et de chercher ensuite si ces formules ne sont pas susceptibles de généralisations pour des fonctions admettant d'autres singularités que des pôles. Cette dernière question me paraît tellement vaste que je me bornerai ici à quelques indications.

Soit toujours

$$\varphi_p(\xi) = f(\xi) - (c_0 + c_1 + \cdots + c_{p-1}), \quad \varphi_0(\xi) = f(\xi);$$

on aura

$$c_{n+p} = \frac{1}{2 i \pi} \int_\Gamma \varphi_p(z) \frac{\xi^{n+p}}{z^{n+p+1}} dz,$$

Γ étant un contour qui peut être une circonférence ayant l'origine pour centre et un rayon aussi grand qu'on veut. D'autre part on trouve facilement que

$$s_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\,\frac{z^{n+1}-x^{n+1}}{z-x}\,\frac{dz}{z^{n+1}};$$

ici le contour C entoure d'abord l'origine puis peut grandir autant qu'on veut *à condition de ne franchir aucun des points singuliers a_i de $F(x)$.* On peut alors imaginer tout de suite une forme canonique pour ce contour C, laquelle d'ailleurs est souvent employée. Traçons l'étoile de M. Mittag-Leffler formée de demi-droites issues des a_i, opposées à l'origine et figurées en pointillé sur la figure 3; alors C sera le contour figuré par un trait plein. Ces définitions posées, on a

$$c_{n+p}\,s_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C\int_\Gamma F(z)\,\varphi_p(\zeta)\,\frac{z^{n+1}-x^{n+1}}{z-x}\,\frac{\xi^{n+p}\,d\zeta\,dz}{\zeta^{n+p+1}\,z^{n+1}}.$$

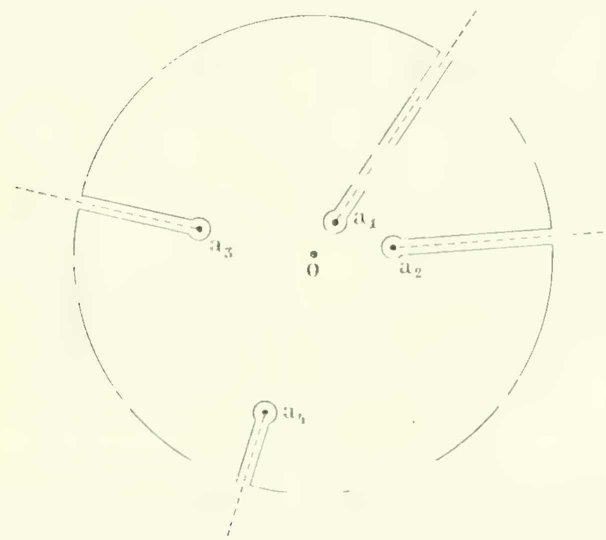

Fig. 3.

Sommons de $n=0$ à $n=\infty$; en s'appuyant sur les identités

$$\sum \frac{z^{n+1}-x^{n+1}}{\zeta^{n+p+1}\,z^{n+1}}\,\xi^{n+p} = \frac{\xi^p}{\zeta^p}\left[\sum \frac{\xi^n}{\zeta^{n+1}} - x\sum\frac{(\xi x)^n}{(\zeta z)^{n+1}}\right]$$
$$= \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p\left(\frac{1}{\zeta-\xi} - \frac{x}{\zeta z-\xi x}\right) = \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{\zeta(z-x)}{(\zeta-\xi)(\zeta z-\xi x)},$$

il vient finalement

$$\text{(II)}\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}\,s_n = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_C\int_\Gamma \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{F(z)\,\varphi_p(\zeta)}{(\zeta-\xi)\left(z-\frac{\xi x}{\zeta}\right)}\,d\zeta\,dz.$$

Les identités sur lesquelles on vient de s'appuyer ne sont vraies que si $|\xi| < |\zeta|$, $|\xi x| < |\zeta z|$ mais ici on peut les considérer comme toujours vraies car, quels que soient ξ et x, on peut toujours prendre le rayon $|\zeta|$ de Γ assez grand pour que les inégalités qu'on vient d'écrire soient satisfaites.

14. On peut étudier le second membre de (H) en considérant comme première variable d'intégration soit z, soit ζ. Je prends ζ. L'intégrale double peut s'écrire

$$\int\int\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{F(z)\,\varphi_p(\zeta)}{(\zeta-\xi)(z-x)}\,dz\,d\zeta - \int\int\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{x}{z}\,\frac{F(z)\,\varphi_p(\zeta)}{\left(\zeta-\dfrac{\xi x}{z}\right)(z-x)}\,dz\,d\zeta.$$

D'après la remarque qui termine le n° précédent ξ et $\dfrac{\xi x}{z}$ sont toujours dans Γ. On pourrait croire d'autre part que le dénominateur ζ^p qui figure dans les intégrales précédentes doive faire considérer l'origine du plan de Γ comme un pôle d'ordre p. Il n'en est rien car $\varphi_p(\zeta)$ contient ζ^p en facteur. Donc l'intégration en ζ conduit à remplacer (H) par

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}\,s_n = \frac{1}{2\,i\,\pi}\,\varphi_p(\xi)\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2\,i\,\pi}\int_C \left(\frac{z}{x}\right)^{p-1} \varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right)\frac{F(z)\,dz}{z-x}$$

d'où finalement

$$\varphi_p(\xi)\,F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}\,s_n + \frac{1}{2\,i\,\pi}\int_C \left(\frac{z}{x}\right)^{p-1} \varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right)\frac{F(z)\,dz}{z-x}. \tag{I}$$

Cette formule est du même type que celles formées par M. Mittag-Leffler dans ses dernières recherches (*Acta mathematica*. T. 29). Pour $p = 1$ elle coïncide même complètement avec l'une des formules du célèbre géomètre (*loc. cit.* p. 174) à cela près que ce dernier a considéré une étoile ayant pour centre un point régulier quelconque a. Ici $a = 0$.

15. *Cas où $F(x)$ est méromorphe.* — Depuis le début de ce Chapitre on n'a fait aucune hypothèse sur la nature des points singuliers a_i de la fonction $F(x)$. Observons d'abord que si $F(x)$ est méromorphe la formule (I) doit redonner les formules (A) et (D); c'est ce qu'on va vérifier.

Le contour C se compose d'une part de lacets enfermant chacun un a_i, d'autre part des arcs de cercle qui joignent les entrées des lacets et qui appartiennent tous à une même circonférence de centre O; si cette circonférence passe

entre a_k et a_{k+1}, c'est celle qui a été désignée par C_k, au n° 1. Considérons d'abord les lacets. Toutes les fois qu'il s'agira d'une fonction $F(x)$ *uniforme*, ils n'interviendront que par les boucles de rayon infiniment petit qui entourent immédiatement les a_i et qui sont parcourues dans le sens inverse. Si a_i est un pôle d'ordre m il donnera le résidu

$$\frac{1}{(m-1)!} D^{m-1}_{z=a_i} \left[\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1} \varphi_p \left(\frac{\xi x}{z}\right) \frac{F(z)}{x-z} (z-a_i)^m \right]$$

qui, convenablement développé par l'emploi des formules (9), n'est autre chose que le Δ du second sigma de (D). D'ailleurs, si a_i est un pôle simple, ce résidu se réduit immédiatement à l'expression qui est sous le second sigma de (A).

16. Considérons maintenant les arcs de C_k dont l'ensemble équivaut à cette circonférence entière. La fonction F étant uniforme le long de C_k, on peut considérer cette circonférence comme une couronne de LAURENT aussi étroite qu'on veut et écrire

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_k} F(u) \left(\frac{1}{u} + \frac{z}{u^2} + \cdots\right) du + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_k} F(u) \left(\frac{1}{z} + \frac{u}{z^2} + \cdots\right) du.$$

D'ailleurs

$$\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1} \varphi_p \left(\frac{\xi x}{z}\right) = \gamma_p \xi^p \frac{x}{z} + \gamma_{p+1} \xi^{p+1} \frac{x^2}{z^2} + \gamma_{p+2} \xi^{p+2} \frac{x^3}{z^3} + \cdots$$

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \cdots$$

C'est le produit de ces trois expressions qu'il s'agit d'intégrer le long de C_k; or ce produit est une série ordonnée suivant les puissances négatives et positives de z dont tous les termes, dans l'intégration indiquée, donnent des résultats nuls sauf celui qui contient z à la puissance -1. Il vient finalement

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (\gamma_p \xi^p + \cdots + \gamma_{p+n} \xi^{p+n}) \frac{x^{n+1}}{2i\pi} \int_{C_k} \frac{F(u)\,du}{u^{n+2}},$$

ce qui est bien le dernier sigma de la formule (A) ou de la formule (D).

Si F se réduisait à une fraction rationnelle dont le degré du numérateur ne dépassât pas celui du dénominateur ce sigma pourrait disparaître; on pourrait prendre C_k assez grand pour contenir tous les pôles et l'intégrale de (I) relative à C_k, contenant non seulement $F(z)$ mais z et $(z-x)$ à la puissance -1, serait

nulle quand le rayon de C_k croîtrait indéfiniment. C'est bien le résultat trouvé directement au n° 9.

17. *Généralisations des formules du type* (A). — Les derniers travaux sur le prolongement analytique aux moyen de séries de polynômes tayloriens, dûs à M. Mittag-Leffler, s'appuient surtout sur des formules du type (I) dont on cherche à faire disparaître le dernier terme, d'où la création de fonctions entières telles que le rapport de $f\left(\frac{\xi x}{z}\right)$ à $f(\xi)$ tende vers zéro quand ξ va à l'infini. On peut dire que le problème ainsi limité est complètement résolu à l'heure actuelle par l'éminent géomètre à cela près qu'on pourra toujours introduire quelque nouveauté dans le choix des fonctions f, ces dernières étant en nombre illimité.

Mais il est visible que les formules (I) peuvent faire naître d'autres problèmes; prenons par exemple (A) qui n'est qu'un cas très particulier de (I); cette formule (A) conserve un très grand intérêt pour la représentation d'une fonction méromorphe sans qu'on ait besoin d'en détruire les derniers sigmas. On pourrait donc se proposer d'étudier l'intégrale curviligne qui figure dans (I) pour en connaître la nature intime et pas seulement pour la détruire.

Pour le moment je me bornerai, je le répète, à quelques indications.

Cette intégrale, du moins pour les fonctions à points singuliers isolés à distance finie, doit pouvoir se scinder en deux parties, l'une relative aux lacets du contour C (fig. 3), l'autre aux arcs de la circonférence C_k qui joignent les pieds des lacets.

Si $F(x)$ *est uniforme* le raisonnement du n° 16 est encore applicable; ainsi si parmi les a_i se trouvaient des points essentiels il faudrait sans doute modifier profondément les seconds sigmas des formules (A) ou (D) mais le troisième ne changerait pas.

Si $F(x)$ *n'est pas uniforme* on sort des lacets sur C_k avec une détermination qui n'est pas la même qu'à l'entrée et le raisonnement du n° 16 n'est plus applicable directement mais il semble alors qu'on puisse dans des cas très généraux modifier la figure 3 en y combinant les lacets de manière à rendre la fonction uniforme sur C_k. Je prends un exemple. Posons

$$u^2 = A(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)$$

et soit $F(z, u)$ une fonction algébrique du point analytique (z, u). En dehors des points de branchement a_1, a_2, a_3, a_4, la fonction $F(z, u)$ ne peut admettre que des pôles où elle est uniforme. Dans ces conditions on peut donner au contour C la forme I de la figure 4 car il est visible que celui-ci peut être

engendré par un contour très petit qui entoure d'abord l'origine O et qui grandit sans franchir aucun point singulier. On peut ensuite passer de la forme I à la forme II car on ne supprime ainsi que des chemins qui se détruisent. Enfin prenant les lacets de la figure II par un point de leur partie rectiligne et amenant ce point en O on arrive à la forme III, les lacets et le contour circulaire devant être parcourus comme les flèches l'indiquent.

Le long du contour circulaire la fonction $F(z, u)$ est uniforme et, par suite,

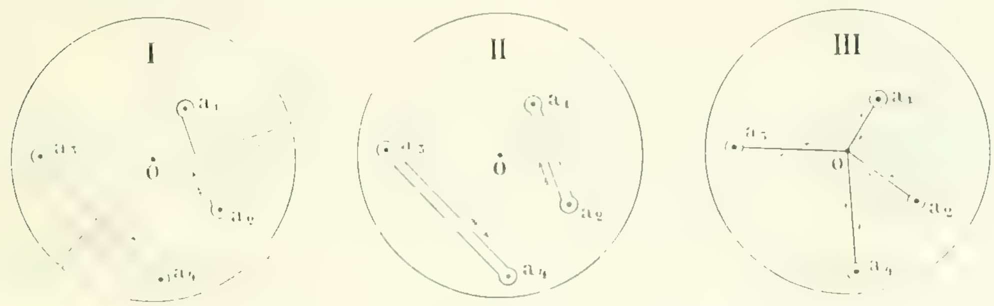

Fig. 4.

développable par la formule de LAURENT. Le raisonnement du n° 16 est encore applicable et l'intégrale de la formule (I) contient encore le sigma terminal des formules (A) ou (D). Quant au second sigma de ces formules il serait à remplacer par la somme de quatre intégrales égales à

$$\frac{1}{2i\pi}\int \left(\frac{z}{x}\right)^{p+1} \varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right) \frac{F(z, u)\,dz}{z-x}$$

prise suivant les lacets Oa.

Quant aux termes provenant des pôles uniformes ils ne donneraient lieu à aucun raisonnement nouveau.

Toulouse, le 31 Mars 1909.[1]

[1] Depuis que ce Mémoire est écrit j'ai réalisé quelques progrès quant aux théories y contenues. J'ai pu notamment représenter, par des séries de polynômes S_n et en faisant usage de fonctions sommatrices pourvues de zéros, des fonctions dont les développements tayloriens ne peuvent avoir qu'un rayon de convergence nul. Ces fonctions sont analogues à celles que M. H. POINCARÉ introduit en Mécanique Céleste en les représentant par des séries asymptotiques. On trouvera une Note sur ce sujet dans les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* du 13 juin 1910.

SUR LES FORMULES DE GREEN GÉNÉRALISÉES QUI SE PRÉSENTENT DANS L'HYDRODYNAMIQUE ET SUR QUELQUES-UNES DE LEURS APPLICATIONS.

Par

C. W. OSEEN

à UPSAL.

Seconde partie. Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans la théorie d'un fluide visqueux et compressible.

Notre but dans cette partie de notre travail sera de donner des formules, analogues à celle de Green et se rapportant au calcul de la fonction σ du système:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + (\lambda+\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta u,\\
\frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial y} + (\lambda+\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta v,\\
\frac{\partial w}{\partial t} &= Z - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial z} + (\lambda+\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta w,\\
\Theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},\\
\frac{\partial \sigma}{\partial t} &+ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad \text{A.}$$

$$\varkappa > 0,\ \lambda + 2\mu > 0,\ \mu > 0.$$

ou de ceux que l'on obtient en supposant $Z = w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$ ou $Y = Z = v = w = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$. Ces systèmes servent à déterminer le mouvement infiniment lent d'un fluide visqueux et compressible à température constante. Par nos formules le calcul de la fonction σ sera réduit au problème de déterminer une certaine solution particulière du système A etc., où l'on pose $X = Y = Z = 0$ et où l'on remplace t par $-t$. Une fois la fonction σ connue on n'aura pour calculer u, v, w qu'à résoudre trois équations du type:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = X + \mu \Delta U$$

avec des conditions à limite données.

Notre but dans cette seconde partie est, comme on le vois, plus restreint que dans la première. Evidemment, on peut aller plus loin et donner des formules explicites pour u, v, w. Cependant, à l'état actuel de nos connaissances expérimentales et théoriques, ces formules ne nous paraissent pas avoir un très grand intérêt. C'est pour quoi nous nous bornerons aux formules mentionnées, qui servent à calculer la fonction σ. Seulement dans le cas limite $\lambda + 2\mu = 0$, nous développerons aussi les formules explicites pour u, v, w en nous restreignant d'ailleurs au problème à trois dimensions.

I

Sur une équation aux dérivées partielles dans la physique mathématique et sur le mouvement rectiligne d'un fluide visqueux et compressible.

1. Soit donnée l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 2a \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + b^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Phi(x, t) \qquad 1.$$

$$(a > 0,\ b > 0),$$

où $\Phi(x, t)$ est une fonction continue de x et t, qui pour des valeurs de $|x|$ assez grandes satisfait à l'inégalité:

$$|\Phi(x, t)| < A_1 |x|^{n_1},$$

n_1 étant un nombre entier positif et A_1 une constante positive. Nous nous pro-

posons de chercher, pour des valeurs de t positives, une solution $\varphi(x, t)$ de cette équation telle que:

$$\lim_{t=0} \varphi(x, t) = \varphi_0(x), \quad \lim_{t=0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_1(x),$$

où $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ sont des fonctions continues de x, remplissant pour des valeurs de x assez grandes, positives ou négatives, des inégalités de la forme:

$$|\varphi_0(x)|, |\varphi_1(x)| < A_2 |x|^{n_2}.$$

Considérons à cet effet l'équation adjointe de 1:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -2a \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial t} + b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Supposons qu'il soit possible de trouver une solution $\psi(x, t; x_0, t_0)$ de cette équation avec les propriétés suivantes:

1: $\psi(x, t; x_0, t_0)$ doit pour $0 \leq t < t_0$ et pour $|x - x_0| > 0$ être une fonction continue de x, t, douée des dérivées continues de tous les ordres par rapport à x, t;

2: on doit avoir:

$$\lim_{t=t_0} \psi(x, t; x_0, t_0) = 0, \quad \lim_{t=t_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

$$\lim_{t=t_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{8a(t_0-t)}}}{\sqrt{t_0 - t}} \right) = 0,$$

la convergence vers la valeur limite étant uniforme pour toutes les valeurs de x;

3: on doit avoir pour $t < t_0$:

$$\lim_{x=x_0+0} \psi(x, t; x_0, t_0) = \lim_{x=x_0-0} \psi(x, t; x_0, t_0),$$

$$\lim_{x=x_0+0} \left(2a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - b^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \lim_{x=x_0-0} \left(2a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - b^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right);$$

4: quel que soit le nombre entier et positif n_3, il doit exister un nombre positif A_{n_3}, tel que l'on ait pour des valeurs de $|x|$ assez grandes et pour $0 \leq t \leq t_0$:

$$|\psi|, \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}\right| < A_{n_3} |x|^{-n_3}.$$

Formons alors les équations:

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_0^L \left[\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 2a\left(\psi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + \varphi \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial t}\right) - b^2\left(\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) - \psi \Phi\right] dx = 0,$$

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{-L}^0 \left[\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 2a\left(\psi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + \varphi \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial t}\right) - b^2\left(\psi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2} - \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) - \psi \Phi\right] dx = 0.$$

En intégrant par parties, nous obtenons:

$$\int_0^L \Big|_0^{t_0-\varepsilon} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} + 2a \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx - \int_0^L \int_0^{t_0-\varepsilon} \psi \Phi \, dx\, dt =$$

$$= \int_0^{t_0-\varepsilon} \Big|_0^L \left[2a\left(\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}\right) + b^2\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right] dt,$$

$$\int_{-L}^0 \Big|_0^{t_0-\varepsilon} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} + 2a \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx - \int_{-L}^0 \int_0^{t_0-\varepsilon} \psi \Phi \, dx\, dt =$$

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} \Big|_{-L}^0 \left[2a\left(\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}\right) + b^2\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right] dt.$$

Supposons maintenant que, T étant un certain nombre positif, il existe un nombre entier positif n_4 et un nombre positif A_4 tels que l'on ait pour $0 \leq t \leq T$:

$$|\varphi|, \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}\right| < A_4 |x|^{n_4}.$$

Nous pouvons alors dans les équations précédentes, si $t_0 < T$, faire L tendre vers l'infini et nous aurons en les sommant:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big|_0^{t_0-\varepsilon} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} + 2a \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{t_0-\varepsilon} \psi \Phi \, dx\, dt = 0.$$

Faisons enfin ε tendre vers zéro. Nous obtenons:

$$2\sqrt{2a\pi}\, \varphi(x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2a \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{t=0} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{t_0} \psi \Phi \, dx\, dt. \qquad 3.$$

Notre problème est donc, du moins dans des cas très généraux, réduit au problème de déterminer la fonction fondamentale $\psi(x, t; x_0, t_0)$.

2. Pour calculer la fonction fondamentale nous partons de la fonction $Q_1(x, t)$, définie par l'expression:

$$\int_{\frac{b}{a}}^{\infty} e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t} \cos kx\, dk + \int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t} \cos k(x + t\sqrt{b^2-a^2k^2})\, dk, \qquad 4.$$

où les racines carrées doivent être prises avec leurs signes positifs. On voit immédiatement que cette expression pour $t < 0$ définit une fonction continue de x et t, douée de dérivées continues de tous les ordres et que cette fonction satisfait à l'équation 2. Pour étudier de plus près ses propriétés nous en chercherons d'abord d'autres expressions analytiques. Posons à cette effet $k = k_1 + i k_2$. Traçons dans le plan des k_1, k_2 une coupure du point $-\frac{b}{a}$ au point $+\frac{b}{a}$ le long de la ligne droite entre ces deux points. Nous aurons de cette manière deux points distincts à l'origine, l'un au-dessus et l'autre au-dessous de la coupure. Soit A le premier point et B l'autre. Convenons à donner à la racine carrée $\sqrt{b^2-a^2k^2}$ la valeur $+b$ dans le point A. Cette racine sera alors une fonction uniforme de k dans tout le plan du k, pourvu, toutefois, qu'on ne dépasse pas la coupure. Soit enfin C le point $k = +\frac{b}{a}$.

Nous avons:

$$Q_1(x, t) = \text{partie réelle de: } \int_A^{\infty} e^{(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})t+ikx}\, dk, \qquad 5.$$

l'intégrale prise le long de l'axe des nombres réels et positifs. Posons:

$$(ak^2 + ik\sqrt{b^2-a^2k^2})\, t + ikx = -K.$$

Donc:

$$Q_1(x, t) = \text{partie réelle de} \int_A^{\infty} e^{-K}\, dk.$$

Considérons maintenant l'expression $ik\sqrt{b^2-a^2k^2}$. Lorsque k s'éloigne du point $\frac{b}{a}$ le long de l'axe des nombres réels, cette expression est positve et tend d'ailleurs vers l'infini en même temps que k. Supposons maintenant que k s'éloigne de l'origine le long d'un rayon vecteur qui fait avec l'axe des nombres réels et positifs un angle positif φ. Posons par exemple $k_1 = \xi \cos\varphi$, $k_2 = \xi \sin\varphi$. Il est

à attendre que, l'angle φ étant assez petit, la partie réelle de notre expression sera positive pour des valeurs de ξ assez grandes. On a en effet:

$$a^2k^4 - b^2k^2 = a^2(k_1^4 - 6k_1^2k_2^2 + k_2^4) - b^2(k_1^2 - k_2^2) + 2ik_1k_2[2a^2(k_1^2 - k_2^2) - b^2].$$

L'hyperbole:

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{b^2}{2a^2}$$

constitue donc la frontière entre le domaine, où la partie réelle est positive, et celui, où elle est négative. Donc, si $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{4}$, la partie réelle sera positive pour des valeurs de ξ assex grandes et on aura pour ces valeurs:

$$|e^{-K}| < |e^{ak^2t+ikx}|,$$

pourvu que $t < 0$. Il s'ensuit que, pour ces valeurs de t, l'intégrale:

$$\int e^{-K}dk,$$

prise de long d'un arc du cercle $k_1^2 + k_2^2 = \xi^2$, du point $k_1 = \xi$, $k_2 = 0$ au point $k_1 = \xi \cos\varphi$, $k_2 = \xi \sin\varphi$, où $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$, converge vers zéro, lorsque ξ tend vers l'infini. On conclut de là que pour $t < 0$:

$$Q_1(x, t) = \text{partie réelle de} \int_A^\infty e^{-K}dk,$$

l'intégrale prise le long d'un rayon vecteur qui fait avec l'axe des nombres réels et positifs un angle positif φ, plus petit que $\frac{\pi}{4}$. En d'autres termes:

$$Q_1(x, t) = \text{partie réelle de:} \int_0^\infty e^{(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})t+i\xi x\cos\varphi-\xi x\sin\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi)d\xi, \quad 6.$$

où:

$$k = \xi(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

et où:

$$\sqrt{b^2 - a^2k^2} = +b$$

pour $k = 0$.

Formons enfin une dernière expression analytique pour la fonction $Q_1(x, t)$. Nous avons:

$$Q_1(x, t) = \text{partie réelle de:} \int_A^\infty e^{-K}dk =$$

$$\text{partie réelle de: } \int_A^C e^{-K}dk + \int_C^B e^{-K}dk + \int_B^\infty e^{-K}dk,$$

l'intégrale dernière étant prise le long de l'axe de k_1. Or:

$$\int_A^C e^{-K}dk + \int_C^B e^{-K}dk = -2\int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t}\sin kx \sin[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}]\,dk.$$

Au lieu de prendre l'intégrale:

$$\int_B^\infty e^{-K}dk$$

le long du chemin indiqué, on peut la prendre le long d'un rayon vecteur quelconque, qui fait avec l'axe des nombres réels et positifs un angle φ qui satisfait aux inégalités $0 \geqq \varphi > -\frac{\pi}{4}\cdot$ Nous avons donc, toujours pour $t < 0$:

$$Q_1(x,t) = -2\int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t}\sin kx \sin[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}]\,dk +$$

$$\text{partie réelle de: } \int_0^\infty e^{(ak^2-ik\sqrt{b^2-a^2k^2})t+i\xi x\cos\varphi-\xi x\sin\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\xi \qquad 7.$$

On a ici:

$$k = \xi(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ 0 > \varphi > -\frac{\pi}{4}\cdot$$

et:

$$\sqrt{b^2-a^2k^2} = +b$$

pour $k = 0$.

Supposons maintenant que x soit plus grand qu'une quantité positive δ, arbitrairement petite mais fixe. Partons de l'expression 6. Nous pouvons ici faire t tendre vers zéro et nous voyons que $Q_1(x,t)$ tend uniformément vers la partie réelle de:

$$\int_0^\infty e^{i\xi x\cos\varphi-\xi x\sin\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\xi = \int_0^\infty e^{ikx}\,dk \qquad 8.$$

Comme l'intégrale:

$$\int e^{ikx}\,dk,$$

prise du point $k = \xi(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(\varphi > 0)$ au point $k = i\xi$ le long de l'arc du cercle $k_1^2 + k_2^2 = \xi^2$, qui ne traverse pas l'axe des nombres réels, tend vers zéro,

lorsque ξ croît au delà de toute limite, il s'ensuit que, dans l'expression 8, nous pouvons donner à φ la valeur $\frac{\pi}{2}\cdot$ Nous avons donc, si $x>\delta$:

$$\lim_{t=0} Q_1(x,t) = \text{partie réelle de: } i\int_0^{\infty} e^{-\xi x}\, d\xi = 0.$$

On démontre de la même manière que, si $x>\delta$, toutes les dérivées de la fonction $Q_1(x,t)$ par rapport à x ou t tendent vers zéro en même temps que t.

Si x est négatif, nous faisons usage de la formule 7. Lorsque t tend vers 0, la première intégrale à droite converge uniformément vers zéro pour toute valeur de x. Dans la seconde intégrale nous pouvons, si $x<-\delta$, $\delta>0$, immédiatement poser $t=0$. Puis nous pouvons prendre $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ et nous obtenons:

$$\lim_{t=0} Q_1(x,t) = 0.$$

On démontre de la même manière:

$$\lim_{t=0} \frac{\partial^i Q_1(x,t)}{\partial x^i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

si $x<-\delta$.

Considérons maintenant la dérivée $\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\cdot$ Cherchons la valeur limite de cette fonction pour des valeurs négatives de x, quand t tend vers 0. La première intégrale à droite dans 7 nous donne:

$$-2\int_0^{\frac{b}{a}} k\sqrt{b^2-a^2k^2}\,\sin kx\,dk,$$

tandis que la seconde intégrale donne un résultat, dont la partie réelle est nulle. Nous avons donc pour $x<-\delta$:

$$\lim_{t=0} \frac{\partial Q_1(x,t)}{\partial t} = -2\int_0^{\frac{b}{a}} k\sqrt{b^2-a^2k^2}\,\sin kx\,dk.$$

Nous obtenons de la même manière pour $x<-\delta$:

$$\lim_{t=0} \frac{\partial^2 Q_1(x,t)}{\partial x\,\partial t} = -2\int_0^{\frac{b}{a}} k^2\sqrt{b^2-a^2k^2}\,\cos kx\,dk$$

etc.

De même que $Q_1(x, t)$ la fonction $Q_2(x, t)$, définie par l'expression:

$$\int\limits_{\frac{b}{a}}^{\infty} e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t} \cos kx\,dk + \int\limits_{0}^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t} \cos k(x - t\sqrt{b^2-a^2k^2})\,dk,$$

où l'on prend les racines carrées avec leurs signes positifs, satisfait pour $t < 0$ à l'équation 2. Pour toute valeur de x positive, la fonction elle-même et toutes ses dérivées par rapport à x tendent vers zéro avec t. On a de plus pour $x < -\delta$:

$$\lim_{t=0} \frac{\partial Q_2(x, t)}{\partial t} = 0, \quad \lim_{t=0} \frac{\partial^2 Q_2(x, t)}{\partial x\,\partial t} = 0,$$

etc., et pour $x > \delta$:

$$\lim_{t=0} \frac{\partial Q_2(x, t)}{\partial t} = 2\int\limits_{0}^{\frac{b}{a}} k\sqrt{b^2-a^2k^2} \sin kx\,dk,$$

$$\lim_{t=0} \frac{\partial^2 Q_2(x, t)}{\partial x\,\partial t} = 2\int\limits_{0}^{\frac{b}{a}} k^2\sqrt{b^2-a^2k^2} \cos kx\,dk,$$

etc.

Nous définissons maintenant une fonction $Q(x, t)$ par les égalités:

$$Q(x, t) = Q_1(x, t)$$

si $x > 0$, et:

$$Q(x, t) = Q_2(x, t)$$

si $x < 0$.

$Q(x, t)$ est pour $t < 0$ une fonction continue de x et t, douée de dérivées de tous les ordres, continues pour toute valeur positive ou négative de x. Ces dérivées satisfont à l'équation 2. Pour toute valeur de x différente de 0, on a:

$$\lim_{t=0} \frac{\partial^{i+j} Q(x, t)}{\partial x^i\,\partial t^j} = 0.$$

Pour étudier la fonction $Q(x, t)$ dans le voisinage du point $x = 0$, $t = 0$, nous la comparerons avec la fonction suivante:

$$F(x, t) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t} \cos kx\,dk - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-2at}}\, e^{\frac{x^2}{8at}-\frac{b^2t}{2a}}.$$

Nous avons:

$$Q(x,t) - F(x,t) = \int\limits_{\frac{b}{a}}^{\infty} \left[e^{\left(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2}\right)t} - e^{\left(2ak^2 - \frac{b^2}{2a}\right)t} \right] \cos kx\,dk +$$

$$+ \int\limits_0^{\frac{b}{a}} \left[e^{ak^2t} \cos\left[kt\sqrt{b^2 - a^2k^2}\right] - e^{\left(2ak^2 - \frac{b^2}{2a}\right)t} \right] \cos kx\,dk \mp$$

$$\mp \int\limits_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t} \sin\left[kt\sqrt{b^2 - a^2k^2}\right] \sin kx\,dk,$$

où l'on doit prendre le signe — ou + suivant que $x \gtrless 0$.

Posons:

$$ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2} = 2ak^2 - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3k^2}\varphi(a,b,k).$$

Nous aurons, si $k > \frac{b}{a}$:

$$\varphi(a,b,k) = 1 + \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2k^2} + \frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4k^4} + \ldots,$$

d'où l'on conclut que, pour $k > \frac{b}{a}$, $\varphi(a,b,k)$ est une fonction positive. Pour $k = \frac{b}{a}$ cette fonction a la valeur 4. Lorsque k croît, φ décroît et tend vers la valeur 1, quand k croît vers l'infini. Nous avons donc:

$$e^{\left(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2}\right)t} - e^{\left(2ak^2 - \frac{b^2}{2a}\right)t} = e^{\left(2ak^2 - \frac{b^2}{2a}\right)t}\left(e^{-\frac{b^4\varphi t}{8a^3k^2}} - 1\right).$$

Or on a, si α est une quantité positive:

$$e^{\alpha} - 1 < \alpha e^{\alpha}.$$

Donc, si $t < 0$, $k \geq \frac{b}{a}$:

$$e^{\left(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2}\right)t} - e^{\left(2ak^2 - \frac{b^2}{2a}\right)t} < \frac{b^4\varphi|t|}{8a^3k^2} e^{\left(2ak^2 - \frac{b^2}{2a}\right)t - \frac{b^4\varphi t}{8a^3k^2}} = \frac{b^4\varphi|t|}{8a^3k^2} e^{\left(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2}\right)t}.$$

Comme (pour $t < 0$):

$$\left| \int\limits_{\frac{b}{a}}^{\infty} \frac{\varphi(a,b,k)}{k^2} e^{\left(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2}\right)t} \cos kx\,dk \right| < \int\limits_{\frac{b}{a}}^{\infty} \frac{\varphi(a,b,k)\,dk}{k^2} < 4\int\limits_{\frac{b}{a}}^{\infty} \frac{dk}{k^2} = \frac{4a}{b},$$

on voit que, pour $t < 0$:

$$\left|\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}\left[e^{\left(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}\right)t}-e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t}\right]\cos kx\,dk\right|<\frac{2b^3}{a^2}|t|.$$

On a évidemment des inégalités analogues pour les deux autres intégrales dans la différence $Q(x,t)-F(x,t)$. Nous voyons donc que l'on peut trouver un nombre positif $A^{a,b}$, dépendant de a et b et tel que l'on a pour toute valeur de x et pour toute valeur négative de t:

$$\left|Q(x,t)-\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-2at}}e^{\frac{x^2}{8at}-\frac{b^2t}{2a}}\right|<A^{a,b}|t|. \qquad 9.$$

Nous étudions de la même manière la dérivée $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Nous avons:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}e^{\left(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}\right)t}\,k\sin kx\,dk-\int_0^{\frac{b}{a}}e^{ak^2t}\,k\left[\sin kx\cos\left[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]\pm\right.$$

$$\left.\pm\cos kx\sin\left[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]\right]dk$$

et:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\int_0^{\infty}e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t}\,k\sin kx\,dk=-\frac{x\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{-2at^3}}e^{\frac{x^2}{8at}-\frac{b^2t}{2a}}.$$

Or on a:

$$\left|\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}\left[e^{\left(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}\right)t}-e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t}\right]k\sin kx\,dk\right|<$$

$$<\frac{b^4|t|}{8a^3}\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}\varphi\,e^{\left(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}\right)t}\,\frac{dk}{k}<\frac{4b^4|t|}{8a^3}\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}e^{ak^2t}\,\frac{dk}{k}.$$

La fonction:

$$(1+|x|)\,e^{-|x|}$$

a sa plus grande valeur pour $x=0$. Donc, pour $t<0$:

$$e^{ak^2t}<\frac{1}{1-ak^2t}.$$

Par conséquent:

$$\int_{b}^{\zeta} e^{ak^2t}\frac{dk}{k} < \int_{b}^{\infty}\frac{dk}{k(1-ak^2t)} = \frac{1}{2}\log\frac{a-b^2t}{-b^2t}.$$

Soit α un nombre positif plus petit que 1. La fonction:

$$(-t)^{1-\alpha}\log\frac{a-b^2t}{-b^2t}$$

est alors une fonction continue de t pour $t<0$ et tend vers zéro avec t. Nous voyons donc qu'a tout nombre positif T et tout nombre positif α plus petit que 1 correspond un nombre positif $A^{T,\alpha}$ tel que l'on a pour toute valeur de x et pour $-T \leqq t \leqq 0$:

$$\left|\int_{b}^{\sigma}\left[e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t} - e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t}\right]k\sin kx\,dk\right| < A^{T,\alpha}(-t)^{\alpha}.$$

Il est clair que l'on peut prendre $A^{T,\alpha}$ assez grand pour que l'on ait aussi pour $-T\leqq t\leqq 0$:

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{x\sqrt{\pi}\,e^{\frac{x^2}{8at}-\frac{b^2t}{2a}}}{4\sqrt{-2a^3t^3}}\right| < A^{T,\alpha}(-t)^{\alpha}. \qquad 10.$$

On démontre d'une manière analogue que l'on a:

$$\left|\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right| = \left|\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{\pi}\,e^{\frac{x^2}{8at}-\frac{b^2t}{2a}}}{4\sqrt{-2a^3t^3}}-\frac{x^2\sqrt{\pi}\,e^{\frac{x^2}{8at}-\frac{b^2t}{2a}}}{16\sqrt{-2a^5t^5}}\right| < B^{a,b}(-t)^{\frac{1}{2}}, \qquad 11.$$

$B^{a,b}$ étant une certaine constante positive, dépendant de a et b.

Considérons maintenant la fonction $P_1(x,t)$, définie par l'équation:

$$P_1(x,t) = -\int_{t}^{0} Q(x,\tau)\,d\tau.$$

Cette fonction est, pour $t<0$, une fonction continue de x et t, douée de dérivées de tous les ordres, continues pour $x \gtreqless 0$. La dérivée par rapport à t est encore continue dans le voisinage de $x=0$, tandis que la dérivée par rapport à x y présente une discontinuité. $P_1(x,t)$ est d'ailleurs une fonction paire de x.

Comme nous avons pour $x \gtreqless 0$:

$$\lim_{t=0} Q(x,t) = \lim_{t=0}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = 0\ldots,$$

nous voyons que pour ces valeurs de x:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\int_t^0 Q(x,\tau)\,d\tau = -\int_t^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau} + 2a\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \tau} - b^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) Q(x,\tau)\,d\tau = 0.$$

$P_1(x, t)$ satisfait donc, pour toute valeur de x positive ou négative à l'équation 2. Pour les valeurs de x qui satisfont à l'inégalité $|x| > \delta\ (\delta > 0)\ P_1(x, t)$ et toutes ses dérivées convergent uniformément vers zéro avec t. On a d'ailleurs pour toute valeur de x:

$$\left| P_1(x, t) + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}} \int_t^0 e^{\frac{x^2}{8a\tau} - \frac{b^2\tau}{2a}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} \right| < \frac{A^{a,b}\, t^2}{2}, \tag{12.}$$

$$\left| \frac{\partial P_1(x,t)}{\partial x} - \frac{x\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2a^3}} \int_t^0 e^{\frac{x^2}{8a\tau} - \frac{b^2\tau}{2a}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau^3}} \right| < \frac{A^{T,\alpha}(-t)^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, \tag{13.}$$

$$(0 < \alpha < 1,\ -T \leq t < 0)$$

$$\left| \frac{\partial^2 P_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2a^3}} \int_t^0 e^{\frac{x^2}{8a\tau} - \frac{b^2\tau}{2a}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau^3}} + \frac{x^2\sqrt{\pi}}{16\sqrt{2a^5}} \int_t^0 e^{\frac{x^2}{8a\tau} - \frac{b^2\tau}{2a}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau^5}} \right| < 2B^{a,b}(-t)^{\frac{3}{2}}. \tag{14.}$$

Cherchons enfin des expressions analytiques pour $P_1(x,t)$. En partant de la formule 5 nous obtenons pour $x > 0$:

$$P_1(x, t) = \text{partie réelle de:} \int_0^\infty \frac{e^{-K} - e^{ikx}}{ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2}}\,dk = \int_0^\infty \frac{e^{ikx}\left(e^{(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2})t} - 1\right)dk}{ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2}}.$$

$$k = \xi(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi = \text{const.}\quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

$$\sqrt{a^2k^2 - b^2} = +ib \text{ pour } k = 0.$$

Nous avons de même pour $x < 0$:

$$P_1(x, t) = \text{partie réelle de:} \int_0^\infty \frac{e^{-ikx}\left(e^{(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2})t} - 1\right)dk}{ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2}},$$

$$k = \xi(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi = \text{const.},\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{4},\ \sqrt{a^2k^2 - b^2} = +ib \text{ pour } k = 0.$$

De ces formules, nous déduisons la suivante:

$$P_1(x,t) = \int\limits_{\frac{b}{a}}^{\infty} \frac{e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t}-1}{ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}} \cos kx\,dk + \int\limits_{0}^{\frac{b}{a}} \left[\frac{a}{b^2}\left\{e^{ak^2t}\cos k\left(|x|+t\sqrt{b^2-a^2k^2}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \cos kx\right\} + \frac{\sqrt{b^2-a^2k^2}}{b^2k}\left\{e^{ak^2t}\sin k\left(|x|+t\sqrt{b^2-a^2k^2}\right) - \sin k|x|\right\}\right] dk, \qquad 15.$$

où les racines carrées doivent être prises avec leurs signes positifs.

La fonction:

$$2a\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial t} - b^2\frac{\partial P_1}{\partial x}$$

présente une discontinuité pour $x = 0$. Cherchons maintenant une nouvelle solution $P_2(x,t)$ de l'équation 2, qui remplit les conditions suivantes. Elle doit être continue pour $t < 0$ et pour toute valeur de x. Pour $t = 0$ elle doit s'évanouir ainsi que les dérivées premières par rapport à x et t. Enfin, elle doit satisfaire à la condition:

$$\lim_{x=\pm 0}\left(2a\frac{\partial^2 P_2}{\partial x\partial t} - b^2\frac{\partial P_2}{\partial x}\right) = \lim_{x=\pm 0}\left(2a\frac{\partial^2 P_1}{\partial x\partial t} - b^2\frac{\partial P_1}{\partial x}\right).$$

Nous avons pour $x > 0$:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \text{partie réelle de: } i\int\limits_{A}^{\infty}\frac{e^{-K}-e^{ikx}}{ak+\sqrt{a^2k^2-b^2}}\,dk,$$

$$k = \xi(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi = \text{const.},\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

Or:

$$i\int\limits_{A}^{\infty}\frac{e^{ikx}\,dk}{ak+\sqrt{a^2k^2-b^2}} = i\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-\xi x}\,d\xi}{a\xi+\sqrt{b^2+a^2\xi^2}}.$$

Donc, pour $x > 0$:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \text{partie réelle de: } i\int\limits_{A}^{\infty}\frac{e^{-K}\,dk}{ak+\sqrt{a^2k^2-b^2}}.$$

Nous obtenons donc:

$$\lim_{x=+0}\left(2a\frac{\partial^2 P_1}{\partial x\partial t} - b^2\frac{\partial P_1}{\partial x}\right) = -\int\limits_{0}^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t}\left\{ak\sin\left[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \sqrt{b^2-a^2k^2}\cos\left[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]\right\} dk.$$

On obtient de même:

$$\lim_{x=-0}\left(2a\frac{\partial^2 P_1}{\partial x\partial t}-b^2\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)=+\int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t}\{ak\sin[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}]+$$
$$+\sqrt{b^2-a^2k^2}\cos[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}]\}\,dk.$$

Donc, si nous posons:

$$ak\sin[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}]+\sqrt{b^2-a^2k^2}\cos[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}]=S(k,t),$$

$$\lim_{x=\pm 0}\left(2a\frac{\partial^2 P_1}{\partial x\partial t}-b^2\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)=\mp\int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t}S(k,t)\,dk.$$

Posons:

$$P_2(x,t)=\int_t^0 \chi(\tau)\,Q(x,t-\tau)\,d\tau$$

et cherchons à déterminer la fonction $\chi(\tau)$ de telle manière que $P_2(x,t)$ obtienne les propriétées énumerées plus haut.

Tout d'abord, nous voyons que, si $\chi(\tau)$ est une fonction continue de τ, $P_2(x,t)$ est une fonction de x, t, continue pour toute valeur de x et pour $t<0$ et douée de dérivées continues de tous les ordres pour $t<0$ et pour $|x|>0$. Ces dérivées satisfont d'ailleurs à l'équation 2, puisque:

$$\lim_{t=0} Q(x,t)=\lim_{t=0}\frac{\partial Q}{\partial x}=\lim_{t=0}\frac{\partial Q}{\partial t}=\lim_{t=0}\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial t}=0$$

pour $|x|>0$. L'inégalité 9 montre que $P_2(x,t)$ tend uniformément vers zéro avect t pour toute valeur de x. L'inégalité 10 montre de plus que l'on a pour $-T<t<0$:

$$\left|\frac{\partial P_2(x,t)}{\partial x}\right|<\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2a^3}}\int_t^0 |x\chi(\tau)|e^{-\frac{x^2}{8a(\tau-t)}+\frac{b^2}{2a}(\tau-t)}\frac{d\tau}{\sqrt{(\tau-t)^3}}+\frac{A^{T,a}(-t)^{a+1}}{a+1}\operatorname*{Max.}_{t<\tau\leq 0}|\chi(\tau)|<$$

$$\left\{\frac{\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{b^2t}{2a}}}{4\sqrt{2a^3}}\int_t^0\frac{|x|\,e^{-\frac{x^2}{8a(\tau-t)}}}{(\tau-t)^{3/2}}\,d\tau+\frac{A^{T,a}(-t)^{a+1}}{a+1}\right\}\operatorname*{Max.}_{t<\tau\leq 0}|\chi(\tau)|<$$

$$\left\{\frac{\pi}{a}\,e^{-\frac{b^2t}{2a}}+\frac{A^{T,a}(-t)^{a+1}}{a+1}\right\}\operatorname*{Max.}_{t<\tau\leq 0}|\chi(\tau)|.$$

Cette inégalité montre que, si $\chi(0)=0$, $\frac{\partial P_2}{\partial x}$ tend uniformément vers zéro avec t.

On démontre de la même manière, en s'appuyant sur l'inégalité II, que $\left| x \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \right|$, lorsque t tend vers zéro, reste fini pour toute valeur de x et s'annule, si $\chi(0) = 0$.

Supposons donc que $\chi(0) = 0$. Supposons en outre que $\chi(\tau)$ admette une dérivée continue. Nous avons alors pour $x \gtrless 0$:

$$\frac{\partial P_2(x,t)}{\partial t} = \int_t^0 \chi(\tau) \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial t} \partial \tau = -\int_t^0 \chi(\tau) \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial \tau} d\tau = \int_t^0 \frac{d\chi}{d\tau} Q(x, t-\tau)\, d\tau,$$

équation valable aussi pour $x = 0$. Il suit de là que $\frac{\partial P_2}{\partial t}$ pour toute valeur de x converge uniformément vers zéro avec t. Il suit aussi que $\frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial t}$ et $x \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^2 \partial t}$ pour toute valeur de x restent finis, lorsque t tend vers 0.

Il ne reste donc qu'à montrer que l'on peut trouver une fonction continue $\chi(\tau), (\tau \leqq 0)$, qui s'évanouit pour $\tau = 0$, admet une dérivée continue et remplit la condition:

$$\lim_{x=\pm 0} \int_t^0 \chi(\tau) \left[2a \frac{\partial^2 Q(x, t-\tau)}{\partial x \partial t} - b^2 \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial x} \right] d\tau$$

$$\lim_{x=\pm 0} \int_t^0 \left(2a \frac{d\chi}{dt} - b^2 \chi \right) \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial x} d\tau = \mp \int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2 t} S(k,t)\, dk.$$

Posons, pour simplifier l'écriture:

$$2a \frac{d\chi}{d\tau} - b^2 \chi = \chi_1(\tau)$$

et cherchons des expressions explicites pour les valeurs limites:

$$\lim_{x=\pm 0} \int_t^0 \chi_1(\tau) \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial x} d\tau.$$

Nous avons d'après la formule 4:

$$\lim_{x=\pm 0} \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial x} = \pm \int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)} \sin\left[k(\tau - t)\sqrt{b^2 - a^2 k^2}\right] dk,$$

la convergence étant uniforme pour les valeurs de t et τ qui remplissent la condition $\tau - t > \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$. Nous avons de plus, en vertu de l'inégalité 10:

$$\left| \int_t^{t+\varepsilon} \chi_1(\tau) \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\sqrt{\pi}\, x}{4\sqrt{2a^3}} \int_t^{t+\varepsilon} \chi_1(\tau)\, e^{-\frac{x^2}{8a(\tau - t)} - \frac{b^2}{2a}(\tau - t)} \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau - t)^3}} \right| <$$

$$< \frac{A^{\varepsilon, \alpha}\, \varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \underset{t+\varepsilon > \tau > t}{\mathrm{Max.}} |\chi_1(\tau)|.$$

Donc:

$$\left| \int_t^{t+\varepsilon} \chi_1(\tau) \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\sqrt{\pi}\, x\, \chi_1(t)}{4\sqrt{2a^3}} \int_t^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{8a(\tau-t)}}}{\sqrt{(\tau - t)^3}} d\tau - \frac{\sqrt{\pi}\, x\, \chi_1(t)}{4\sqrt{2a^3}} \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{8a(\tau-t)}}}{\sqrt{(\tau - t)^3}} d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\pi}\, x}{4\sqrt{2a^3}} \int_t^{t+\varepsilon} \left[\chi_1(\tau)\, e^{\frac{b^2}{2a}(\tau - t)} - \chi_1(t) \right] \frac{e^{-\frac{x^2}{8a(\tau-t)}}}{\sqrt{(\tau - t)^3}} d\tau \right| < \frac{A^{\varepsilon, \alpha}\, \varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \underset{t+\varepsilon > \tau > t}{\mathrm{Max.}} |\chi_1(\tau)|.$$

Donc:

$$\left| \int_t^{t+\varepsilon} \chi_1(\tau) \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\pi\, x\, \chi_1(t)}{2a|x|} \right| < \frac{A^{\varepsilon, \alpha}\, \varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \underset{t+\varepsilon > \tau > t}{\mathrm{Max.}} |\chi_1(\tau)| +$$

$$+ \frac{\pi}{2a} \underset{t+\varepsilon > \tau > t}{\mathrm{Max.}} \left| \chi_1(\tau)\, e^{\frac{b^2}{2a}(\tau - t)} - \chi_1(t) \right| + \frac{\sqrt{\pi}\, |x\, \chi_1(t)|}{2\sqrt{8a^3\varepsilon}}.$$

Faisons maintenant x tendre vers zéro et en même temps t tendre vers une valeur quelconque t_1, plus petite que 0. Soit δ un nombre positif aussi petit que l'on veut. Nous pouvons alors trouver deux nombres positifs ε_1 et $\varepsilon_2\ (\varepsilon_2 < \varepsilon_1)$, assez petits pour que, si $|t - t_1| < \varepsilon_2$:

$$\left| \int_t^{t_1+\varepsilon_1} \chi_1(\tau)\, d\tau \int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau - t)} \sin\left[k(\tau - t)\sqrt{b^2 - a^2 k^2}\right] dk \right| +$$

$$+ \frac{A^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \alpha} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \underset{t_1+\varepsilon_1 > \tau > t_1 - \varepsilon_2}{\mathrm{Max.}} |\chi_1(\tau)| + \frac{\pi}{2a} \underset{t_1+\varepsilon_1 > \tau > t > t_1 - \varepsilon_2}{\mathrm{Max.}} \left|\chi_1(\tau)\, e^{\frac{b^2}{2a}(\tau - t)} - \chi_1(t)\right| < \frac{\delta}{2}.$$

Puis nous pouvons trouver un nombre positif ε_3, assez petit pour que les inégalités:

$$|t - t_1| < \varepsilon_2, \ |x| < \varepsilon_3,$$

entraînent l'inégalité:

$$\left|\int\limits_{t_1+\varepsilon_1}^{0} \chi_1(\tau)\frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x}d\tau - \frac{x}{|x|}\int\limits_{t_1+\varepsilon_1}^{0}\chi_1(\tau)\,d\tau\int\limits_{0}^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)}\sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]dk\right| +$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\,|x\,\chi_1(t)|}{\sqrt{8a^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}} < \frac{\delta}{2}.$$

On conclut de ces inégalités que l'on a pour $|t-t_1| < \varepsilon_2$, $|x| < \varepsilon_3$:

$$\left|\int\limits_{t}^{0}\chi_1(\tau)\frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x}d\tau + \frac{\pi\,x\,\chi_1(t)}{2a|x|} -\right.$$

$$\left. - \frac{x}{|x|}\int\limits_{t}^{0}\chi_1(\tau)\,d\tau\int\limits_{0}^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)}\sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]dk\right| \leqq$$

$$\left|\int\limits_{t}^{t_1+\varepsilon_1}\chi_1(\tau)\frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x}d\tau + \frac{\pi\,x\,\chi_1(t)}{2a|x|}\right| + \left|\int\limits_{t_1+\varepsilon_1}^{0}\chi_1(\tau)\frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x}d\tau -\right.$$

$$\left.-\frac{x}{|x|}\int\limits_{t_1+\varepsilon_1}^{0}\chi_1(\tau)\,d\tau\int\limits_{0}^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)}\sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]dk\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{t}^{t_1+\varepsilon_1}\chi_1(\tau)\,d\tau\int\limits_{0}^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)}\sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]dk\right| <$$

$$A^{\varepsilon_1+\varepsilon_2,\alpha}\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\underset{t_1+\varepsilon_1>\tau>t_1-\varepsilon_2}{\text{Max.}}|\chi_1(\tau)| + \frac{\pi}{2a}\underset{t_1+\varepsilon_1>\tau>t_1-\varepsilon_2}{\text{Max.}}\left|\chi_1(\tau)\,e^{\frac{b^2}{2a}(\tau-t)} - \chi_1(t)\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{t}^{t_1+\varepsilon_1}\chi_1(\tau)\,d\tau\int\limits_{0}^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)}\sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]dk\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{t_1+\varepsilon_1}^{0}\chi_1(\tau)\frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x}d\tau - \frac{x}{|x|}\int\limits_{t_1+\varepsilon_1}^{0}\chi_1(\tau)\,d\tau\int\limits_{0}^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)}\sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]dk\right| +$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\,|x\,\chi_1(t)|}{\sqrt{8a^3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Nous avons donc:

$$\lim_{x=\pm 0} \int_t^0 \chi_1(\tau) \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial x} d\tau$$

$$\mp \left(\frac{\pi \chi_1(t_1)}{2a} - \int_{t_1}^0 \chi_1(\tau)\, d\tau \int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau - t)} \sin \left[k(\tau - t)\sqrt{b^2 - a^2 k^2}\right] dk \right).$$

Pour déterminer la fonction $\chi_1(\tau)$, nous avons donc enfin l'équation:

$$\chi_1(t) - \frac{2a}{\pi} \int_t^0 \chi_1(\tau)\, d\tau \int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau - t)} \sin\left[k(\tau - t)\sqrt{b^2 - a^2 k^2}\right] dk = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2 t} S(k, t)\, dk. \quad 16.$$

C'est là une équation fonctionelle du type considéré par M. VOLTERRA. Nous aurons:

$$\chi_1(t) = \sum_1^r \chi_1^{(i)}(t), \quad 17.$$

où:

$$\chi_1^{(i)}(t) = \frac{2a}{\pi} \int_t^0 \chi_1^{(i-1)}(\tau)\, d\tau \int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau - t)} \sin\left[k(\tau - t)\sqrt{b^2 - a^2 k^2}\right] dk, \quad 18.$$

$$i = 2, 3, 4 \ldots$$

$$\chi_1^{(1)}(t) = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2 t} S(k, t)\, dk. \quad 19.$$

$\chi_1(t)$ admet des dérivées continues de tous les ordres. Nous avons enfin:

$$\chi(t) = \sum_1^r \chi^{(i)}(t), \quad 20.$$

$$\chi^{(i)}(t) = -\frac{1}{2a} \int_t^0 e^{-\frac{b^2}{2a}(\tau - t)} \chi_1^{(i)}(\tau)\, d\tau, \quad 21.$$

$$P_2(x, t) = \int_t^0 \chi(\tau) Q(x, t - \tau)\, d\tau = \sum_1^r P_2^{(i)}(x, t), \quad 22.$$

$$P_2^{(i)}(x, t) = \int_t^0 \chi^{(i)}(\tau) Q(x, t - \tau)\, d\tau. \quad 23.$$

La fonction:

$$\psi(x, t; x_0, t_0) = \psi(x - x_0, t_0 - t) = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\pi}} \left(P_1(x - x_0, t - t_0) - P_2(x - x_0, t - t_0)\right)$$

est définie et continue pour toute valeur de x et pour $t \leq t_0$. Elle admet des dérivées de tous les ordres, continues pour $x \gtrless x_0$. Elle a les propriétés prétendues dans le voisinage de $x = x_0$ et de $t = t_0$. Reste à faire voire que, quel que soit le nombre entier et positif n_3, elle satisfait à des inégalités de la forme:

$$|\psi|, \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}\right| < A_{n_3} |x|^{-n_3}.$$

pour des valeurs assez grandes de $|x|$.

Je dis d'abord que, si deux nombres positifs T et R et deux nombres entiers et positifs m et n sont donnés, on peut trouver un nombre positif $A^{T, R, m, n}$ tel que l'on a pour $0 \leq t_0 - t \leq T$, $|x - x_0| \geq R$:

$$\left|\frac{\partial^m Q(x - x_0, t - t_0)}{\partial x^m}\right| < \frac{A^{T, R, m, n}(t_0 - t)}{|x - x_0|^n}. \qquad 24.$$

Traitons d'abord le cas $m = 0$. Supposons, pour fixer les idées, $x - x_0 > 0$. Nous aurons:

$$Q(x - x_0, t - t_0) = \text{partie réelle de: } \int_A^{\infty} e^{-(ak^2 + ik\sqrt{b^2 - a^2k^2})(t_0 - t) + ik(x - x_0)}\, dk,$$

l'intégrale prise le long d'un rayon vecteur qui fait avec l'axe des nombres réels et positifs un angle positif $< \frac{\pi}{4}$.

Donc:

$$Q(x - x_0) = \text{partie réelle de: } \int_A^{\infty} e^{-(ak^2 + ik\sqrt{b^2 - a^2k^2})(t_0 - t)} \frac{d}{dk} \frac{e^{ik(x - x_0)}}{i(x - x_0)}\, dk =$$

$$\text{partie réelle de: } \frac{i}{x - x_0} + \frac{i}{x - x_0} \int_A^{\infty} \frac{d}{dk} e^{-(ak^2 + ik\sqrt{b^2 - a^2k^2})(t_0 - t)} \cdot e^{ik(x - x_0)}\, dk$$

$$\text{partie réelle de: } \frac{i}{x - x_0} \int_A^{\infty} \frac{d}{dk} e^{-(ak^2 + ik\sqrt{b^2 - a^2k^2})(t - t_0)} \cdot e^{ik(x - x_0)}\, dk.$$

Rien ne nous empêche d'intégrer par parties encore une fois et nous obtenons:

$$Q(x - x_0, t - t_0) = \text{partie réelle de: } -\frac{1}{(x - x_0)^2} \left[\frac{d}{dk} e^{-(ak^2 + ik\sqrt{b^2 - a^2k^2})(t_0 - t)}\right]_A$$

$$-\frac{1}{(x-x_0)^2}\int_A^\infty \frac{d^2}{dk^2}\left(e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)}\right)e^{ik(x-x_0)}\,dk =$$

$$\text{partie réelle de: } -\frac{1}{(x-x_0)^2}\int_A^\infty \frac{d^2}{dk^2}\left(e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)}\right)e^{ik(x-x_0)}\,dk.$$

Si l'on observe que pour $k = 0$ toutes les dérivées d'ordre pair de la fonction:

$$e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)}$$

par rapport à k sont réelles tandis que les dérivées d'ordre impair sont imaginaires, on voit que l'on peut répéter le même procédé autant de fois que l'on veut. On a donc:

$Q(x-x_0, t-t_0) =$ partie réelle de:

$$\frac{1}{(x-x_0)^n}\int_A^\infty i^n\frac{d^n}{dk^n}\left(e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)}\right)e^{ik(x-x_0)}\,dk,$$

l'intégrale prise toujours le long du même rayon vecteur. On voit aisément que la fonction sous le signe d'intégration est égale à:

$$e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)+ik(x-x_0)},$$

multipliée par une fonction rationnelle de t_0-t, k et $\sqrt{b^2-a^2k^2}$, qui d'ailleurs contient t_0-t comme facteur. Ce facteur, nous l'avons fait paraître dans la formule 24. L'ayant supprimé, nous remplaçons dans tout dénominateur de notre fonction rationnelle qui ne peut être qu'une dignité de $\sqrt{b^2-a^2k^2}$, cette expression par la plus petite valeur de son module sur le chemin d'intégration. Cette valeur est d'ailleurs égale à $b\sin\varphi$. Dans les numérateurs nous remplaçons chaque nombre par son module et t_0-t par T. Dans l'exponentielle nous remplaçons l'exposant par sa partie réelle et posons $t_0-t=0$ sur la partie du chemin de l'intégration où la partie réelle de

$$ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}$$

est positive et $t_0-t=T$ sur l'autre partie. Par tous ces changements, la valeur numérique de la partie réelle de notre intégrale s'augmente, du moins si $t_0-t \leq T$. Nous avons donc pour les valeurs de t, qui remplissent cette condition, et pour $x > x_0$ une inégalité de la forme:

$$|Q(x \quad x_0, t - t_0)| <$$

$$< \frac{t_0 - t}{(x - x_0)^n}\left[\int_0^{\xi_0} f_n^{(1)}(\xi, \sqrt{b^2 + a^2\xi^2}, T)\, e^{-\text{partie r. d.}\,(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2})\,T - \xi \sin\varphi\,(x - x_0)}\, d\xi \,+\right.$$

$$\left. + \int_{\xi_0}^{\infty} f_n^{(2)}(\xi, \sqrt{b^2 + a^2\xi^2}, T)\, e^{-\xi \sin\varphi\,(x - x_0)}\, d\xi\right].$$

Pour $m = 0$ et pour $x > x_0$, l'inégalité 24 est donc vraie, pourvu que:

$$A^{T, R, 0, n} \geqq \int_0^{\xi_0} f_n^{(1)}\, e^{-\text{partie r. d.}\,(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2})\,T - \xi\sin\varphi\, R}\, d\xi + \int_{\xi_0}^{\infty} f_n^{(2)}\, e^{-\xi\sin\varphi\, R}\, d\xi.$$

$Q(x - x_0, t - t_0)$ étant une fonction paire de $x - x_0$, l'inégalité 24 est encore satisfaite pour $x - x_0 < -R$.

Passons au cas général. Le seul effet d'une dérivation par rapport à x est d'introduire dans notre intégrale un facteur ik. Or cela n'altère pas la propriété de la fonction de k et $t_0 - t$ sous le signe d'intégration qui est ici la fondamentale, à savoir que les dérivées d'ordre pair sont réelles pour $k = 0$ et les dérivées d'ordre impair imaginaires. Nous avons donc pour $x - x_0 > 0$:

$\dfrac{\partial^m Q(x - x_0, t - t_0)}{\partial x^m} =$ partie réelle de:

$$\frac{1}{(x - x_0)^n}\int_A^{\gamma} i^{n+m}\, \frac{d^n}{dk^n}\left(k^m\, e^{-(ak^2 + ik\sqrt{b^2 - a^2k^2})\,(t_0 - t)}\right)\, e^{ikx}\, dk$$

et pour $x - x_0 < 0$ une formule analogue. D'où la formule 24.

Il résulte de cette formule que l'on a pour $t_0 - t \leqq T$, $|x - x_0| \geqq k$:

$$\left|\frac{\partial^m P_1(x - x_0, t - t_0)}{\partial x^m}\right| < \frac{A^{T, R, m, n}\,(t_0 - t)^2}{2\,|x - x_0|^n}. \qquad 25.$$

Comme:

$$P_2(x - x_0, t - t_0) = \int_{t - t_0}^{0} \chi(\tau)\, Q(x - x_0, t - t_0 - \tau)\, d\tau,$$

nous voyons en outre que pour $t_0 - t \leqq T$, $|x - x_0| \geqq R$:

$$\left|\frac{\partial^m P_2(x - x_0, t - t_0)}{\partial x^m}\right| < \frac{A^{T, R, m, n}\,(t_0 - t)^2}{2\,|x - x_0|^n} \underset{0 > \tau > t - t_0}{\text{Max.}} |\chi(\tau)|.$$

On voit donc que l'on peut trouver des nombres positifs $B^{T, R, m, n}$ tels que:

$$\left|\frac{\partial^m \psi(x, t; x_0, t_0)}{\partial x^m}\right| < \frac{B^{T, R, m, n}(t_0 - t)^2}{|x - x_0|^n} \qquad 26.$$

pour $t_0 - t \leq T$, $|x - x_0| \geq R$.

Comme:

$$\frac{\partial P_2(x - x_0, t - t_0)}{\partial t} = \int\limits_{t-t_0}^{0} \frac{d\chi}{d\tau} Q(x - x_0, t - t_0 - \tau)\, d\tau$$

il est aussi possible de trouver des nombres positifs $C^{T, R, m, n}$ tels que:

$$\left|\frac{\partial^{m+1} \psi(x, t; x_0, t_0)}{\partial x^m \partial t}\right| < \frac{C^{T, R, m, n}(t_0 - t)}{|x - x_0|^n} \qquad 27.$$

pour $0 \leq t_0 - t \leq T$, $|x - x_0| \geq R$.

C'est une conséquence immédiate de ces formules que l'on peut trouver des nombres A_{n_3} tels que l'on a:

$$|\psi|, \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}\right| < A_{n_3} |x|^{-n_3}$$

pour $0 \leq t_0 - t \leq T$ et pour des valeurs assez grandes de $|x|$.

Nous avons donc démontré que notre fonction $\psi(x, t; x_0, t_0)$ a toutes les propriétés caractéristiques de la fonction fondamentale cherchée.

Remarquons enfin que les fonctions:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t; x_0, t_0)}{\partial x \partial t} + \frac{(x - x_0) e^{-\frac{(x-x_0)^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{4a\sqrt{(t_0 - t)^3}},$$

$$(x - x_0)\left[\frac{\partial^3 \psi(x, t; x_0, t_0)}{\partial x^2 \partial t} + \left(1 - \frac{(x - x_0)^2}{4a(t_0 - t)}\right) \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{4a\sqrt{(t_0 - t)^3}}\right]$$

pour toute valeur de x, même dans le voisinage de $x = x_0$, restent finies, lorsque $t_0 - t$ tend vers 0.

3. Dans les applications a est toujours un nombre très petit. Il y a donc un grand intérêt à savoir comment se comporte $\psi(x, t; x_0, t_0)$, quand a tend vers zéro. Malheureusement, c'est là une question assez difficile que nous ne pouvons pas traiter ici dans toute son étendue. Nous chercherons dans ce paragraphe une expression asymptotique pour la fonction $P_1(x, t)$. Puis nous montrerons que les fonctions $P_2^{(i)}(x, t)$ tendent vers zéro avec a pour toutes les valeurs de x et de t ($t < 0$) sauf peut-être sur certaines droites dans le plan des x et t

où d'aillleurs elles restent finies. Evidemment ces résultats ne suffisent pas pour faire dans la formule 3 le passage à la limite $a = 0$.

Je dis d'abord que $Q(x, t)$ et toutes ses dérivées tendent uniformément vers zéro avec a pour toutes les valeurs de x et t qui remplissent une des conditions suivantes:

$$x + bt > \delta, \quad x - bt < -\delta$$
$$(\delta > 0).$$

Nous démontrerons que $Q(x, t)$ tend uniformément vers zéro pour les valeurs de x et t qui satisfont à la première condition. Le reste de notre théorème peut être démontré de la même manière.

Partons de l'expression 6. Déterminons φ par les conditions:

$$\sin^4\varphi - 6\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^4\varphi = 0, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}\cdot$$

Nous aurons alors sur le chemin d'intégration:

$$\text{partie réelle de: } -(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2})\,t - ikx = -a(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\xi^2 t -$$
$$-\frac{\xi t}{\sqrt{2}}\sqrt{-b^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \sqrt{b^4(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)^2 + 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,(2a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\xi^2 - b^2)^2}} +$$
$$+ \xi x \sin\varphi.$$

La racine carrée intérieure doit être prise avec son signe positif. L'extérieure doit être prise négative pour $\xi = 0$. Elle s'annule pour:

$$\xi = \xi_0 = \frac{b}{a\sqrt{2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}}\cdot$$

Pour des valeurs de ξ plus grandes elle est positive. Sa valeur numérique décroît lorsque ξ varie de 0 jusqu'à ξ_0. Puis elle va en croissant. On voit donc que la racine carrée extérieure toujours va en croissant quand ξ varie de 0 à l'infini. Donc:

$$\text{partie réelle de: } -(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2})\,t - ikx >$$
$$\xi \sin\varphi\,(x + bt) > \xi\delta\sin\varphi.$$

Soit maintenant ε une quantité positive aussi petite que l'on veut. On peut alors déterminer un nombre R assez grand pour que:

$$\int_R^\infty e^{-\xi\delta\sin\varphi}\,d\xi = \frac{e^{-R\delta\sin\varphi}}{\delta\sin\varphi} < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

On a alors:

$$\left|\int_{Re^{i\varphi}}^{\alpha} e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})\,t+ikx}\,dk\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|\int_{Re^{i\varphi}}^{\alpha} e^{ik(x+bt)}\,dk\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On peut en outre déterminer un nombre positif a_0 tel que l'inégalité $a < a_0$ entraîne l'inégalité:

$$\left|\int_{A}^{Re^{i\varphi}} e^{-K}\,dk - \int_{A}^{Re^{i\varphi}} e^{ik(x+bt)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a donc:

$$\left|\int_{A}^{\infty} e^{-K}\,dk - \int_{0}^{\alpha} e^{ik(x+bt)}\,dk\right| < \varepsilon.$$

Or la partie réelle de:

$$\int_{0}^{\alpha} e^{ik(x+bt)}\,dk$$

est nulle. Donc:

$$|Q(x,t)| < \varepsilon,$$

si $a < a_0$. Donc:

$$\lim_{a=0} Q(x,t) = 0,$$

pour les valeurs de x et $t\,(< 0)$ qui remplissent la condition

$$x + bt > \delta.$$

Nous savons par le théorème précédent comment se comporte la fonction $Q(x,t)$, quand $-t$ est un nombre petit (sauf pour des valeurs de $|x|$ très petites). Nous supposerons maintenant que $-t$ soit plus grand qu'un certain nombre positif t'. Supposons, pour fixer les idées, que x soit positif ou nul et partons de l'expression 4. Posons:

$$k = \frac{-\xi}{bt} \cdot \frac{b^2 t}{a};$$

Nous aurons:

$$Q(x,t) = -\frac{1}{bt}\int\limits_{\beta}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}-\xi\sqrt{\frac{\xi^2}{\beta^2}-1}} \cos\frac{\xi x}{bt}\,d\xi - \frac{1}{bt}\int\limits_{0}^{\beta} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos\left(\frac{\xi x}{bt}+\xi\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right)d\xi.$$

Nous chercherons la valeur limite de cette fonction lorsque β tend vers l'infini. Nous avons:

$$\left|\int\limits_{\beta}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}-\xi\sqrt{\frac{\xi^2}{\beta^2}-1}} \cos\frac{\xi x}{bt}\,d\xi\right| < \int\limits_{\beta}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}}\,d\xi < \frac{1}{\beta}\int\limits_{\beta}^{\infty} \xi e^{-\frac{\xi^2}{\beta}}\,d\xi = \frac{1}{2}e^{-\beta}.$$

Donc, la première intégrale dans notre expression pour $Q(x,t)$ tend vers zéro.

Suppons que β soit plus grand que 1. Soit p un nombre positif plus petit que $\frac{1}{2}$. Nous aurons:

$$\left|\int\limits_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^{\beta} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos\left(\frac{\xi x}{bt}+\xi\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right)d\xi\right| < \int\limits_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^{\beta} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}}\,d\xi < \frac{1}{\beta^{\frac{1}{2}+p}}\int\limits_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^{\beta} \xi e^{-\frac{\xi^2}{\beta}}\,d\xi < \frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{2}-p}e^{-\beta^{2p}}.$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int\limits_{0}^{\beta^{\frac{1}{2}+p}} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos\left(\frac{\xi x}{bt}+\xi\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right)d\xi.$$

Elle peut s'écrire:

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos\xi\left(\frac{x}{bt}+1\right)d\xi - \int\limits_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos\xi\left(\frac{x}{bt}+1\right)d\xi +$$

$$+\int\limits_{0}^{\beta^{\frac{1}{2}+p}} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}}\left[\left\{\cos\left[\xi\left(1-\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right)\right]-1\right\}\cos\xi\left(\frac{x}{bt}+1\right)+\left\{\sin\left[\xi\left(1-\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right)\right]-\frac{\xi^3}{2\beta^2}\right\}\sin\xi\left(\frac{x}{bt}+1\right)\right]d\xi + \frac{1}{2\beta^2}\int\limits_{0}^{\infty} \xi^3 e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \sin\xi\left(\frac{x}{bt}+1\right)d\xi$$

$$-\frac{1}{2\beta^2}\int\limits_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^{\infty} \xi^3 e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \sin\xi\left(\frac{x}{bt}+1\right)d\xi.$$

Or:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos \xi \left(\frac{x}{bt} + \mathrm{I}\right) d\xi = \frac{\sqrt{\pi\beta}}{2} e^{-\frac{\beta}{4}\left(\frac{x}{bt}+1\right)^2} = \frac{b\sqrt{-\pi t}}{2\sqrt{a}} e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}}.$$

$$\left| \int_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^\infty e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos \xi \left(\frac{x}{bt} + \mathrm{I}\right) d\xi \right| < \frac{\mathrm{I}}{2} \beta^{\frac{1}{2}-p} e^{-\beta^{2p}}.$$

Si $p < \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}2}$, les fonctions:

$$\sqrt{\beta}\left\{\cos\left[\xi\left(\mathrm{I} - \sqrt{\mathrm{I} - \frac{\xi^2}{\beta^2}}\right)\right] - \mathrm{I}\right\}, \quad \sqrt{\beta}\left\{\sin\left[\xi\left(\mathrm{I} - \sqrt{\mathrm{I} - \frac{\xi^2}{\beta^2}}\right)\right] - \frac{\xi^3}{2\beta^2}\right\}$$

tendent uniformément vers zéro dans l'intervalle $0 \leq \xi \leq \beta^{\frac{1}{2}+p}$. Nous avons donc:

$$\left| \int_0^{\beta^{\frac{1}{2}+p}} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \left\{\cos \xi \left(\mathrm{I} - \sqrt{\mathrm{I} - \frac{\xi^2}{\beta^2}}\right) - \mathrm{I}\right\} \cos \xi \left(\frac{x}{bt} + \mathrm{I}\right) d\xi \right| <$$

$$< \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{\beta}} \varepsilon(\beta) \int_0^{\beta^{\frac{1}{2}+p}} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} d\xi < \varepsilon(\beta) \int_0^\infty e^{-u^2} du,$$

$$\left| \int_0^{\beta^{\frac{1}{2}+p}} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \left\{\sin \xi \left(\mathrm{I} - \sqrt{\mathrm{I} - \frac{\xi^2}{\beta^2}}\right) - \frac{\xi^3}{2\beta^2}\right\} \sin \xi \left(\frac{x}{bt} + \mathrm{I}\right) d\xi \right| <$$

$$< \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{\beta}} \varepsilon(\beta) \int_0^{\beta^{\frac{1}{2}+p}} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} d\xi < \varepsilon(\beta) \int_0^\infty e^{-u^2} du,$$

$\varepsilon(\beta)$ désignant une fonction de β qui tend vers zéro, lorsque β croît au delà de toute limite. Nous avons enfin:

$$\frac{\mathrm{I}}{2\beta^2} \int_0^\infty \xi^3 e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \sin \xi \left(\frac{x}{bt} + \mathrm{I}\right) d\xi = \frac{b^3 t^3}{2\beta^2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos \xi \left(\frac{x}{bt} + \mathrm{I}\right) d\xi =$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\, b^3 t^3}{4\beta^{3/2}} \frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{-\frac{\beta}{4}\left(\frac{x}{bt}+1\right)^2} = \frac{\mathrm{I}}{4} \sqrt{-\pi a^3 t^3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}},$$

$$\left| \frac{\mathrm{I}}{2\beta^2} \int_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^\infty \xi^3 e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \sin \xi \left(\frac{x}{bt} + \mathrm{I}\right) d\xi \right| < \frac{\mathrm{I}}{2} \int_{\beta^p}^\infty u^3 e^{-u^2} du.$$

Si l'on observe que les fonctions:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-at}}e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}}, \quad \frac{\sqrt{-\pi a^3 t}}{4b}\frac{\partial^3}{\partial x^3}e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}}$$

tendent vers zéro avec a pour toutes les valeurs de x et t qui remplissent les conditions:

$$t \leq 0, x \geq 0, |x+bt| > \delta, \delta > 0$$

on peut du théorème démontré plus haut et de ces inégalités tirer la conséquence suivante: Pour les valeurs de x et t qui remplissent les conditions:

$$0 \geq t \geq -t', x \geq 0, x - bt > \delta \ (\delta > 0)$$

on a:

$$\left| Q(x,t) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-at}}e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}} + \frac{\sqrt{-\pi a^3 t}}{4b}\frac{\partial^3}{\partial x^3}e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}} \right| < \varepsilon(a), \qquad 28.$$

où $\varepsilon(a)$ tend vers zéro avec a.

Comme $Q(x,t)$ est une fonction paire de x nous pouvons immédiatement du théorème précédent déduire un théorème analogue pour $x \leq 0$. Si $x \leq 0$, $0 > t \geq -t'$, $x + bt < -\delta \ (\delta > 0)$ on a:

$$\left| Q(x,t) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-at}}e^{\frac{(x-bt)^2}{4at}} - \frac{\sqrt{-\pi a^3 t}}{4b}\frac{\partial^3}{\partial x^3}e^{\frac{(x-bt)^2}{4at}} \right| < \varepsilon(a). \qquad 29.$$

On démontre de la même manière les inégalités suivantes:

$$\left| \sqrt{a}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-t}}\frac{\partial}{\partial x}e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}} + \frac{\sqrt{\pi}a^2(-t)^{1/2}}{4b}\frac{\partial^4}{\partial x^4}e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}} \right| < \varepsilon(a), \qquad 30.$$

valable si $x \geq 0$, $0 > t \geq -t'$, $x - bt > \delta$,

$$\left| \sqrt{a}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-t}}\frac{\partial}{\partial x}e^{\frac{(x-bt)^2}{4at}} - \frac{\sqrt{\pi}a^2(-t)^{1/2}}{4b}\frac{\partial^4}{\partial x^4}e^{\frac{(x-bt)^2}{4at}} \right| < \varepsilon(a), \qquad 31.$$

valable pour $x \leq 0$, $0 > t \geq -t'$, $x + bt < -\delta$.

Il résulte de ces inégalités que l'on a pour $x > \delta$, $0 \geq t \geq -t'$:

$$\left| P_1(x,t) + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\int_t^0 e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} - \frac{\sqrt{\pi}a^3}{4b}\int_t^0 \frac{\partial^3}{\partial x^3}e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\sqrt{-\tau}\,d\tau \right| < \varepsilon(a), \qquad 32.$$

$$\left| \sqrt{a}\frac{\partial P_1(x,t)}{\partial x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_t^0 \frac{\partial}{\partial x}e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} - \frac{\sqrt{\pi}a^2}{4b}\int_t^0 \frac{\partial^4}{\partial x^4}e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\sqrt{-\tau}\,d\tau \right| < \varepsilon(a), \qquad 33.$$

et pour $x < -\delta$, $0 \geq t \geq t'$:

$$\left| P_1(x,t) + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \int_t^0 e^{\frac{(x-b\tau)^2}{4a\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} + \frac{\sqrt{\pi a^3}}{4b} \int_t^0 \frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{\frac{(x-b\tau)^2}{4a\tau}} \sqrt{-\tau}\, d\tau \right| < \varepsilon(a), \qquad 34.$$

$$\left| \sqrt{a}\, \frac{\partial P_1(x,t)}{\partial x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_t^0 \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{(x-b\tau)^2}{4a\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} + \frac{\sqrt{\pi}\, a^2}{4b} \int_t^0 \frac{\partial^4}{\partial x^4} e^{\frac{(x-b\tau)^2}{4a\tau}} \sqrt{-\tau}\, d\tau \right| < \varepsilon(a). \qquad 35.$$

On peut remarquer que les fonctions:

$$a^2 \int_t^0 \frac{\partial^4}{\partial x^4} e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}} \sqrt{-\tau}\, d\tau,$$

dans les formules 33 et 35 tendent vers zéro avec a. On a donc aussi:

$$\left| \sqrt{a}\, \frac{\partial P_1(x,t)}{\partial x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_t^0 \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} \right| < \varepsilon(a), \qquad 33^*.$$

$$\left| \sqrt{a}\, \frac{\partial P_1(x,t)}{\partial x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_t^0 \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{(x-b\tau)^2}{4a\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} \right| < \varepsilon(a). \qquad 35^*.$$

Considérons maintenant la fonction $P_1(x,t)$ dans le voisinage de la valeur $x = 0$. Nous avons d'après la formule 15:

$$P_1(x,t) = \int_{\frac{b}{a}}^{\infty} \frac{e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t} - 1}{ak^2 + k\sqrt{a^2k^2-b^2}} \cos kx\, dk + \int_0^{\frac{b}{a}} \left[\frac{a}{b^2} \left\{ e^{ak^2t} \cos k\left(|x| + t\sqrt{b^2-a^2k^2}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \cos kx \right\} + \frac{\sqrt{b^2-a^2k^2}}{b^2 k} \left\{ e^{ak^2t} \sin k\left(|x| + t\sqrt{b^2-a^2k^2}\right) - \sin k|x| \right\} \right] dk,$$

les racines carrées prises avec leurs signes positifs.

Or:

$$\left| \int_{\frac{b}{a}}^{\infty} \frac{e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t} - 1}{ak^2 + k\sqrt{a^2k^2-b^2}} \cos kx\, dk \right| < \frac{1}{a} \int_{\frac{b}{a}}^{\infty} \frac{dk}{k^2} < \frac{1}{b},$$

$$\left| \frac{a}{b^2} \int_0^{\frac{b}{a}} \left\{ e^{ak^2t} \cos k\left(|x| + t\sqrt{b^2-a^2k^2}\right) - \cos kx \right\} dk \right| < \frac{2a}{b^2} \int_0^{\frac{b}{a}} dk = \frac{2}{b},$$

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2-a^2k^2}}{b^2 k} \sin k|x|\,dk = \int_0^{b|x|} \frac{\sqrt{b^2x^2-\eta^2}}{b^2|x|} \sin\frac{\eta}{a}\,\frac{d\eta}{\eta}.$$

Nous avons donc:

$$\lim_{a=0} \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2-a^2k^2}}{b^2 k} \sin k|x|\,dk = \frac{\pi\sqrt{b^2x^2}}{2b^2|x|} = \frac{\pi}{2b},$$

si $|x| > 0$,

$$= 0,$$

si $x = 0$. On a d'ailleurs pour toute valeur de x:

$$\left|\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2-a^2k^2}}{b^2 k} \sin k|x|\,dk\right| < \frac{1}{b}\int_0^{\pi} \frac{\sin\eta}{\eta}\,d\eta.$$

Reste à étudier l'intégrale:

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2-a^2k^2}}{b^2 k} e^{ak^2t} \sin k\left(|x| + t\sqrt{b^2-a^2k^2}\right) dk.$$

Elle peut s'écrire:

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2-a^2k^2}}{b^2 k} e^{ak^2t}\left[\sin k\left(|x| + t\sqrt{b^2-a^2k^2}\right) - \sin k\left(|x| + bt\right)\right] dk +$$

$$+ \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2-a^2k^2}}{b^2 k} e^{ak^2t} \sin k\left(|x| + bt\right) dk.$$

Or:

$$\left|\sin k\left(|x| + t\sqrt{b^2-a^2k^2}\right) - \sin k\left(|x| + bt\right)\right| =$$

$$2\left|\sin\frac{1}{2}kt\left(b - \sqrt{b^2-a^2k^2}\right)\cos k\left(|x| + \frac{t}{2}\left(b + \sqrt{b^2-a^2k^2}\right)\right)\right| <$$

$$kt\left(b - \sqrt{b^2-a^2k^2}\right) < \frac{a^2k^3t}{b}\operatorname*{Max.}_{0\le x\le 1}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{a^2k^3t}{b}.$$

Donc:

$$\left|\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}}{b^2 k} e^{ak^2 t}\left[\sin k\left(|x| + t\sqrt{b^2 - a^2 k^2}\right) - \sin k\left(|x| + bt\right)\right] dk\right|$$

$$< -\frac{a^2 t}{b^3}\int_0^{\frac{b}{a}} k^2 \sqrt{b^2 - a^2 k^2}\, e^{ak^2 t}\, dk < -\frac{1}{2b}\int_0^{\frac{b}{a}} 2atk e^{ak^2 t}\, dk = \frac{1}{2b}\left(1 - e^{\frac{b^2 t}{a}}\right) < \frac{1}{2b}.$$

Enfin:

$$\left|\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}}{b^2 k} e^{ak^2 t} \sin k\left(|x| + bt\right) dk\right| < \frac{1}{b}\int_0^{\pi} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta.$$

Il résulte de ces inégalités que l'on peut trouver un nombre positif A_6 tel que:

$$|P_1(x, t)| < \frac{A_6}{b} \qquad 36.$$

pour toute valeur de x, de t (≤ 0), de a (> 0) et de b (> 0).

La fonction $P_2(x, t)$ est définie par les équations 16—23. Pour voir comment elle se comporte quand a tend vers zéro, nous remarquons d'abord que les intégrales:

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{2ak}{\pi} e^{-ak^2(\tau - t)} \sin\left[k(\tau - t)\sqrt{b^2 - a^2 k^2}\right] dk,$$

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{2a}{\pi} e^{ak^2 t} S(k, t)\, dk$$

peuvent s'écrire de la manière suivante:

$$\frac{2}{\pi a}\int_0^b l e^{-\frac{l^2(\tau - t)}{a}} \sin\left[\frac{l(\tau - t)}{a}\sqrt{b^2 - l^2}\right] dl \qquad 37.$$

et:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^b e^{\frac{l^2 t}{a}}\left\{l \sin\left[\frac{lt\sqrt{b^2 - l^2}}{a}\right] + \sqrt{b^2 - l^2}\cos\left[\frac{lt\sqrt{b^2 - l^2}}{a}\right]\right\} dl \qquad 38.$$

Cela étant, je dis que $\chi_1^{(i)}(t)$ et par conséquent $\chi_1(t)$ ne contiennent a et t que dans la combinaison $\frac{t}{a}$. Pour déterminer $\chi_1^{(i)}(t)$ nous avons les équations:

$$\chi_1^{(i)}(t) = \frac{2a}{\pi}\int_t^0 \chi_1^{(i-1)}(r)\,dr \int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(r-t)} \sin\left[k(r-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right] dk,$$

$$\chi_1^{(1)}(t) = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2 t}\, S(k, t)\, dk.$$

La dernière équation montre immédiatement que $\chi_1^{(1)}(t)$ ne contient a et t que dans la combinaison $\frac{t}{a}$. Supposons que cela soit encore vrai pour $\chi_1^{(2)}(t), \chi_1^{(3)}(t) \cdots \chi_1^{(i-1)}(t)$. Posons:

$$\chi_1^{(i-1)}(t) = \bar{\chi}_1^{(i-1)}\left(\frac{t}{a}\right).$$

Notre formule pour $\chi_1^{(i)}(t)$ peut s'écrire:

$$\chi_1^{(i)}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{-\frac{t}{a}} \bar{\chi}_1^{(i-1)}\left(\frac{t}{a}+u\right) du \int_0^{b} l e^{-l^2 u} \sin\left[l u \sqrt{b^2-l^2}\right] dl.$$

Elle montre que $\chi_1^{(i)}(t)$ ne contient a que dans la combinaison $\frac{t}{a}$. Notre théorème étant vrai pour $n = 1$, l'est donc aussi pour $n = 2$, $n = 3$ etc. Nous pouvons donc poser:

$$\chi_1^{(n)}(t) = \bar{\chi}_1^{(n)}\left(\frac{t}{a}\right),\ \chi_1(t) = \bar{\chi}_1\left(\frac{t}{a}\right).$$

La formule 21 qui donne $\chi^{(i)}(t)$, peut maintenant s'écriro:

$$\chi^{(i)}(t) = -\frac{1}{2a}\int_t^0 e^{-\frac{b^2}{2a}(r-t)}\, \bar{\chi}_1^{(i)}\left(\frac{r}{a}\right) dr = -\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{t}{a}} e^{-\frac{b^2 u}{2}}\, \bar{\chi}_1^{(i)}\left(\frac{t}{a}+u\right) du.$$

Nous pouvons donc écrire:

$$\chi^{(i)}(t) = \bar{\chi}^{(i)}\left(\frac{t}{a}\right).$$

Pour étudier comment se comportent les fonctions $\chi_1^{(i)}(t)$, quand a tend vers zéro, ou, ce qui revient au même, quand $-t$ tend vers l'infini, il faut maintenant approfondir l'étude des intégrales 37 et 38. Commençons par la première. Posons:

$$\frac{2}{\pi a}\int_0^b l e^{-\frac{l^2(\tau-t)}{a}} \sin\left[\frac{l(\tau-t)}{a}\right]\sqrt{b^2-l^2}\,dl = \frac{2}{\pi a}F(u),$$

où:

$$u = \frac{\tau - t}{a}.$$

Je dis que, lorsque u croît au delà de toute limite, $F(u)$, qui est une fonction continue de u pour toute valeur de u, tend vers zéro de telle manière que l'intégrale:

$$\int_0^\infty |F(u)|\,du$$

a un sens déterminé. En effet, nous avons:

$$F(u) = \int_0^b l e^{-l^2 u}\{\sin[lu\sqrt{b^2-l^2}] - \sin blu\}\,dl + \int_0^\infty l e^{-l^2 u}\sin blu\,dl - \int_b^\infty l e^{-l^2 u}\sin blu\,dl.$$

$$\left|\int_0^b l e^{-l^2 u}\{\sin[lu\sqrt{b^2-l^2}] - \sin blu\}\,dl\right|$$

$$= 2\left|\int_0^b l e^{-l^2 u}\sin\frac{1}{2}lu\{b-\sqrt{b^2-l^2}\}\cos\frac{1}{2}lu\{b+\sqrt{b^2-l^2}\}\,dl\right| <$$

$$< 2\int_0^b l e^{-l^2 u}\left|\sin\frac{1}{2}lu\{b-\sqrt{b^2-l^2}\}\right|dl <$$

$$< \int_0^b u l^4 e^{-l^2 u}\,dl \,.\, \underset{0<l<b}{\mathrm{Max.}}\frac{b-\sqrt{b^2-l^2}}{l^2} = \frac{1}{b\,u^{3/2}}\int_0^{b\sqrt{u}} m^4 e^{-m^2}\,dm < \frac{1}{b\,u^{3/2}}\int_0^\infty m^4 e^{-m^2}\,dm.$$

$$\left|\int_0^\infty l e^{-l^2 u}\sin blu\,dl\right| = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{u}}\,b e^{-\frac{b^2 u}{4}},$$

$$\left| \int_b^l l e^{-l^2 u} \sin blu\, dl \right| < \frac{1}{2u} e^{-b^2 u}.$$

Donc:

$$|F(u)| < \frac{1}{b u^{3/2}} \int_0^l m^4 e^{-m^2} dm + \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{u}} b e^{-\frac{b^2 u}{4}} + \frac{1}{2u} e^{-b^2 u} < \frac{A_7}{u^{3/2}}.$$

L'intégrale:

$$\int_0^\infty |F(u)|\, du$$

a donc bien un sens déterminé.

Je dis maintenant que l'on peut trouver un nombre positif B, tel que l'on a pour toute valeur de a positive ou nulle et pour toute valeur de i entière et positive et plus grande que 1:

$$|\chi_1^{(i)}(t)| < B \operatorname*{Max.}_{0 \geq \tau \geq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|.$$

On a en effet:

$$\chi_1^{(i)}(t) = \frac{2}{\pi a} \int_t^0 \chi_1^{(i-1)}(\tau) F\left(\frac{\tau - t}{a}\right) d\tau.$$

Donc:

$$|\chi_1^{(i)}(t)| \leq \frac{2}{\pi a} \int_t^0 \left| F\left(\frac{\tau - t}{a}\right) \right| d\tau . \operatorname*{Max.}_{0 \geq \tau \geq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^\infty |F(u)|\, du . \operatorname*{Max.}_{0 > \tau > t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|.$$

Si nous posons:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty |F(u)|\, du = B,$$

nous avons donc:

$$|\chi_1^{(i)}(t)| < B \operatorname*{Max.}_{0 > \tau > t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|.$$

Démontrons encore une autre inégalité qui nous sera utile dans les pages suivantes. On a, α étant un nombre positif plus petit que 1:

$$\chi_1^{(i)}(t) = \frac{2}{\pi a}\int_t^{\alpha t} \chi_1^{(i-1)}(\tau) F\left(\frac{\tau - t}{a}\right) d\tau + \frac{2}{\pi a}\int_{\alpha t}^{0} \chi_1^{(i-1)}(\tau) F\left(\frac{\tau - t}{a}\right) d\tau.$$

Donc:

$$|\chi_1^{(i)}(t)| < B \underset{\alpha t \geq \tau \geq t}{\mathrm{Max.}} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| + \frac{2}{\pi a} \underset{0 \geq \tau \geq t}{\mathrm{Max.}} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| \int_{\alpha t}^{0} \left| F\left(\frac{\tau - t}{a}\right)\right| d\tau$$

$$< B \underset{\alpha t > \tau > t}{\mathrm{Max.}} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| + \frac{2}{\pi} \underset{0 > \tau > t}{\mathrm{Max.}} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| \int_{\alpha t}^{0} \frac{A_7 \sqrt{a}}{(\tau - t)^{3/2}} d\tau$$

$$= B \underset{\alpha t \geq \tau \geq t}{\mathrm{Max.}} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| + \frac{4 A_7 \sqrt{a}}{\pi \sqrt{-t}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} - 1\right) \underset{0 \geq \tau \geq t}{\mathrm{Max.}} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|$$

$$< B \underset{\alpha t > \tau > t}{\mathrm{Max.}} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| + \frac{4 A_7}{\pi \sqrt{1-\alpha}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-t}} \underset{0 > \tau > t}{\mathrm{Max.}} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|.$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{2a}{\pi} e^{ak^2 t} S(k, t)\, dk = \frac{2}{\pi}\int_0^b e^{\frac{l^2 t}{a}} \left\{ l \sin\left[\frac{lt\sqrt{b^2 - l^2}}{a}\right] + \sqrt{b^2 - l^2} \cos\left[\frac{lt\sqrt{b^2 - l^2}}{a}\right]\right\} dl.$$

Nous avons:

$$\left|\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{2a}{\pi} e^{ak^2 t} S(k, t)\, dk\right| < \frac{4b}{\pi}\int_0^b e^{\frac{l^2 t}{a}} dl = \frac{4b}{\pi} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-t}} \int_0^{\frac{b\sqrt{-t}}{\sqrt{a}}} e^{-l^2} dl.$$

On voit donc que notre intégrale pour toute valeur de t, plus petite que o, tend vers zéro avec a et que l'on peut trouver deux nombres positifs B_1 et C_1, tels que:

$$\left.\begin{aligned} \left|\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{2a}{\pi} e^{ak^2 t} S(k, t)\, dk\right| &< B_1, \\ \left|\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{2a}{\pi} e^{ak^2 t} S(k, t)\, dk\right| &< \frac{C_1 \sqrt{a}}{\sqrt{-t}} \end{aligned}\right| \qquad (30.)$$

Les inégalités ci-dessus suffisent pour démontrer le théorème suivant: pour toute valeur de n entière et positive il existe deux nombres positifs, B_n et C_n, tels que:

$$|\chi_1^{(n)}(t)| < B_n, \quad |\chi_1^{(n)}(t)| < \frac{C_n \sqrt{a}}{\sqrt{-t}}.$$

Tout d'abord, ce théorème est vrai pour $n = 1$. Supposons qu'il soit vrai pour $n = i - 1$. Nous avons d'après les inégalités précédentes:

$$|\chi_1^{(i)}(t)| < B \underset{0 > \tau > t}{\text{Max.}} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|,$$

$$|\chi_1^{(i)}(t)| < B \underset{\alpha t > \tau \geq t}{\text{Max.}} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| + \frac{4 A_7}{\pi \sqrt{1-\alpha}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-t}} \underset{0 \geq \tau > t}{\text{Max.}} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|$$

$$< \frac{B C_{i-1} \sqrt{a}}{\sqrt{-\alpha t}} + \frac{4 A_7}{\pi \sqrt{1-\alpha}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-t}} \underset{0 > \tau > t}{\text{Max.}} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|.$$

Donc:

$$|\chi_1^{(i)}(t)| < B_i, \quad |\chi_1^{(i)}(t)| < \frac{C_i \sqrt{a}}{\sqrt{-t}}.$$

où:

$$B_i = B\, B_{i-1} = B^{i-1} B_1,$$

$$C_i = \frac{B C_{i-1}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{4 A_7 B_{i-1}}{\pi \sqrt{1-\alpha}}.$$

Notre théorème étant vrai pour $n = 1$, il est donc encore valable pour $n = 2$, $n = 3$ etc.

On conclut des inégalités ci-dessus:

$$|\chi^{(i)}(t)| = \left|\chi^{(i)}\left(\frac{t}{a}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{t}{a}} e^{-\frac{b^2 u}{2}} \chi_1^{(i)}\left(\frac{t}{a} + u\right) du\right| < \frac{B_i}{2}\int_0^{-\frac{t}{a}} e^{-\frac{b^2 u}{2}} du < \frac{B_i}{b^2}.$$

$$|\chi^{(i)}(t)| \leq \left|\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{\alpha t}{a}} e^{-\frac{b^2 u}{2}} \chi_1^{(i)}\left(\frac{t}{a} + u\right) du\right| + \left|\frac{1}{2}\int_{-\frac{\alpha t}{a}}^{-\frac{t}{a}} e^{-\frac{b^2 u}{2}} \chi_1^{(i)}\left(\frac{t}{a} + u\right) du\right|$$

$$< \frac{C_i}{b^2 \sqrt{1-\alpha}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-t}} + \frac{B_i}{2}\int_{-\frac{\alpha t}{a}}^{-\frac{t}{a}} e^{-\frac{b^2 u}{2}} du < \frac{C_i}{b^2 \sqrt{1-\alpha}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-t}} - \frac{B_i t}{2a} e^{\frac{b^2 \alpha t}{2a}} < \frac{D_i \sqrt{a}}{\sqrt{-t}},$$

si:

$$D_i = \frac{C_i}{b^2 \sqrt{1-\alpha}} + \frac{B_i}{b^3} \sqrt{\left(\frac{3}{\alpha e}\right)^3}.$$

Considérons maintenant les fonctions:

$$P_2^{(i)}(x, t) = \int_t^0 \chi^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right) Q(x, t-\tau)\, d\tau.$$

Je dis que l'on peut trouver des nombres positifs E_i, tels que:

$$|P_2^{(i)}(x, t)| < E_i \qquad 40.$$

pour toutes valeurs de x, t (≤ 0) et a (≥ 0). En effet:

$$|Q(x, t)| < \int_{\frac{b}{a}}^{\infty} e^{(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2})t}\, dk + \int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t}\, dk$$

$$\int_0^{\infty} e^{ak^2t}\, dk < \frac{1}{\sqrt{-at}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-at}}$$

Donc:

$$|P_2^{(i)}(x, t)| < \frac{D_i \sqrt{\pi}}{2} \int_t^0 \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau(\tau - t)}} = \frac{D_i \pi^{3/2}}{2}.$$

L'inégalité 40 est donc valable, si:

$$E_i = \frac{D_i \pi^{3/2}}{2}.$$

Soit maintenant $x > 0$. Nous avons d'après l'inégalité 28:

$$\left| P_2^{(i)}(x, t) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \int_t^0 \chi^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right) e^{\frac{[x+b(t-\tau)]^2}{4a(t-\tau)}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - t}} + \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{\pi}\, a^{3/2}}{4b} \int_t^0 \chi^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{\frac{[x+b(t-\tau)]^2}{4a(t-\tau)}} \sqrt{\tau - t}\, d\tau \right| < \frac{B_i\, \varepsilon(a)(-t)}{b^2}.$$

Or on a, δ étant un nombre positif, aussi petit que l'on veut:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{a}}\int_t^0 \chi^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right) e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-t}}\right| < \underset{-\frac{\delta}{a}\geqq u\geqq\frac{t}{a}}{\text{Max.}} \left|\chi^{(i)}(u)\right| \int_t^{-\delta} e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{a(\tau-t)}} +$$

$$+\int_{-\delta}^0 \left|\chi^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right)\right| e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{a(\tau-t)}} < \frac{D_i}{\sqrt{\delta}} \int_t^{-\delta} e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-t}} +$$

$$+ D_i \int_{-\delta}^0 e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau(\tau-t)}}.$$

Comme la fonction $e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}}$ tend uniformément vers zéro avec a pour toutes les valeurs de x, t et τ, qui remplissent les conditions:

$$\delta < -\tau \leqq -t,\ |x-b(\tau-t)| > \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$$

et comme la valeur numérique de cette fonction pour les valeurs de x, t et τ que nous avons à considérer ici est au plus égal à 1, la première intégrale tend uniformément vers zéro avec a pour toutes les valeurs de x et t, qui satisfont aux conditions:

$$x \geqq 0,\ -\delta \geqq t \geqq -T.$$

Considérons la seconde intégrale. Soit $0 \leqq x \leqq -bt - b\varepsilon\ (\varepsilon > 0)$. Prenons $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Nous aurons:

$$\int_{-\delta}^0 e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau(\tau-t)}} < e^{-\frac{b^2\varepsilon^2}{4at}} \int_t^0 \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau(\tau-t)}} = \pi e^{\frac{b^2\varepsilon^2}{4at}}.$$

Soit d'autre part $x \geqq -bt + b\varepsilon\ (\varepsilon > 0)$. Nous aurons:

$$\int_{t}^0 e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau(\tau-t)}} < \pi e^{\frac{b^2\varepsilon^2}{4at}}.$$

Pour les valeurs de x et t, qui satisfont aux conditions:

$$0 < -t < T,\ |x + bt| > \varepsilon,\ (\varepsilon > 0),$$

notre intégrale tend donc uniformément vers zéro avec a.

Pour étudier la fonction:

$$a^{3/2}\int_t^0 \overline{\chi}^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3}\, e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}}\sqrt{\tau-t}\,d\tau$$

nous remarquons d'abord que l'on a:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\, e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} = \left\{\frac{3[x-b(\tau-t)]}{4a^2(\tau-t)^2} - \frac{[x-b(\tau-t)]^3}{8a^3(\tau-t)^3}\right\} e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}}.$$

Soit A_8 un nombre positif assez grand pour que:

$$|x|^{3/2}e^{-x^2} < A_8,\quad |x|^{7/2}e^{-x^2} < A_8$$

pour toute valeur de x. Nous avons alors:

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial x^3}\, e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}}\right| < \frac{4\sqrt{2}\,A_8}{a^{5/4}(\tau-t)^{5/4}[|x-b(\tau-t)|]^{3/2}}.$$

Soit d'abord $x \geq -bt$. Nous aurons:

$$a^{3/2}\left|\int_t^0 \overline{\chi}^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3}\, e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}}\sqrt{\tau-t}\,d\tau\right| <$$

$$< \frac{4\sqrt{2}\,a^{1/4}A_8B_i}{b^2}\int_t^{t+\frac{x}{b}}\frac{d\tau}{(\tau-t)^{3/4}[x-b(\tau-t)]^{1/2}} = \frac{4\sqrt{2}\,a^{1/4}A_8B_i}{x^{1/4}b^{9/4}}\int_0^1\frac{du}{u^{3/4}(1-u)^{1/2}}.$$

Si au contraire $x < -bt$, nous aurons:

$$a^{3/2}\left|\int_t^0 \overline{\chi}^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3}\, e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}}\sqrt{\tau-t}\,d\tau\right| <$$

$$< \frac{4\sqrt{2}\,a^{1/4}A_8B_i}{x^{1/4}b^{9/4}}\int_0^1\frac{du}{u^{3/4}(1-u)^{1/2}} + \frac{4\sqrt{2}\,a^{1/4}A_8B_i}{x^{1/4}b^{9/4}}\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{3/4}(u-1)^{1/2}}.$$

De toutes ces inégalités et des inégalités analogues valables pour $x < 0$ on peut déduire le théorème suivant: pour les valeurs de x et t, qui remplissent les conditions:

$$0 \leq -t < T, \ |x| > \varepsilon, \ |x+bt| > \varepsilon, \ |x-bt| > \varepsilon, \ (\varepsilon > 0)$$

la fonction $P_2^{(i)}(x,t)$ tend uniformément vers zéro avec a.

Reprenons l'équation 3. Admettons que la fonction $\varphi(x, 0)$ soit douée de dérivées continues des deux premiers ordres. Supposons en outre pour plus de simplicité que les intégrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi|_{t=0}\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|_{t=0}\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{t=0} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right|_{t=0} dx$$

soient convergentes. Nous avons pour $|x - x_0| > 0$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - b^2 \int_t^{t_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\, dt.$$

Donc:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0} dx = -\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} \left[\varphi \left(2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b^2 \int_t^{t_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\, dt\right)\right]_{t=0} dx +$$

$$+ \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0} dx - \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \left[\varphi \left(2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b^2 \int_t^{t_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\, dt\right)\right]_{t=0} dx =$$

$$= \left[\varphi \int_t^{t_0} \left(2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - b^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right]_{\substack{t=0\\ x=x_0-\varepsilon}} - \left[\varphi \int_t^{t_0} \left(2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - b^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right]_{\substack{t=0\\ x=x_0+\varepsilon}} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(2a\frac{\partial \psi}{\partial x} + b^2 \int_t^{t_0} \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dt\right)\right]_{t=0} dx + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0} dx +$$

$$+ \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(2a\frac{\partial \psi}{\partial x} + b^2 \int_t^{t_0} \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dt\right)\right]_{t=0} dx.$$

Le passage à la limite $\varepsilon = 0$ s'effectue sans difficulté à l'aide de l'inégalité 10, si l'on observe en outre que l'on a pour $t < t_0$:

$$\lim_{x=x_0 \pm 0} \left(2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - b^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0.$$

Nous obtenons:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0}dx = 2\sqrt{2a\pi}\,\varphi(x_0,0)+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(2a\frac{\partial\psi}{\partial x}+b^2\int_t^{t_0}\frac{\partial\psi}{\partial x}dt\right)\right]_{t=0}dx =$$

$$= 2\sqrt{2a\pi}\,\varphi(x_0,0)-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(2a\psi+b^2\int_t^{t_0}\psi\,dt\right)\right]_{t=0}dx.$$

Donc:

$$2\sqrt{2a\pi}\,\varphi(x_0,t_0) = 2\sqrt{2a\pi}\,\varphi(x_0,0)-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\psi\frac{\partial\varphi}{\partial t}+b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\int_t^{t_0}\psi\,dt\right]_{t=0}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{t_0}\psi\Phi\,dx\,dt.$$

Donc:

$$\varphi(x_0,t_0)=\varphi(x_0,0)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[P_1(x-x_0,-t_0)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0}+b^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{t=0}\int_0^{t_0}P_1(x-x_0,\tau-t_0)\,d\tau\right]dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[P_2(x-x_0,-t_0)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0}+b^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{t=0}\int_0^{t_0}P_2(x-x_0,\tau-t_0)\,d\tau\right]dx-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{t_0}[P_1(x-x_0,t-t_0)-P_2(x-x_0,t-t_0)]\,\Phi(x,t)\,dx\,dt.$$

Cherchons la valeur limite pour $a=0$ des termes qui dans cette formule dépendent de la fonction P_1. Nous avons pour $x>0$, en vertu de l'inégalité 32:

$$\lim_{a=0}P_1(x,t)=-\lim_{a=0}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\int_t^0 e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}}+\lim_{a=0}\frac{\sqrt{\pi}\,a^{3/2}}{4b}\int_t^0\frac{\partial^3}{\partial x^3}e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\sqrt{-\tau}\,d\tau.$$

Si d'abord $x>-bt$, on voit immédiatement que les intégrales à droite convergent vers zéro avec a. Soit donc $x<-bt$. Nous aurons, si $0<\varepsilon<\frac{x}{b}$:

$$\lim_{a=0}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\int_t^0 e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}}=\lim_{a=0}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\int_{-\frac{x}{b}-\varepsilon}^{-\frac{x}{b}+\varepsilon}e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}}$$

$$\lim_{a=0}\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{b^3}{a}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{b^3}{a}}}e^{-\frac{\xi^2}{4\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\,\xi\right)}}\frac{d\xi}{\sqrt{x-\sqrt{\frac{a}{b}}\,\xi}}$$

Soit δ un nombre positif aussi petit que l'on veut. Déterminons un nombre positif A_9 tel que:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{A_9}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(x+b\varepsilon)}} \frac{d\xi}{\sqrt{x-b\varepsilon}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\infty}^{-A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4(x+b\varepsilon)}} \frac{d\xi}{\sqrt{x-b\varepsilon}} < \frac{\delta}{3}.$$

On a alors aussi:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{A_9}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4x}} \frac{d\xi}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\infty}^{-A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4x}} \frac{d\xi}{\sqrt{x}} < \frac{\delta}{3}.$$

Soit a_0 un nombre positif plus petit que:

$$\frac{\varepsilon^2 b^3}{A_9^{\,2}}$$

et assez petit pour que l'inégalité $a < a_0$ entraîne l'inégalité:

$$\left|\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{A_9}^{+A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi\right)}} \frac{d\xi}{\sqrt{x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-A_9}^{+A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4x}} \frac{d\xi}{\sqrt{x}}\right| < \frac{\delta}{3}.$$

Nous aurons pour $a < a_0$:

$$\left|\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{b^3}{a}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{b^3}{a}}} e^{-\frac{\xi^2}{4\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi\right)}} \frac{d\xi}{\sqrt{x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4x}} \frac{d\xi}{\sqrt{x}}\right| <$$

$$< \left|\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-A_9}^{+A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi\right)}} \frac{d\xi}{\sqrt{x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-A_9}^{+A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4x}} \frac{d\xi}{\sqrt{x}}\right| +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{A_9}^{\varepsilon\sqrt{\frac{b^3}{a}}} e^{-\frac{\xi^2}{4\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi\right)}} \frac{d\xi}{\sqrt{x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{b^3}{a}}}^{+A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi\right)}} \frac{d\xi}{\sqrt{x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{A_9}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4x}} \frac{d\xi}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\infty}^{-A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4x}} \frac{d\xi}{\sqrt{x}} < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.$$

Donc:

$$\lim_{a=0} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \int_t^0 e^{-\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4x}} \frac{d\xi}{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{b},$$

si $x < -bt$.

On démontre de la même manière:

$$\lim_{a=0} \frac{\sqrt{\pi}\, a^{3/2}}{4b} \int_t^0 \frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{-\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}} \sqrt{-\tau}\, d\tau = 0$$

pour toute valeur de x positive ou nulle.

$P_1(x, t)$ étant une fonction paire de x on a donc:

$$\lim_{a=0} P_1(x, t) = 0, \text{ si } |x| > -bt,$$

$$\lim_{a=0} P_1(x, t) = -\frac{\pi}{b}, \text{ si } |x| < -bt.$$

Rappelons d'ailleurs qu'il existe une limite supérieure finie pour $|P_1(x, t)|$, qu'elle ne dépasse pour aucune valeur de a. Nous avons donc:

$$\lim_{a=0} \int_0^{t_0} P_1(x - x_0, \tau - t_0)\, d\tau = -\frac{\pi}{b}\left(t_0 \mp \frac{1}{b}(x - x_0)\right) \text{ ou } = 0,$$

suivant que: $0 < x - x_0 < bt_0$ ou: $-bt_0 < x - x_0 < 0$ ou $|x - x_0| > bt_0$. Donc enfin:

$$\lim_{a=0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[P_1(x - x_0, -t_0) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} + b^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{t=0} \int_0^{t_0} P_1(x - x_0, \tau - t_0)\, d\tau \right] dx$$

$$- \frac{1}{2b} \int_{x_0 - bt_0}^{x_0 + bt_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} dx - \frac{b}{2} \int_{x_0 - bt_0}^{x_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{t=0} \left(t_0 + \frac{1}{b}(x - x_0)\right) dx - \frac{b}{2} \int_{x_0}^{x_0 + bt_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{t=0} \left(t_0 - \frac{1}{b}(x - x_0)\right) dx$$

$$- \frac{1}{2b} \int_{x_0 - bt_0}^{x_0 + bt_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} dx + \frac{1}{2} \int_{x_0 - bt_0}^{x_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{t=0} dx - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0 + bt_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{t=0} dx$$

$$\frac{1}{2b} \int_{x_0 - bt_0}^{x_0 + bt_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} dx + \varphi(x_0, 0) - \frac{1}{2} \varphi(x_0 + bt_0, 0) - \frac{1}{2} \varphi(x_0 - bt_0, 0).$$

Nous avons d'un autre côté:

$$\lim_{a=0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{t_0} P_1(x-x_0,\, t-t_0)\, \Phi(x,t)\, dx\, dt = -\frac{1}{2b}\int_0^{t_0} dt \int_{x_0-b(t_0-t)}^{x_0+b(t_0-t)} \Phi(x,t)\, dx.$$

Donc:

$$-\lim_{a=0} \Bigg\{ -\varphi(x_0, 0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Bigg[P_1(x-x_0, -t_0)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} + b^2 \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{t=0} \int_0^{t_0} P_1(x-x_0, \tau - t_0)\, d\tau\Bigg] dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{t_0} P_1(x-x_0,\, t-t_0)\, \Phi(x,t)\, dx\, dt \Bigg\} =$$

$$= \frac{1}{2b}\int_{x_0-bt_0}^{x_0+bt_0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} dx + \frac{1}{2}\varphi(x_0+bt_0, 0) + \frac{1}{2}\varphi(x_0-bt_0, 0) + \frac{1}{2b}\int_0^{t_0} dt \int_{x_0-b(t_0-t)}^{x_0+b(t_0-t)} \Phi(x,t)\, dx.$$

Il résulte des inégalités obtenues plus haut que les intégrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_2^{(i)}(x-x_0, -t_0)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{t_0} P_2^{(i)}(x-x_0, \tau-t_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\, dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{t_0} P_2^{(i)}(x-x_0,\, t-t_0)\, \Phi(x,t)\, dx\, dt$$

pour toute valeur de i tendent vers zéro avec a. Supposons pour un moment qu'il en soit de même pour la somme de toutes ces intégrales. Nous aurons dans cette hypothèse:

$$\lim_{a=0} \varphi(x_0, t_0) = \frac{1}{2b}\int_{x_0-bt_0}^{x_0+bt_0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} dx + \frac{1}{2}\varphi(x_0+bt_0, 0) + \frac{1}{2}\varphi(x_0-bt_0, 0) +$$

$$+ \frac{1}{2b}\int_0^{t_0} dt \int_{x_0-b(t_0-t)}^{x_0+b(t_0-t)} \Phi(x,t)\, dx.$$

Or c'est là exactement la solution de l'équation:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \Phi(x,t),$$

qui pour $t=0$ prend les valeurs données $\varphi(x, 0)$ et dont la dérivée par rapport à t pour $t=0$ prend les valeurs $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0}$. Il paraît donc extrêmement probable que l'on a réellement:

$$\lim_{a=0} \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(x-x_0, -t_0) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} dx = \lim_{a=0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{t_0} P_2(x-x_0, -t_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} d\tau = 0,$$

$$\lim_{a=0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{t_0} P_2(x-x_0, t-t_0)\, \Phi(x, t)\, dx\, dt = 0.$$

Ajoutons que cela serait démontré si l'on pouvait montrer que la constante que nous avons appelée B est plus petite que 1.

4. Nous allons maintenant appliquer les résultats obtenus au problème du mouvement rectiligne d'un fluide visqueux et compressible. Reprenons le système A. Supposons $Y=Z=\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial z}=v=w=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial \sigma}{\partial y}=\frac{\partial \sigma}{\partial z}=0$. Nous aurons:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=X-\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{41}$$

Si l'on suppose qu'il soit permis de dériver ces équations une fois, on obtient:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^3 \sigma}{\partial x^2 \partial t}+\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}-\frac{\partial X}{\partial x}.$$

En posant:

$$\lambda+2\mu=2a, \quad \frac{1}{\varkappa^2}=b^2, \quad \sigma=\varphi, \qquad \frac{\partial X}{\partial x}=\Phi,$$

nous retrouvons l'équation 1.

Soit donnée, dans le plan des x, t, une aire Ω, bornée d'une courbe qui admet en chaque point (sauf peut-être dans un nombre fini de points exceptionnels) une tangente déterminée. Soit x_0, t_0 un point quelconque dans Ω. Traçons la droite $t=t_0-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$) et supposons pour simplifier que, ε étant assez petit, elle ne coupe la frontière que dans deux points différents, A_ε et A'_ε. Soit C un point de la courbe frontière, situé au-dessous de la droite $t=t_0-\varepsilon$. Traçons enfin une demi-droite $x=x_0$, $t<t_0$. Nous obtenons de cette manière deux parties de Ω qui sont bornées par la ligne droite $t=t_0-\varepsilon$, par la demi-droite $x=x_0$ et par des arcs de la courbe frontière. Formons les équations:

$$\iint\left[\psi\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}-\sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-2a\left(\psi\frac{\partial^3\sigma}{\partial x^2\partial t}+\sigma\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial t}\right)+b^2\left(\psi\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}-\sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)-\psi\Phi\right]dx\,dt=0,$$

l'intégration étendue à chacune de ces deux parties. Nous aurons en intégrant par parties et en prenant la somme des deux intégrales:

$$\int_{A_\varepsilon}^{A'_\varepsilon}\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}+2a\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)dx=\int_{A_\varepsilon CA'_\varepsilon}\left\{\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}+2a\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)dx+\right.$$

$$\left.+\left[2a\left(\psi\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}+\sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\right)-b^2\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\sigma\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]dt\right\}+\iint_{t<t_0-\varepsilon}\psi\Phi\,dx\,dt.$$

Le passage à la limite $\varepsilon=0$ donne:

$$2\sqrt{2a\pi}\,\sigma(x_0,t_0)=\int_{A_0CA'_0}\left\{\left[\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\sigma}{\partial t}-2a\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]dx-\right.$$

$$\left.-\left[2a\left(\psi\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}+\sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\right)-b^2\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\sigma\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]dt\right\}+\iint_{t<t_0}\psi\frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dt. \tag{42}$$

Si en particulier l'arc $A_0CA'_0$ est formé de trois droites A_0B, BB' et $B'A'_0$, A_0B et $B'A'_0$ étant parallèles à l'axe de t et BB' parallèle à l'axe de x, nous avons:

$$2\sqrt{2a\pi}\,\sigma(x_0,t_0)=\int_B^{B'}\left[\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\sigma}{\partial t}-2a\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]dx+\int_B^{A_0}\left[2a\left(\psi\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\right)-b^2\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\sigma\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]dt-\int_{B'}^{A'_0}\left[2a\left(\psi\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}+\sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\right)-\right.$$

$$\left.-b^2\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\sigma\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]dt+\iint_{A_0BB'A'_0}\psi\frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dt=$$

$$=\int_B^{B'}\left(\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\sigma}{\partial t}-2a\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx-2a\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_B+2a\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_{B'}+$$

$$+\int_B^{A_0}\left[\sigma\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}+b^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial\sigma}{\partial x}\left(2a\frac{\partial\psi}{\partial t}+b^2\psi\right)\right]dt-$$

$$\int_{B'}^{A'_0}\left[\sigma\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}+b^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial\sigma}{\partial x}\left(2a\frac{\partial\psi}{\partial t}+b^2\psi\right)\right]dt+\iint_{A_0BB'A'_0}\psi\frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dt.$$

Soit $\psi'_0(x, t;\ x_0, t_0)$ une solution de l'équation 2, régulière dans la partie de Ω qui est située au-dessous de la droite $t = t_0$ et qui prend sur les droites $A_0 B$ et $A'_0 B'_0$ les mêmes valeurs que $\psi(x, t;\ x_0, t_0)$. Posons:

$$\psi(x, t;\ x_0, t_0) = \psi_0(x, t;\ x_0, t_0) + \psi_1(x, t;\ x_0, t_0).$$

Nous aurons:

$$2\sqrt{2a\pi}\,\sigma(x_0, t_0) = \int_B^{B'} \left(\sigma \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \psi_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} - 2a \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) dx +$$

$$+ \int_B^{A_0} \sigma \left(2a \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial t} + b^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) - \int_{B'}^{A'_0} \sigma \left(2a \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial t} + b^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) dt + \iint\limits_{A_0 B B' A'_0} \psi_1 \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dt.$$

La méthode des images permet de former sans difficultés la fonction ψ_1. Cette fonction connue, notre formule résout le problème de déterminer la densité dans un point quelconque, situé entre deux plans, orthogonaux à la vitesse du fluide, si la densité et la vitesse dans chaque point de cette partie du fluide sont connues pour une certaine valeur initiale $\bar{t}$ de t et si les valeurs de σ sur les deux plans sont connues pour $t \geq \bar{t}$.

5. Si, les fonctions u et σ et les dérivées de ces fonctions qui figurent dans le système 41 étant toujours continues, on ne suppose pas qu'il soit permis de dériver une fois ce système, il faut introduire le système adjoint:

$$-\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}, \quad -\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial x} = 0. \qquad 43.$$

De 41 et 43, on déduit aisément, en reprenant les notations a et b:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u u' - b^2 \sigma \sigma') + b^2 \frac{\partial}{\partial x}(u' \sigma - u \sigma') - 2a\left(u' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}\right) - u' X = 0.$$

Considérons de nouveau l'aire Ω et le point x_0, t_0. Traçons la droite $t = t_0$ et les demi-droites $x = x_0 \pm \varepsilon$, $t \leq t_0$, $(\varepsilon > 0)$. Soient C_ε et C'_ε les points, où ces demi-droites coupent la courbe frontière pour la première fois sous la ligne $t = t_0$. Intégrons l'expression précédente sur les deux parties de Ω qui sont bornées de la droite $t = t_0$, une demi-droite $x = x_0 \pm \varepsilon$ et un arc de la courbe frontière. Nous obtenons, en intégrant par parties et en prenant la somme des deux intégrales:

$$\int\limits_{A_0}^{x=x_0-\varepsilon,\,t=t_0}(u u'-b^2\sigma\sigma')\,dx+\int\limits_{x=x_0+\varepsilon,\,t=t_0}^{A'_0}(u u'-b^2\sigma\sigma')\,dx+\int\limits_{C_\varepsilon}^{x=x_0-\varepsilon,\,t=t_0}\left[u'\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)-\right.$$

$$\left.-u\left(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)\right]dt-\int\limits_{C'_\varepsilon}^{x=x_0+\varepsilon,\,t=t_0}\left[u'\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)-u\left(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)\right]dt+$$

$$+\int\limits_{A_0}^{C_\varepsilon}\left\{\left[u'\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)-u\left(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)\right]dt-(u u'-b^2\sigma\sigma')\,dx\right\}+$$

$$+\int\limits_{C'_\varepsilon}^{A'_0}\left\{\left[u'\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)-u\left(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)\right]dt-(u u'-b^2\sigma\sigma')\,dx\right\}+\iint\limits_{t<t_0}u'X\,dx\,dt=0.$$

Posons:

$$u'=-2a\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}-b^2\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \sigma'=\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

ce qui donne aux deux premières intégrales à gauche la valeur zéro. Cherchons la valeur limite des autres termes de notre équation, lorsque ε tend vers zéro. Comme $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ est, pour $t<t_0$, une fonction continue de x et comme:

$$\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{x=x_0}dt$$

a une valeur finie, s'évanouissant avec δ, on voit immédiatement que l'on a:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{C_\varepsilon}^{x=x_0-\varepsilon,\,t=t_0}u\left(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)dt=\lim_{\varepsilon=0}\left\{-2a(u u')_{C_\varepsilon}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{C_\varepsilon}^{x=x_0-\varepsilon,\,t=t_0}\sigma'\left(b^2u+2a\frac{\partial u}{\partial t}\right)dt\right\}=\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{C'_\varepsilon}^{x=x_0+\varepsilon,\,t=t_0}u\left(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)dt.$$

La fonction $u'(x_0\pm\varepsilon)$ tend pour $t<t_0$ vers zéro avec ε. D'autre part, le terme principal de cette fonction dans le voisinage de $x=x_0$, $t=t_0$ est:

$$\frac{(x-x_0)\,e^{-\frac{(x-x_0)^2}{8a(t_0-t)}+\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{2\sqrt{(t_0-t)^3}}.$$

Donc:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{C_\varepsilon}^{x=x_0-\varepsilon,\,t=t_0} u'\left(b^2\sigma + 2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)dt = -\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{C'_\varepsilon}^{x=x_0+\varepsilon,\,t=t_0} u'\left(b^2\sigma + 2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)dt = -\sqrt{2\pi a}\left(b^2\sigma + 2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x=x_0,\,t=t_0}.$$

Donc:

$$\begin{aligned}2\sqrt{2a\pi}\left(b^2\sigma + 2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x=x_0,\,t=t_0} = \int\limits_{A_0CA'_0}\Big\{\left[u'\left(b^2\sigma + 2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right) - u\left(b^2\sigma' - 2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)\right]dt\, - \\ - (uu' - b^2\sigma\sigma')\,dx\Big\} + \iint\limits_{t<t_0} u' X\,dx\,dt.\end{aligned} \qquad 44.$$

Dans le cas particulier traité plus haut, nous avons:

$$\begin{aligned}2\sqrt{2a\pi}\left(b^2\sigma + 2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0,\,t_0} = \int\limits_B^{A_0}\left[u\left(b^2\sigma' - 2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right) - u'\left(b^2\sigma + 2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\right]dt\, - \\ - \int\limits_B^{B'}(uu' - b^2\sigma\sigma')\,dx - \int\limits_{B'}^{A'_0}\left[u\left(b^2\sigma' - 2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right) - u'\left(b^2\sigma + 2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\right]dt + \iint\limits_{A_0BB'A'_0} u' X\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Soit $\psi_1(x,t;\,x_0,t_0)$ une solution de l'équation 2, qui dans le voisinage de la ligne $t=t_0$ se comporte comme $\psi(x,t;\,x_0,t_0)$ et qui sur les droites A_0B et $B'A'_0$ remplit les conditions:

$$2a\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial t} - b^2\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = 0.$$

Nous aurons, en posant:

$$u'_1 = -2a\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial t} + b^2\frac{\partial\psi_1}{\partial x}, \quad \sigma'_1 = \frac{\partial\psi_1}{\partial t}:$$

$$\begin{aligned}2\sqrt{2a\pi}\left(b^2\sigma + 2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0,\,t_0} = \int\limits_B^{A_0} u\left(b^2\sigma'_1 - 2a\frac{\partial\sigma'_1}{\partial t}\right)dt\, - \\ - \int\limits_B^{B'}(uu'_1 - b^2\sigma\sigma'_1)\,dx - \int\limits_{B'}^{A'_0} u\left(b^2\sigma'_1 - 2a\frac{\partial\sigma'_1}{\partial t}\right)dt + \iint\limits_{A_0BB'A'_0} u'_1 X\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Cette formule résout le problème de trouver la densité dans un point quelconque, situé entre deux plans orthogonaux à la vitesse du fluide, si l'on connaît la densité et la vitesse dans chaque point de cette partie du fluide pour une valeur initiale $\bar{t}$ de t et si l'on connaît de plus la vitesse sur ces plans pour $t > \bar{t}$.

II.

Sur les problèmes à trois ou deux dimensions.

1. Le système:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \varDelta u,$$

$$\ldots \qquad \text{1.}$$

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

donne, si l'on suppose que toutes les équations soient dérivables une fois:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{1}{\varkappa^2}\varDelta\sigma - (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \varDelta\sigma}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

ou, si l'on pose:

$$\frac{1}{\varkappa^2} = b^2, \ \lambda + 2\mu = 2a, \ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\Phi;$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 2a\frac{\partial \varDelta\sigma}{\partial t} + b^2\varDelta\sigma + \Phi. \qquad \text{2.}$$

Cette équation joue un rôle important dans plusieurs questions de la physique mathématique:[1]

Son équation adjointe est:

$$\frac{\partial^2 \sigma'}{\partial t^2} = -2a\frac{\partial \varDelta\sigma'}{\partial t} + b^2\varDelta\sigma'. \qquad \text{3.}$$

De 2 et 3 il suit:

[1] Voir p. ex. Duhem: »Recherches sur l'élasticité», Annales de l'école normale 1904 P. 366.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t}\right) - a\left[\Delta\left(\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t}\right) + \sigma' \Delta \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Delta \sigma' + \right.$$

$$\left. + \sigma \Delta \frac{\partial \sigma'}{\partial t} - \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \Delta \sigma - 2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y}\frac{\partial \sigma'}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial z}\frac{\partial \sigma'}{\partial z}\right)\right] - b^2(\sigma' \Delta \sigma - \sigma \Delta \sigma') = \sigma' \Phi .$$

D'où, en intégrant sur un espace fini $\Omega(t)$, borné de la surface $S(t)$, et entre les limites $t = 0$ et $t = t_0 - \varepsilon$:

$$\int\limits_{\Omega(t_0-\varepsilon)} \left[\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t} + 2a \sum \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right]_{t_0-\varepsilon} d\omega - \int\limits_{\Omega(0)} \left[\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + 2a \sum \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right]_{t=0} d\omega + \int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt \int\limits_{S(t)} \left[a \frac{d}{dn}\frac{\partial(\sigma\sigma')}{\partial t} + a\sigma' \frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \right.$$

$$+ a\sigma \frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma'}{\partial t} - a \frac{\partial \sigma}{\partial t}\frac{d\sigma'}{dn} - a \frac{\partial \sigma'}{\partial t}\frac{d\sigma}{dn} + b^2\left(\sigma' \frac{d\sigma}{dn} - \sigma \frac{d\sigma'}{dn}\right) +$$

$$\left. + U_n\left(\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t}\right) + 2a\, U_n \sum \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right] dS = \int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt \int\limits_{\Omega(t)} \sigma' \Phi\, d\omega .$$

Dans cette équation, nous avons posé:

$$\sum \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y}\frac{\partial \sigma'}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial z}\frac{\partial \sigma'}{\partial z} .$$

U_n désigne la vitesse normale d'un point de la surface $S(t)$ et $\frac{d}{dn}$ l'opération:

$$\cos nx \frac{\partial}{\partial x} + \cos ny \frac{\partial}{\partial y} + \cos nz \frac{\partial}{\partial z},$$

n étant la normale intérieure de la surface $S(t)$.

D'après quelques réductions faciles, notre équation peut s'écrire:

$$\int\limits_{\Omega(t_0-\varepsilon)} \left[\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t} + 2a \sum \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right] d\omega - \int\limits_{\Omega(0)} \left[\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t} + 2a \sum \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right] d\omega +$$

$$+ \int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt \int\limits_{S(t)} \left[\sigma' \left(2a \frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + b^2 \frac{d\sigma}{dn}\right) + \sigma\left(2a \frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma'}{\partial t} - b^2 \frac{d\sigma'}{dn}\right) + \right. \tag{4}$$

$$\left. + U_n\left(\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t} + 2a \sum \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right)\right] dS = \int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt \int\limits_{\Omega(t)} \sigma' \Phi\, d\omega .$$

Nous avons supposé dans cette formule que les fonctions σ et σ' et les dérivées de ces fonctions, qui figurent dans notre formule dernière, soient continues. Posons maintenant dans l'intérieur et sur la frontière du domaine $\Omega(t)$:

$$\sigma' = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi(r, t_0 - t)}{\partial r},$$

où:

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

et x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées d'un point situé à l'intérieur de la surface $S(t_0)$, par conséquent aussi à l'intérieur de la surface $S(t_0 - \varepsilon)$, pourvu que ε soit assez petit. Posons au contraire $\sigma' = 0$ à l'extérieur de la surface $S(t)$. Dans ce cas, on doit, du domaine de l'intégration exclure le point x_0, y_0, z_0, ce que l'on peut faire à l'aide d'une sphère $r = \delta$. Dans notre formule, nous obtenons un nouveau terme:

$$\int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt \int\limits_{r=\delta} \left[\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + b^2\frac{d\sigma}{dn}\right) + \sigma\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma'}{\partial t} - b^2\frac{d\sigma'}{dn}\right)\right] dS.$$

Cherchons la valeur limite de cette intégrale, lorsque δ tend vers zéro. Comme, pour $t < t_0$, ψ et ses dérivées restent finies, lorsque r tend vers zéro, on a immédiatement:

$$\lim_{\delta=0}\int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt \int\limits_{r=\delta} \left[\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + b^2\frac{d\sigma}{dn}\right) + \frac{\sigma}{r}\left(2a\frac{\partial^3\psi}{\partial r^2\partial t} - b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\right] dS = 0.$$

Reste à calculer la valeur limite de l'intégrale:

$$\int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt \int\limits_{r=\delta}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{dS}{r^2}.$$

Or, pour $t < t_0$:

$$\lim_{r=0}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0.$$

Donc, l'intégrale tend vers zéro avec δ.

On démontre de même sans difficulté que les intégrales:

$$\int\limits_{\Omega(t), r>\delta}\left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t} + 2a\sum\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}\right] d\omega,$$

$$(t = t_0 - \varepsilon, \text{ ou } = 0),$$

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\Omega(t), r>\delta} \sigma' \Phi \, d\omega,$$

tendent vers les limites:

$$\int_{\Omega(t)} \left[\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{d t} + 2a \sum \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right] d\omega,$$

$$(t = t_0 - \varepsilon \text{ ou} = 0)$$

$$\int_{\delta}^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\Omega(t)} \sigma' \Phi \, d\omega.$$

La formule 4 reste donc vraie sans aucune modification, si l'on y pose:

$$\sigma' = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, t_0 - t)}{\partial r}.$$

Faisons maintenant ε tendre vers zéro. Comme la fonction $P_2(r, t - t_0)$ et toutes ses dérivées restent finies dans le voisinage de $r = 0$, $t = t_0$ et comme $\dfrac{\partial P_1(r, t - t_0)}{\partial r}$ s'y comporte comme:

$$\frac{r}{4a} \int_{t-t_0}^{0} e^{\frac{r^2}{8a\tau} - \frac{b^2 \tau}{2a}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau^3}}.$$

dont la valeur absolue est plus petite que:

$$\frac{e^{\frac{b^2 t_0}{2a}}}{2\sqrt{2a}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi,$$

on voit que l'on peut trouver un nombre positif A_1, tel que l'on a dans le voisinage de $r = 0$, $t = t_0$:

$$|\sigma'| < \frac{A_1}{r}.$$

Pour $r > \delta$ $(\delta > 0)$, σ' tend d'ailleurs uniformément vers zéro avec $t_0 - t$. Donc:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\Omega(t_0-\varepsilon)} \left(\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} + 2a \sum \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right) d\omega$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_{\Omega(t_0-\varepsilon)} \sigma' \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - 2a \Delta \sigma\right)_{t=t_0-\varepsilon} d\omega - 2a \int_{S(t_0-\varepsilon)} \left(\sigma' \frac{d\sigma}{dn}\right)_{t=t_0-\varepsilon} dS \right\} = 0.$$

Le terme principal de $\frac{\partial \sigma'}{\partial t}$ dans le voisinage de $t_0 - t$ est:

$$-\frac{1}{4a}\frac{e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}+\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{\sqrt{(t_0-t)^3}}.$$

Donc:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{\Omega(t_0-\varepsilon)} -\sigma\frac{\partial \sigma'}{\partial t}\,d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{4a}\int\limits_{r=\delta}\frac{\sigma e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}+\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{\sqrt{(t_0-t)^3}}\,d\omega$$

$$= 2\pi\sqrt{2a}\,\sigma(x_0, y_0, z_0, t)\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,d\xi = 4\pi\sqrt{2a\pi}\,\sigma(x_0, y_0, z_0, t_0).$$

Donc:

$$4\pi\sqrt{2a\pi}\,\sigma(x_0, y_0, z_0, t_0) = \int\limits_{\Omega(0)}\left[\sigma'\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + 2a\sum\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right]_{t=0} d\omega -$$

$$-\int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_{S(t)}\left[\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + b^2\frac{d\sigma}{dn}\right) + \sigma\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma'}{\partial t} - b^2\frac{\partial \sigma'}{dn}\right) + \right. \qquad 5.$$

$$\left. + U_n\left(\sigma'\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma'\frac{\partial \sigma}{\partial t} + 2a\sum\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right)\right] dS + \int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_{\Omega(t)}\sigma'\Phi\,d\omega.$$

2. Reprenons le système 1. Supposons que X, Y, Z, u, v, w, σ et les dérivées de ces fonctions qui figurent dans ce système soient continues.

Le système adjoint est:

$$-\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta'}{\partial x} + \mu\Delta u',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad 6.$$

$$\Theta' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \frac{\partial \sigma'}{\partial t}$$

De 1 et 6, on déduit:

$$\frac{\partial}{\partial t}(uu' + vv' + ww') + \frac{1}{\varkappa^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u'\sigma - u\sigma') + \frac{\partial}{\partial y}(v'\sigma - v\sigma') + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}(w'\sigma - w\sigma')\right] - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\sigma') + (\lambda + \mu)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u'\frac{\partial \sigma}{\partial t} + u\frac{\partial \sigma'}{\partial t}\right) + \right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(v'\frac{\partial\sigma}{\partial t}+v\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(w'\frac{\partial\sigma}{\partial t}+w\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)\Bigg]-\mu\,[u'\varDelta u+v'\varDelta v+$$

$$+w'\varDelta w-u\varDelta u'-v\varDelta v'-w\varDelta w']=u'X+v'Y+w'Z.$$

D'où:

$$\int\limits_{\Omega(t_0)}\left(\Sigma uu'-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)d\omega-\int\limits_{\Omega(0)}\left(\Sigma uu'-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)d\omega+\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{S(t)}\Bigg[\frac{1}{\varkappa^2}(\sigma'u_n-\sigma u'_n)-$$

$$-(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n+\frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right)+\mu\left(u'\frac{du}{dn}+v'\frac{dv}{dn}+w'\frac{dw}{dn}\right)-$$

$$-\mu\left(u\frac{du'}{dn}+v\frac{dv'}{dn}+w\frac{dw'}{dn}\right)+U_n\left(\Sigma uu'-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)\Bigg]dS=\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{\Omega(t)}(u'X+v'Y+\omega'Z)\,d\omega.$$

Pour simplifier l'écriture, nous avons posé ici:

$$uu'+vv'+ww'=\Sigma uu',\; u\cos nx+v\cos ny+w\cos nz=u_n,\;\text{ etc.}$$

Excluons par la sphère $r=\delta$ le point x_0, y_0, z_0, situé dans l'intérieur de $\Omega(t_0)$, du domaine de l'intégration et posons:

$$u'=-\frac{\partial}{\partial x}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{\varkappa^2}\varphi\right),$$

$$v'=-\frac{\partial}{\partial y}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{\varkappa^2}\varphi\right),$$

$$w'=-\frac{\partial}{\partial z}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{\varkappa^2}\varphi\right),$$

$$\sigma'=\frac{\partial\varphi}{\partial t},\;\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi(r,t_0-t)}{\partial r},\qquad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

dans l'intérieur et sur la frontière du domaine $\Omega(t)$, $u'=v'=w'=\sigma'=0$ dans l'extérieur du même domaine. L'intégrale première dans notre formule s'évanouit, mais il y faut introduire un nouveau terme à savoir:

$$\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{\Sigma(t)}\Bigg[\frac{1}{\varkappa^2}(\sigma'u_n-\sigma u'_n)-(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n+\frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right)+$$

$$+\mu\left(u'\frac{du}{dn}+v'\frac{dv}{dn}+w'\frac{dw}{dn}\right)-\mu\left(u\frac{du'}{dn}+v\frac{dv'}{dn}+w\frac{dw'}{dn}\right)\Bigg]dS.$$

Cherchons la valeur limite de cette intégrale, lorsque δ tend vers zéro. Tout d'abord, nous avons:

$$\lim_{\delta=0}\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{1}{\varkappa^2}\sigma' - (\lambda+\mu)\frac{\partial \sigma'}{\partial t}\right] u_n \, dS =$$

$$= \lim_{\delta=0}\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{1}{\varkappa^2} u_n + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_n}{\partial t}\right] \sigma' \, dS + (\lambda+\mu) \lim_{\delta=0}\int_{r=\delta} (\sigma' u_n)_{t=0} \, dS.$$

Or on a:

$$\sigma' = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial Q(r, t-t_0)}{\partial r} - \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 P_2(r, t-t_0)}{\partial r\, \partial t}.$$

La fonction $\frac{\partial^2 P_2(r, t-t_0)}{\partial r\, \partial t}$ reste, pour toute valeur de $t \leq t_0$, finie, lorsque r tend vers zéro. Donc:

$$\lim_{\delta=0}\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{1}{\varkappa^2} u_n + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_n}{\partial t}\right] \frac{\partial^2 P_2(r, t-t_0)}{\partial r\, \partial t}\,\frac{dS}{r} +$$

$$+ (\lambda+\mu) \lim_{\delta=0}\int_{r=\delta} \left(u_n \frac{\partial^2 P_2(r, t-t_0)}{\partial r\, \partial t}\right)_{t=0} \frac{dS}{r} = 0.$$

On a de même:

$$\lim_{\delta=0}\int_{r=\delta} \left(u_n \frac{\partial Q(r, t-t_0)}{\partial r}\right)_{t=0} \frac{dS}{r} = 0,$$

puisque $\frac{\partial Q}{\partial r}$ pour $t < t_0$ reste fini, lorsque r tend vers zéro.

Reste donc l'intégrale:

$$\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{1}{\varkappa^2} u_n + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_n}{\partial t}\right] \frac{\partial Q(r, t-t_0)}{\partial r}\,\frac{dS}{r}.$$

Or, dans le voisinage de $r=0$, $t=t_0$, la fonction:

$$\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\,\frac{\partial Q(r, t-t_0)}{\partial r}$$

se comporte comme:

$$\frac{r\, e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{4a\sqrt{(t_0-t)^3}}.$$

Donc, la valeur absolue de notre intégrale est plus petite que:

$$\frac{\mathrm{I}}{a}\pi\, e^{\frac{b^2 t_0}{2a}} \mathrm{Max.}\left|\frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2} u_n + (\lambda + \mu)\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| . \, \delta^2 \int_0^{t_0} \frac{e^{-\frac{\delta^2}{8a(t_0 - t)}}}{\sqrt{(t_0 - t)^3}} dt$$

$$< 2\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2 t_0}{2a}} \mathrm{Max.}\left|\frac{u_n}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| \delta \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi .$$

L'intégrale tend donc vers zéro avec δ et nous avons:

$$\lim_{\delta = 0} \int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma'}{\varkappa^2} - (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma'}{\partial t}\right] u_n \, dS = 0 .$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right] u'_n \, dS .$$

Nous avons:

$$u'_n = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathrm{I}}{r}\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \, \partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \frac{\mathrm{I}}{r^2}\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \, \partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) -$$

$$-\frac{\mathrm{I}}{r}\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \, \partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right) = \frac{\mathrm{I}}{r^2}\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \, \partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} .$$

Notre intégrale peut donc s'écrire:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \, \partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]\frac{dS}{r^2} +$$

$$+ \int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\frac{dS}{r} =$$

$$\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \, \partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]\frac{dS}{r^2} -$$

$$-\int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]_{t=0}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0}\frac{dS}{r} - \int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]_{t=0}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0}\frac{dS}{r} .$$

La fonction

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\left(Q(r, t-t_0) - \frac{\partial P_2(r, t-t_0)}{\partial t}\right)$$

satisfait pour $0 \leqq t_0 - t \leqq T$ à une inégalité de la forme:

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right| < \frac{A_2}{\sqrt{t_0 - t}} + A_3.$$

On conclut de là que les deux dernières intégrales tendent vers zéro avec δ. Quant à la première, nous remarquons d'abord que:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{dr}$$

pour $t < t_0$ tend vers zéro avec r. De plus, la fonction $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t}$ dans le voisinage de $r = 0$, $t = t_0$ se comporte comme:

$$-\frac{r}{4a}\frac{e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{\sqrt{(t_0-t)^3}}$$

$$(2a = \lambda + 2\mu),$$

tandis que $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ reste fini. On a donc:

$$\lim_{\delta=0}\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta}\left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\frac{dS}{r^2} =$$

$$-2\pi\left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_{x_0, y_0, z_0, t_0}\lim_{\delta=0}\delta\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0 -}\frac{e^{-\frac{\delta^2}{8a(t_0-t)}}}{\sqrt{(t_0-t)^3}}dt$$

$$-4\pi\sqrt{2a\pi}\left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_{x_0, y_0, z_0, t_0}.$$

Pour calculer les termes qui restent de notre intégrale, nous remarquons que l'on a, à l'intérieur de la surface $S(t)$:

$$u' = \frac{x - x_0}{r^3}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right] + \frac{x - x_0}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

etc., et à l'extérieur de cette surface, $u' = v' = w' = 0$. Donc:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta}\left(u'\frac{du}{dn} + v'\frac{dv}{dn} + w'\frac{dw}{dn}\right)dS = \int_0^{t_0}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{r=\delta} dt \int_{r=\delta}\sum (x - x_0)\frac{du}{dn}\frac{dS}{r^3} +$$

$$+ \int_0^{t_0}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_{r=\delta} dt \int_{r=\delta}\sum (x - x_0)\frac{du}{dn}\frac{dS}{r^2}.$$

Pour calculer les valeurs limites de ces intégrales nous faisons usage du théorème de TAYLOR. Nous avons:

$$u = u_0 + (x - x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + (z - z_0)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_9 + r^2 f_1,$$

. . . .

$$\frac{du}{dn} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \cos nx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \cos ny + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \cos nz + r f_4,$$

. . . .

u_0 etc. désignant $u(x_0, y_0, z_0, t)$ etc. et f_i désignant une fonction de x, y, z, t qui reste inférieur à une quantité finie, lorsque x, y, z d'une manière quelconque tendent vers les valeurs x_0, y_0, z_0. — Nous avons:

$$\int_0^{t_0}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{r=\delta} dt \int_{r=\delta} \sum (x - x_0)\frac{du}{dn}\frac{dS}{r^3} = \int_0^{t_0}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{r=\delta} dt \int_{r=\delta} \sum (x - x_0)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \frac{dS}{r^4} + \int_0^{t_0}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{r=\delta} dt \int_{r=\delta} \Sigma (x - x_0) f_4 \frac{dS}{r^2},$$

les intégrales de la forme:

$$\int_{r=\delta} (x - x_0)(y - y_0)\, dS$$

s'évanouissant. La dernière intégrale tend vers zéro avec δ. Dans la première intégrale, nous avons:

$$\int_{r=\delta} \sum (x - x_0)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \frac{dS}{r^4} = \frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0\right) = -\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_0.$$

Cette intégrale tend donc vers la valeur $\frac{4}{3}\pi\sqrt{2a\pi}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_{x_0, y_0, z_0, t_0}$.

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int_0^{t_0}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_{r=\delta} dt \int_{r=\delta} \sum (x - x_0)\frac{du}{dn}\frac{dS}{r^2}.$$

Nous avons:

$$\int_{r=\delta} \sum (x - x_0)\frac{du}{dn}\frac{dS}{r^2} = \frac{4}{3}\delta\pi\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0\right) + \delta^2 f(\delta),$$

$f(\delta)$ restant fini, lorsque δ tend vers zéro. D'après ce que nous avons vu plus haut, les termes principaux de $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -2a \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial t} + b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$ dans le voisinage de $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $t = t_0$ sont:

$$2a\left(1 - \frac{r^2}{4a(t_0 - t)}\right) \frac{e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{4a\sqrt{(t_0-t)^3}} + b^2 \int_t^{t_0} \left(1 - \frac{r^2}{4a(t_0-\tau)}\right) \frac{e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-\tau)} + \frac{b^2(t_0-\tau)}{2a}}}{4a\sqrt{(t_0-\tau)^3}} d\tau$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(t_0 - t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}\right] + \frac{b^4}{4a^2} \int_t^{t_0} e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-\tau)} + \frac{b^2(t_0-\tau)}{2a}} \frac{d\tau}{\sqrt{t_0 - \tau}}.$$

On conclut aisément de là que l'intégrale:

$$\int_0^{t_0} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_{r=\delta} dt \int_{r=\delta} \sum (x - x_0) \frac{du}{dn} \frac{dS}{r^2}$$

tend vers zéro avec δ. Donc:

$$\lim_{\delta=0} \int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left(u' \frac{du}{dn} + v' \frac{dv}{dn} + w' \frac{dw}{dn}\right) dS = \frac{4}{3} \pi \sqrt{2a\pi} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_{x_0, y_0, z_0, t_0}.$$

Considérons enfin l'intégrale:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left(u \frac{du'}{dn} + v \frac{dv'}{dn} + w \frac{dw'}{dn}\right) dS.$$

Nous avons:

$$\frac{du'}{dn} = -\frac{2(x - x_0)}{r^4}\left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right] - \frac{2(x - x_0)}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{x - x_0}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial t^2}$$

etc. Donc:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left(u \frac{du'}{dn} + v \frac{dv'}{dn} + w \frac{dw'}{dn}\right) dS = -2 \int_0^{t_0} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{r=\delta} dt \int_{r=\delta} \Sigma u (x - x_0) \frac{dS}{r^4} +$$

$$\int_0^{t} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t}\right)_{r=\delta} dt \int_{r=\delta} \sum \frac{\partial u}{\partial t} (x - x_0) \frac{dS}{r^2} + \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t}\right)_{r=\delta, t=0} \int_{r=\delta} [\Sigma u (x - x_0)]_{t=0} \frac{dS}{r^2}.$$

Or:

$$\int\limits_{r=\delta}\Sigma\, u\,(x-x_0)\frac{dS}{r^4}=\frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0\right)+\int\limits_{r=\delta}\Sigma\,(x-x_0)\,f_1\frac{dS}{r^2}=-\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_0+\delta f,$$

$$\int\limits_{r=\delta}\sum\frac{\partial u}{\partial t}(x-x_0)\frac{dS}{r^2}=\int\limits_{r=\delta}\sum\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0(x-x_0)\frac{dS}{r^2}+\delta\,\varepsilon(\delta)=\delta\,\varepsilon(\delta),$$

$\varepsilon(\delta)$ tendant vers zéro avec δ. On en conclut:

$$\lim_{\delta=0}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{r=\delta}\left(u\frac{du'}{dn}+v\frac{dv'}{dn}+w\frac{dw'}{dn}\right)dS=-\frac{8}{3}\pi\sqrt{2a\pi}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0,t_0}.$$

Donc enfin:

$$\lim_{\delta=0}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{r=\delta}\left[\frac{1}{\chi^2}(\sigma' u_n-\sigma u'_n)-(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n+\frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right)+\right.$$

$$\left.\mu\left(u'\frac{du}{dn}+v'\frac{dv}{dn}+w'\frac{dw}{dn}\right)-\mu\left(u\frac{du'}{dn}+v\frac{dv'}{dn}+w\frac{dw'}{dn}\right)\right]dS=$$

$$4\pi\sqrt{2a\pi}\left(\frac{\sigma}{\chi^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0,t_0}=4\pi\sqrt{2a\pi}\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0,t_0}.$$

Nous devons maintenant chercher les valeurs limites des intégrales:

$$\int\limits_{\Omega(0),\,r>\delta}\left(\Sigma\, u u'-\frac{1}{\chi^2}\sigma\sigma'\right)d\omega,\ \int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{\Omega(t),\,r>\delta}(u'X+v'Y+w'Z)\,d\omega,$$

ce qui se fait sans aucune difficulté[1]. Nous obtenons de la première intégrale:

$$\int\limits_{\Omega(0)}\left(\Sigma\, u u'-\frac{1}{\chi^2}\sigma\sigma'\right)d\omega$$

et de la seconde:

$$\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{\Omega(t)}(u'X+v'Y+w'Z)\,d\omega.$$

Donc, enfin:

[1] Voir p. 119.

$$4\pi\sqrt{2a\pi}\left(b^2\sigma + 2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0, y_0, z_0, t_0} = \int\limits_{\Omega(0)}(\Sigma u u' - b^2\sigma\sigma')\,d\omega + \int\limits_0^{t_0} dt\int[b^2(\sigma u'_n -$$

$$-\sigma' u_n) + (\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n + \frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right) + \mu\left(u\frac{du'}{dn} + v\frac{dv'}{dn} + w\frac{dw'}{dn}\right) - \mu\left(u'\frac{du}{dn} + \right. \qquad 7.$$

$$\left. + v'\frac{dv}{dn} + w'\frac{dw}{dn}\right) - U_n(\Sigma u u' - b^2\sigma\sigma')]\,dS + \int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_{\Omega(t)}(u'X + v'Y + w'Z)\,d\omega.$$

3. Le problème à deux dimensions conduit au système:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial\sigma}{\partial x} + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \mu\Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial\sigma}{\partial y} + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \mu\Delta v, \qquad 8. \\ \Theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}. \end{aligned}$$

Nous supposons dans ce paragraphe qu'il soit permis de dériver ces équations une fois par rapport à x, y et t. Nous avons dans ce cas:

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} - 2a\frac{\partial}{\partial t}\Delta\sigma - b^2\Delta\sigma = -\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} = \Phi.$$

L'équation adjointe est:

$$\frac{\partial^2\sigma'}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial}{\partial t}\Delta\sigma' - b^2\Delta\sigma' = 0.$$

On déduit de ces équations:

$$\int\limits_{\Omega(t_0-\varepsilon)}\left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t} + 2a\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x} + \frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}\right)\right]_{t=t_0-\varepsilon} d\omega - \int\limits_{\Omega(0)}\left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + 2a\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x} + \frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}\right)\right]_{t=0} d\omega + \int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt\int\limits_{C(t)}\left[\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + b^2\frac{d\sigma}{dn}\right) + \right.$$

$$\left. + \sigma\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma'}{\partial t} - b^2\frac{d\sigma'}{dn}\right) + U_n\left(\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t} + 2a\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x} + \frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}\right)\right)\right] dC = \qquad 9.$$

$$= \int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt\int\limits_{\Omega(t)}\sigma'\Phi\,d\omega.$$

$\Omega(t)$ désigne dans cette formule une aire finie, bornée par la courbe $C(t)$. On suppose que cette courbe admette dans chaque point (à l'exception peut-être d'un nombre fini de points) une tangente déterminée.

Considérons l'intégrale:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, t_0 - t)}{\partial r} dz_0,$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Il résulte immédiatement de l'inégalité 24 du chap. I que cette intégrale a un sens déterminé et qu'elle définit une fonction de x, y, t continue pour $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varrho^2 > \delta^2$ $(\delta > 0)$. Les intégrales que l'on obtient en dérivant un nombre fini de fois sous le signe d'intégration par rapport à x, y, z sont, pour $\varrho > \delta$, absolument et uniformément convergentes. On a donc:

$$\frac{\partial^{l+m+n} I}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n} = \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{l+m+n}}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, t_0 - t)}{\partial r}\right) dz_0.$$

On a de même:

$$\frac{\partial^{l+m+n+1} I}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n \partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{l+m+n+1}}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n \partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, t_0 - t)}{\partial r}\right) dz_0,$$

l'intégrale à droite étant absolument et uniformément convergente pour $\varrho > \delta$, $t \leq t_0$. Comme:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = -2a \frac{\partial}{\partial t} \Delta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + b^2 \Delta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right),$$

l'intégrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial t^2} dz_0$$

est encore absolument et uniformément convergente pour $\varrho > \delta$, $t < t_0$ et par conséquent égale à:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}.$$

Donc:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{x,y,z} I - b^2 \Delta_{x,y,z} I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{x,y,z} - b^2 \Delta_{x,y,z}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} dz_0 = 0.$$

Or:

$$\frac{\partial I}{\partial z} = 0.$$

Donc:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial}{\partial t}\Delta_{x,y} I - b^2 \Delta_{x,y} I = 0.$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r}\left|\frac{\partial \psi}{\partial r}\right| dz_0$$

et étudions comment elle se comporte, lorsque ϱ tend vers zéro. Nous avons vu plus haut que $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ reste fini dans le voisinge de $r = 0$. En vertu de l'inégalité I: 26 nous pouvons donc trouver un nombre positif A_4, tel que:

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial r}\right| < A_4,$$

pour $0 \leq t_0 - t \leq T$ et $0 < r$,

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial r}\right| < \frac{A_4}{r}$$

pour $0 \leq t_0 - t \leq T$ et $r > 1$. Donc:

$$I_1 < 2A_4 \int_0^1 \frac{dz_0}{\sqrt{\varrho^2 + z_0^2}} + 2A_4 \int_1^\infty \frac{dz_0}{\varrho^2 + z_0^2} < 2A_4 \log \frac{1 + \sqrt{\varrho^2 + 1}}{\varrho} + 2A_4.$$

D'où le théorème suivant: α étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, on a:

$$\lim_{\varrho = 0} \varrho^\alpha I_1 = 0. \qquad 10.$$

On démontre de la même manière:

$$\lim_{\varrho = 0} \varrho^\alpha \sqrt{t_0 - t} \int \frac{1}{r}\left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right| dz_0 = 0. \qquad 11.$$

Remarquons enfin que l'on a pour $\varepsilon \leq t_0 - t < T$:

$$\left|\frac{\partial^l \psi}{\partial r^l}\right|, \left|\frac{\partial^{l+1} \psi}{\partial r^l \partial t}\right| < A_5,$$

A_5 étant une certaine constante, qui dépend de ε. Donc:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^l \psi}{\partial r^l}\frac{dz_0}{r^2}\right|, \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^{l+1}\psi}{\partial r^l \partial t}\frac{dz_0}{r^2}\right| < 2A_5\int_0^\infty \frac{dz_0}{\varrho^2+z_0^2} = \frac{\pi A_5}{\varrho}. \tag{12}$$

Posons maintenant dans la formule 9: $\sigma' = I$ à l'intérieur de $\Omega(t)$ et sur $C(t)$, $\sigma' = 0$ à l'extérieur de $C(t)$. Il faut alors exclure le point x_0, y_0 du domaine d'intégration, ce que nous pouvons faire à l'aide du cercle $\varrho = \delta$. Nous obtenons de cette manière un nouveau terme:

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\varrho=\delta} \left[\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + b^2\frac{d\sigma}{dn}\right) + \sigma\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma'}{\partial t} - b^2\frac{d\sigma'}{dn}\right)\right] dC.$$

Cherchons la valeur limite de ce terme, lorsque δ tend vers zéro. Nous avons immédiatement, à cause de l'équation 10:

$$\lim_{\varrho=0}\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\varrho=\delta}\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + b^2\frac{d\sigma}{dn}\right) dC = 0.$$

Puis, si pour plus de simplicité nous supposons que le point x_0, y_0 dans tout l'intervalle $0 \leq t \leq t_0$ soit situé dans $\Omega(t)$:

$$2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma'}{\partial t} - b^2\frac{d\sigma'}{dn} = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho}{r^3}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)dz_0 + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho}{r^2}\left(2a\frac{\partial^3\psi}{\partial r^2\partial t} - b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)dz_0 =$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho}{r^3}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)dz_0 - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}dz_0.$$

Or:

$$\varrho \leq r.$$

L'inégalité 12 montre alors que l'intégrale:

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\varrho=\delta}\sigma\, dC \int_{-\infty}^{+\infty}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\varrho\, dz_0}{r^3}$$

reste inférieur à une quantité finie, lorsque δ tend vers zéro. Je dis que la valeur limite de cette intégrale est nulle. En effet, $2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}$ s'annullant pour $r = 0\ (t < t_0)$ on peut trouver un nombre positif A_ε tel que:

$$\left|2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t}-b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|<A_8 r,$$

$$\text{si } 0<r<1 \text{ et } \varepsilon\le t_0-t\le T,$$

$$\left|2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t}-b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|<A_9$$

si $r>1$, $\varepsilon\le t_0-t\le T$. De là, on conclut sans difficulté que notre thèse est vraie. — Enfin:

$$\lim_{\delta=0} -\int\limits_0^{t_0-\varepsilon}dt\int\limits_{\varrho=\delta}\sigma\,dC\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,dz_0=\lim_{\delta=0}\Bigg\{-\int\limits_{\varrho=\delta}\left[\varrho\sigma\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{dz_0}{r^2}\right]_{t=t_0-\varepsilon}dC+$$

$$+\int\limits_{\varrho=\delta}\left[\varrho\sigma\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{dz_0}{r^2}\right]_{t=0}dC+\int\limits_0^{t_0-\varepsilon}dt\int\limits_{\varrho=\delta}\varrho\frac{\partial\sigma}{\partial t}\,dC\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{dz_0}{r^2}\Bigg\}.$$

Or, en vertu de 11:

$$\lim_{\delta=0}\int\limits_{\varrho=\delta}\varrho\,dC\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{dz_0}{r^2}=0.$$

Donc, enfin, notre intégrale tend vers zéro avec δ.

Le passage à la limite $\delta=0$ dans les intégrales:

$$\int\limits_{\Omega(t),\,\varrho=\delta}\left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}+2a\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}\right)\right]d\omega,$$

$$t=t_0-\varepsilon \text{ ou } =0$$

etc., se fait sans aucune difficulté à l'aide de 10, 11, 12. Nous obtenons:

$$\int\limits_{\Omega(t)}\left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}+2a\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}\right)\right]d\omega,$$

$$t=t_0-\varepsilon \text{ ou } =0.$$

La formule 9 subsiste donc sans modification si l'on y pose $\sigma'=I$.

Il faut maintenant approfondir l'étude de la fonction σ' dans le voisinage de $t=t_0$. Il résulte immédiatement des inégalités 26 et 27 du chap. I que σ', $\frac{\partial\sigma'}{\partial x}$, $\frac{\partial\sigma'}{\partial y}$ et $\frac{\partial\sigma'}{\partial t}$ tendent vers zéro avec t_0-t, si $\varrho>\delta\,(\delta>0)$. Comme:

$$\lim_{\varrho=0} \varrho^a I_1 = 0,$$

nous avons de plus:

$$\lim_{\varrho=0} \varrho^a |\sigma'| = 0$$

pour toute valeur de t entre $t_0 - T$ et t_0, les limites y comprises. Considérons maintenant la fonction $\frac{\partial \sigma'}{\partial t}$. Nous avons:

$$\frac{\partial I}{\partial t} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0 = \int_{z-1}^{z+1} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0 + \int_{z+1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0 + \int_{-\infty}^{z-1} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0 .$$

Dans les deux dernières intégrales on a d'après I: 27:

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} \right| < \frac{C^{T,1,1,1}(t_0 - t)}{r} .$$

Donc:

$$\left| \int_{z+1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0 + \int_{-\infty}^{z-1} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0 \right| < 2\, C^{T,1,1,1}(t_0 - t) \int_1^{\infty} \frac{dz_0}{z_0^2} = 2\, C^{T,1,1,1}(t_0 - t).$$

D'autre part, l'inégalité I: 10 et les propriétés connues de la fonction $P_2(r, t)$ montrent que l'on peut trouver un nombre positif A_6 tel que pour $0 \leqq t_0 - t \leqq T$:

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} + \frac{r e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{4a\sqrt{(t_0 - t)^3}} \right| < A_6 .$$

Donc:

$$\left| \int_{z-1}^{z+1} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0 + \frac{1}{4a} \int_{z-1}^{z+1} \frac{e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{\sqrt{(t_0 - t)^3}} dz_0 \right| < 2 A_6 \log \frac{1 + \sqrt{\varrho^2 + 1}}{\varrho} .$$

Or:

$$\int_{z-1}^{z+1} \frac{e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{\sqrt{(t_0 - t)^3}} dz_0 = \frac{e^{-\frac{\varrho^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{t_0 - t} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-\frac{z_0^2}{8a(t_0-t)}}}{\sqrt{t_0 - t}} dz_0$$

$$= 2\sqrt{2a}\, \frac{e^{-\frac{\varrho^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{t_0 - t} \left[\int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi - \int_{\frac{1}{\sqrt{2a(t_0-t)}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi \right].$$

Soit A_7 un nombre positif plus grand que la plus grande valeur de la fonction:

$$|\xi|^3 e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

Alors:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2a(t_0-t)}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi < A_7 \int_{\frac{1}{\sqrt{2a(t_0-t)}}}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^3} = A_7 a (t_0 - t).$$

Donc:

$$2\sqrt{2a}\,\frac{e^{-\frac{\varrho^2}{8a(t_0-t)}+\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{t_0-t}\int_{\frac{1}{\sqrt{2a(t_0-t)}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi < 2a\sqrt{2a}\,A_7\, e^{\frac{b^2 T}{2a}},$$

si $t_0 - t \leqq T$.

Il résulte de tout cela que l'on peut trouver deux nombres positifs A_8 et A_9, tels que l'on a:

$$\left|\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\sqrt{2a\pi}\, e^{-\frac{\varrho^2}{8a(t_0-t)}+\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{2a(t_0-t)}\right| < A_8 \log|\varrho| + A_9 \tag{13}$$

pour toute valeur de ϱ positive et pour $0 \leqq t_0 - t \leqq T$.

Cherchons maintenant la valeur limite pour $\varepsilon = 0$ de l'intégrale:

$$\int_{\Omega(t_0-\varepsilon)} \left[\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t} + 2a\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y}\frac{\partial \sigma'}{\partial y}\right)\right]_{t=t_0-\varepsilon} d\omega =$$

$$= \int_{\Omega(t_0-\varepsilon)} \left[\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t} - 2a\sigma' \Delta \sigma\right]_{t=t_0-\varepsilon} d\omega - 2a \int_{C(t_0-\varepsilon)} \sigma' \frac{d\sigma}{dn} dC.$$

On voit immédiatement que ces deux intégrales tendent vers zéro avec ε. Enfin, nous avons:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\Omega(t_0-\varepsilon)} -\sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t} d\omega = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\sqrt{2a\pi}\, e^{\frac{b^2\varepsilon}{2a}}}{2a\varepsilon} \int_{\varrho<\delta} \sigma e^{-\frac{\varrho^2}{8a\varepsilon}} d\omega =$$

$$= 4\pi \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\, \sigma(x_0, y_0, t_0) \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\delta} \varrho e^{-\frac{\varrho^2}{8a\varepsilon}} d\varrho = 4\pi\sqrt{2a\pi}\, \sigma(x_0, y_0, t_0).$$

Le passage à la limite dans les termes restants de la formule 9 se fait sans aucune difficulté. Donc:

$$4\pi\sqrt{2a\pi}\,\sigma(x_0,y_0,t_0)=\int\limits_{\Omega(0)}\left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}+2a\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}\right)\right]_{t=0}d\omega-$$

$$-\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{C(t)}\left\{\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma}{\partial t}+b^2\frac{d\sigma}{dn}\right)+\sigma\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma'}{\partial t}-b^2\frac{d\sigma'}{dn}\right)+U_n\left(\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2a\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}\right)\right)\right\}dC+\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{\Omega(t)}\sigma'\Phi\,d\omega.$$

4. Reprenons le système 8. Supposons que u, v, σ, X, Y et les dérivées de ces fonctions, qui y figurent, soient continues. Le système adjoint est:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial u'}{\partial t}&=-\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}+(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta'}{\partial x}+\mu\Delta u',\\-\frac{\partial v'}{\partial t}&=-\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}+(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta'}{\partial y}+\mu\Delta v',\\\Theta'&=\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=\frac{\partial\sigma'}{\partial t}.\end{aligned}\qquad 15.$$

De 8 et 15 il suit:

$$\int\limits_{\Omega(t_0),\varrho>\delta}\left(uu'+vv'-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)d\omega-\int\limits_{\Omega(0),\varrho>\delta}\left(uu'+vv'-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)d\omega+\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{C(t)}\left[\frac{1}{\varkappa^2}(\sigma'u_n-\sigma u'_n)-\right.$$

$$-(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n+\frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right)+\mu\left(u'\frac{du}{dn}+v'\frac{dv}{dn}\right)-\mu\left(u\frac{du'}{dn}+v\frac{dv'}{dn}\right)+$$

$$\left.+U_n\left(uu'+vv'-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)\right]dC+\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{\varrho=\delta}\left[\frac{1}{\varkappa^2}(\sigma'u_n-\sigma u'_n)-(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n+\frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right)+\right.\qquad 16.$$

$$\left.+\mu\left(u'\frac{du}{dn}+v'\frac{dv}{dn}\right)-\mu\left(u\frac{du'}{dn}+v\frac{dv'}{dn}\right)\right]dC=\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{\Omega(t),\varrho>\delta}(u'X+v'Y)\,d\omega,$$

$$\varrho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\quad u_n=u\cos nx+v\cos ny.$$

Soit à l'intérieur de $\Omega(t)$ et sur $C(t)$:

$$u' = -\frac{\partial}{\partial x}\left(2a\frac{\partial I}{\partial t} - b^2 I\right),$$

$$v' = -\frac{\partial}{\partial y}\left(2a\frac{\partial I}{\partial t} - b^2 I\right),$$

$$\sigma' = \frac{\partial I}{\partial t},$$

à l'extérieur de $\Omega(t)$ $u' = v' = \sigma' = 0$. La première intégrale dans la formule 16 s'évanouit. Cherchons les valeurs limites des termes restants, lorsque δ tend vers zéro. Commençons par l'intégrale:

$$\int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} \left[\frac{1}{\varkappa^2}(\sigma' u_n - \sigma u'_n) - (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} u'_n + \frac{\partial \sigma'}{\partial t} u_n\right) + \mu\left(u'\frac{du}{dn} + v'\frac{dv}{dn}\right) - \right.$$
$$\left. - \mu\left(u\frac{du'}{dn} + v\frac{dv'}{dn}\right)\right] dC.$$

Supposons pour plus de simplicité que le point x_0, y_0 dans tout l'intervalle $0 \leqq t \leqq t_0$ soit situé dans l'intérieur de $\Omega(t)$. Nous aurons:

$$\int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} \left(\frac{1}{\varkappa^2}\sigma' u_n - (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma'}{\partial t} u_n\right) dC = \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} \sigma'\left(\frac{u_n}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial u_n}{\partial t}\right) dC +$$
$$+ (\lambda + \mu)(\sigma')_{t=0,\,\varrho=\delta} \int\limits_{\varrho=\delta} (u_n)_{t=0}\, dC.$$

L'inégalité 13 montre que la dernière intégrale tend vers zéro avec δ. Je dis qu'il en est de même de la première. Il suffit pour le prouver de montrer que:

$$\lim_{\delta=0} \int\limits_0^{t_0} \frac{\delta e^{-\frac{\delta^2}{8a(t_0-t)}}}{t_0 - t}\, dt = 0.$$

Or:

$$\int\limits_0^{t_0} \frac{\delta e^{-\frac{\delta^2}{8a(t_0-t)}}}{t_0 - t}\, dt = \delta \int\limits_0^{\frac{8at_0}{\delta^2}} e^{-\frac{1}{u}} \frac{du}{u}.$$

Soit A_{10} un nombre positif plus grand que la valeur maximum de:

$$\frac{1}{\sqrt{u}}\, e^{-\frac{1}{u}}.$$

On a alors:

$$\int_0^{t_0} \frac{\delta e^{-\frac{\delta^2}{8a(t_0-t)}}}{t_0-t}\, dt < A_{10}\,\delta \int_0^{\frac{8at_0}{\delta^2}} \frac{du}{u^{2/3}} = 3\, A_{10}\, (8\, a\, t_0\, \delta)^{\frac{1}{3}}.$$

Donc:

$$\lim_{\delta=0} \int_0^{t_0} \frac{\delta e^{-\frac{\delta^2}{8a(t_0-t)}}}{t_0-t}\, dt = 0.$$

Par conséquent:

$$\lim_{\delta=0} \int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} \left(\frac{1}{\varkappa^2}\, \sigma' u_n - (\lambda+\mu)\, \frac{\partial \sigma'}{\partial t}\, u_n\right) dC = 0.$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} \left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\, \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) u'_n\, dC.$$

Nous avons:

$$u'_n = -\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(2\, a\, \frac{\partial I}{\partial t} - b^2 I\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(2\, a\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial r\, \partial t} - b^2\, \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) \frac{\varrho\, dz_0}{r^3} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\, \frac{\varrho\, dz_0}{r^2}.$$

Or:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} \left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\, \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) dC \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\, \frac{\varrho\, dz_0}{r^2} = -\int_{\varrho=\delta} \left[\left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\, \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial t}\, \frac{\varrho\, dz_0}{r^2}\right]_{t=0} dC -$$

$$-\int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} \left[\left(\frac{1}{\varkappa^2}\, \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\lambda+\mu)\, \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial t}\, \frac{\varrho\, dz_0}{r^2}\right] dC.$$

Donc, en vertu de 11:

$$\lim_{\delta=0} \int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} \left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\, \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) dC \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\, \frac{\varrho\, dz_0}{r^2} = 0.$$

Nous avons vu plus haut qu'une intégrale de la forme:

$$\int_{0}^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\varrho=\delta} \left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right) dC \int_{-\infty}^{+\infty} \left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\varrho dz_0}{r^3}$$

tend vers zéro avec δ quelque petite que soit la quantité positive ε. Nous avons donc, en posant pour plus de simplicité:

$$\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial t} = S:$$

$$\lim_{\delta=0}\left\{\int_{0}^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} S u'_n \, dC - \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} S\, dC \int_{-\infty}^{+\infty}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\varrho dz_0}{r^3}\right\} = 0. \qquad 17.$$

Nous avions:

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right| < A_4$$

pour $0 \leqq t_0 - t \leqq T$ et pour toute valeur de r. Donc:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\varrho dz_0}{r^3}\right| < 2A_4\int_{0}^{\infty}\frac{dz_0}{\varrho^2+z_0^2} = \frac{\pi A_4}{\varrho}.$$

Donc:

$$\left|\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} S\, dC \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\varrho dz_0}{r^3}\right| < 2\pi^2 A_4 \varepsilon \operatorname*{Max.}_{\varrho=\delta,\, t_0-\varepsilon \leqq t \leqq t_0} |S|. \qquad 18.$$

Nous avons vu plus haut que l'on peut trouver un nombre positif A_6 tel que:

$$\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} + \frac{r e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{4a\sqrt{(t_0-t)^3}}\right| < A_6.$$

Or:

$$e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}} - e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}} < \frac{b^2(t_0-t)}{2a} e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}} < \frac{b^2(t_0-t)}{2a} e^{\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}.$$

Donc:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} \qquad \frac{r e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}}}{4a\sqrt{(t_0-t)^3}} + \psi_{\ldots},$$

où:

$$|\psi_2| < \frac{b^2 r e^{\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{8a^2\sqrt{t_0-t}} + A_6.$$

De cette inégalité on conclut:

$$\left|\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} S dC \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_2 \varrho dz_0}{r^3}\right| < \int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} S dC \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{b^2 \varrho e^{\frac{b^2 t}{2a}}}{8a^2\sqrt{t_0-t}} + A_6\right) \frac{dz_0}{\varrho^2+z_0^2} <$$

$$< \left[\frac{\pi^2 b^2 \delta e^{\frac{b^2\varepsilon}{2a}}\sqrt{\varepsilon}}{2a^2} + 2\pi^2 A_6 \varepsilon\right] \underset{\varrho=\delta,\, t_0-\varepsilon \leq t \leq t_0}{\mathrm{Max.}} |S|. \quad 19.$$

Considérons enfin l'intégrale:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} S dC \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}}}{r^2\sqrt{(t_0-t)^3}} dz_0.$$

Soit S_0 la valeur de S pour $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$. L'intégrale peut s'écrire:

$$\frac{S_0}{2}\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} dC \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}}}{r^2\sqrt{(t_0-t)^3}} dz_0 + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} (S-S_0)\, dC \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}}}{r^2\sqrt{(t_0-t)^3}} dz_0.$$

Posons dans la première intégrale:

$$t_0 - t = \frac{r^2}{2a\xi^2},\ z_0 = \eta\delta.$$

Nous obtenons:

$$2\pi\sqrt{2a}\, S_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}} \int\limits_{\frac{\delta\sqrt{1+\eta^2}}{\sqrt{2a\varepsilon}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi.$$

On conclut de cette expression que la valeur absolue de cette intégrale va en croissant, lorsque δ diminue. Soit ϑ un nombre positif aussi petit que l'on veut. Choisissons une quantité positive η_1, assez grande pour que:

$$4\pi\sqrt{2a}\,|S_0| \int\limits_{\eta_1}^{\infty} \frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi < \frac{\vartheta}{4}.$$

Déterminons une valeur δ_0 de δ, telle que l'inégalité

$$\delta < \delta_0$$

entraîne l'inégalité:

$$2\pi\sqrt{2a}\,|S_0|\int_{-\eta_1}^{+\eta_1}\frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}}\int_0^{\frac{\delta\sqrt{1+\eta^2}}{2a\varepsilon}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi < \frac{\vartheta}{2}.$$

On a alors, si $\delta < \delta_0$:

$$\left|2\pi\sqrt{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}}\int_{\frac{\delta\sqrt{1+\eta^2}}{\sqrt{2a\varepsilon}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi - 2\pi\sqrt{2a}\,S_0\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi\right| < \vartheta.$$

Donc:

$$\lim_{\delta=0}\frac{S_0}{2}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}dt\int_{\varrho=\delta}dC\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho\, e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}}}{r^2\sqrt{(t_0-t)^3}}dz_0 = 2\pi\sqrt{2a\pi}\,S_0\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}} = 4\pi\sqrt{2a\pi}\,S_0. \qquad 20.$$

On voit de plus que l'on a:

$$\left|\frac{1}{2}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}dt\int_{\varrho=\delta}(S-S_0)\,dC\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho\, e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}}}{r^2\sqrt{(t_0-t)^3}}dt\right| \leq 4\pi\sqrt{2a\pi}\ \underset{0<\tau\leq\varepsilon}{\text{Max.}}\left|\frac{1}{2\pi\delta}\int_{\varrho=\delta,\,t=t_0-\tau}S\,dC - S_0\right| \leq \qquad 21.$$

$$< 4\pi\sqrt{2a\pi}\ \underset{0<\tau\leq\varepsilon}{\text{Max.}}\left|\frac{1}{2\pi\delta}\int_{\varrho=\delta,\,t=t_0-\tau}S\,dC - \frac{1}{2\pi\delta}\int_{\varrho=\delta,\,t=t_0}S\,dC\right| + 4\pi\sqrt{2a\pi}\left|\frac{1}{2\pi\delta}\int_{\varrho=\delta,\,t=t_0}S\,dC - S_0\right|.$$

Il résulte de 18, 19, 20 et 21 que l'on a:

$$\left|\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}dt\int_{\varrho=\delta}S\,dC\int_{-\infty}^{+\infty}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\varrho\,dz_0}{r^3} + 4\pi\sqrt{2a\pi}\,S_0\right| < d(\delta) + e(\varepsilon),$$

où d et e désignent des fonctions positives, qui tendent vers zéro en même temps que leurs arguments.

Soit maintenant ϑ_1 un nombre positif aussi petit que l'on veut. Choisissons ε de telle manière que $e(\varepsilon) < \frac{\vartheta_1}{2}$. Déterminons ensuite un nombre positif δ_1 assez petit pour que l'inégalité $\delta < \delta_1$ entraîne l'inégalité:

$$\left|\int_0^{t_0}dt\int_{\varrho=\delta}S w'_n\,dC - \int_0^{t_0-\varepsilon}dt\int_{\varrho=\delta}S\,dC\int_{-\infty}^{+\infty}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\varrho\,dz_0}{r^3}\right| + d(\delta) < \frac{\vartheta_1}{2}$$

ce qui est possible d'après 17. On a alors:

$$\left|\int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} S u'_n dC + 4\pi \sqrt{2a\pi}\, S_0\right| < \vartheta_1,$$

pourvu que $\delta < \delta_1$. Donc:

$$\lim_{\delta=0} \int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} S u'_n dC = -4\pi\sqrt{2a\pi}\, S_0 = -4\pi\sqrt{2a\pi}\left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0, y_0, t_0}.$$

Sans rencontrer des difficultés nouvelles on peut maintenant calculer la valeur limite de l'intégrale:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta}\left[\mu\left(u'\frac{du}{dn} + v'\frac{dv}{dn}\right) - \mu\left(u\frac{du'}{dn} + v\frac{dv'}{dn}\right)\right] dC.$$

Il suffit donc d'énoncer le résultat. On trouve:

$$4\pi\sqrt{2a\pi}\,\mu\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0, y_0, t_0}.$$

La formule 16 donne par conséquent:

$$4\pi\sqrt{2a\pi}\left(2a\frac{\partial\sigma}{\partial t} + b^2\sigma\right)_{x_0, y_0, t_0} = \lim \left\{ \int_{\Omega(0), \varrho>\delta} (uu' + vv' - b^2\sigma\sigma')_{t=0}\, d\omega - \right.$$

$$-\int_0^{t_0} dt \int_{C(t)} \left[b^2(\sigma' u_n - \sigma u'_n) - (\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n + \frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right) + \mu\left(u'\frac{du}{dn} + v'\frac{dv}{dn} - u\frac{du'}{dn} - v\frac{dv'}{dn}\right) + \right.$$

$$\left. \left. + U_n(uu' + vv' - b^2\sigma\sigma')\right] dC + \int_0^{t_0} dt \int_{\Omega(t), \varrho>\delta} (u'X + v'Y)\, d\omega \right\}.$$

D'où la formule définitive:

$$4\pi\sqrt{2a\pi}\left(2a\frac{\partial\sigma}{\partial t} + b^2\sigma\right)_{x_0, y_0, t_0} = \int_{\Omega(0)} (uu' + vv' - b^2\sigma\sigma')_{t=0}\, d\omega - \int_0^{t_0} dt \int_{C(t)} \left[b^2(\sigma u_n - \sigma u'_n) - \right.$$

$$-(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n + \frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right) + \mu\left(u'\frac{du}{dn} + v'\frac{dv}{dn} - u\frac{du'}{dn} - v\frac{dv'}{dn}\right) +$$

$$\left. + U_n(uu' + vv' - b^2\sigma\sigma')\right] dC + \int_0^{t_0} dt \int_{\Omega(t)} (u'X + v'Y)\, d\omega.$$

III.

Sur le cas limite $\lambda + 2\mu = 0$.

1. Le cas limite $\lambda + 2\mu = 0$ n'est pas réalisé dans la nature. Pourtant, nous ne croyons pas que les formules que nous allons développer dans ce chapitre, soient dénuées de tout intérêt pour l'hydrodynamique. Considérons en effet un fluide visqueux et compressible, dont la compressibilité soit très faible. Dans ce cas, il existera bien des mouvements, où les termes $(\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ etc. sont très petits pas rapports aux termes $\mu \Delta u$ etc., du moins si l'on suppose que λ soit du même ordre de grandeur que μ. Dans ces cas, on pourra remplacer le coefficient $\lambda+\mu$ par $-\mu$ sans qu'il y ait lieu de craindre une grande erreur dans les résultats. D'un autre côté, il existe évidemment aussi des mouvements, où l'hypothèse $\lambda + 2\mu = 0$ n'est point admissible. C'est p. ex. le cas, si l'on veut étudier les ondes qui peuvent subsister dans un fluide visqueux et compressible.

Considérons donc le système:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \mu\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta u, \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial y} - \mu\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta v, \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= Z - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial z} - \mu\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta w, \\
\Theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \quad 1.$$

Nous supposerons dans la suite que X, Y. Z; u, v, w, σ et leurs dérivées qui se trouvent dans le système 1 soient continues. Nous supposerons de plus que X, Y, Z admettent des dérivées continues par rapport à x, y, z.

Le système adjoint est:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial u'}{\partial t} &= -\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} - \mu\frac{\partial \Theta'}{\partial x} + \mu \Delta u', \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Theta' &= \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \frac{\partial \sigma'}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \quad 2.$$

Soit Ω une partie finie de l'espace, bornée par la surface S. Supposons, pour éviter des formules trop compliquées que S soit indépendant de t. Nous aurons dans Ω:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Sigma u u' = \Sigma X u' - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\left[\frac{\partial (u'\sigma)}{\partial x} + \frac{\partial (v'\sigma)}{\partial y} + \frac{\partial (w'\sigma)}{\partial z} - \frac{\partial (u\sigma')}{\partial x} - \frac{\partial (v\sigma')}{\partial y} - \frac{\partial (w\sigma')}{\partial z}\right]$$
$$+ \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\frac{\partial (\sigma\sigma')}{\partial t} - \mu\left[\frac{\partial (u'\Theta)}{\partial x} + \frac{\partial (v'\Theta)}{\partial y} + \frac{\partial (w'\Theta)}{\partial z} - \frac{\partial (u\Theta')}{\partial x} - \frac{\partial (v\Theta')}{\partial y} - \frac{\partial (w\Theta')}{\partial z}\right]$$
$$+ \mu[u'\varDelta u + v'\varDelta v + w'\varDelta w - u\varDelta u' - v\varDelta v' - w\varDelta w']$$

et par conséquent, si u', v', w', σ' et les dérivées de ces fonctions qui figurent dans le système 2 soient continues dans Ω, la frontière y comprise:

$$\int\limits_{\Omega}\left(\Sigma u u'\right)_{t=t_1} d\omega - \int\limits_{\Omega}\left(\Sigma u u'\right)_{t=0} d\omega = \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_{\Omega}\left(\Sigma X u'\right) d\omega + \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\int\limits_{\Omega}(\sigma\sigma')_{t=t_1} d\omega -$$
$$- \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\int\limits_{\Omega}(\sigma\sigma')_{t=t_0} d\omega - \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_S\left[\sum u'\left(\mu\frac{du}{dn} + \mu\cos nx\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma\right)\right] dS +$$
$$+ \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_S\left[\sum u\left(\mu\frac{du'}{dn} - \mu\cos nx\frac{\partial\sigma'}{\partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma'\right)\right] dS.$$

On a ici:

$$\Sigma X u' = X u' + Y v' + Z w',$$

$$\Sigma u u' = u u' + v v' + w w'$$

etc.

Soient maintenant x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point dans Ω. Soit r' un nombre aussi petit que l'on veut. Traçons la sphère $r = r'$ $(r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2})$ et appliquons la formule ci-dessus à l'extérieur de cette sphère. Posons pour $r \leqq r' + \dfrac{t_1 - t}{\varkappa}$, $r \geqq r'$:

$$u' = u'_{r'} = \frac{r'}{2}\frac{\partial F}{\partial x}, v' = v'_{r'} = \frac{r'}{2}\frac{\partial F}{\partial y}, w' = w'_{r'} = \frac{r'}{2}\frac{\partial F}{\partial z}, \sigma' = \sigma'_{r'} = \frac{\varkappa^2 r'}{2}\frac{\partial F}{\partial t},$$

où:

$$F = \frac{\mathrm{I}}{r}\int\limits_0^{t_1 - t - \varkappa(r - r')} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu\xi}}}{\sqrt{\xi^3}} d\xi$$

et pour $r > r' + \dfrac{t_1 - t}{\varkappa}$: $u' = v' = w' = \sigma' = 0$. Observons que les fonctions ainsi définies sont continues et admettent des dérivées continues pour $r > r'$. Nous obtenons, en désignant par $\Omega^{t_1}_{t\,r'}$ la partie de $\Omega_{r'}$ qui est située à l'intérieur de la

sphère $r = r' + \frac{t_1 - t}{\varkappa}$ et par $S^{t_1}_{t\,r'}$ la partie de S qui se trouve à l'intérieur de la même sphère:

$$\int\limits_{\Omega^{t_1}_{0\,r'}} \left(\Sigma u u'_{r'} - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'_{r'}\right)_{t=0} d\omega + \int_0^{t_1} dt \int\limits_{\Omega^{t_1}_{t\,r'}} \Sigma X u'_{r'}\, d\omega - \int_0^{t_1} dt \int\limits_{S^{t_1}_{t\,r'}} \left[\sum u'_{r'}\left(\mu\frac{du}{dn} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mu\cos nx\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma\right)\right] dS + \int_0^{t_1} dt \int\limits_{S^{t_1}_{t\,r'}} \left[\sum u\left(\mu\frac{du'_{r'}}{dn} - \mu\cos nx\frac{\partial\sigma'_{r'}}{\partial t} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma'_{r'}\right)\right] dS - \int_0^{t_1} dt \int\limits_{r=r'} \left[\sum u'_{r'}\left(\mu\frac{du}{dn} + \mu\cos nx\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma\right)\right] dS +$$

$$+ \int_0^{t_1} dt \int\limits_{r=r'} \left[\sum u\left(\mu\frac{du'_{r'}}{dn} - \mu\cos nx\frac{\partial\sigma'_{r'}}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma'_{r'}\right)\right] dS = 0.$$

Multiplions par dt_1 et intégrons entre les limites 0 et t_0. Nous aurons:

$$\int_0^{t_0} dt_1 \int\limits_{\Omega^{t_1}_{0\,r'}} \left(\Sigma u u'_{r'} - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'_{r'}\right)_{t=0} d\omega + \int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt \int\limits_{\Omega^{t_1}_{t\,r'}} \Sigma X u'_{r'}\, d\omega - \int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt \int\limits_{S^{t_1}_{t\,r'}} \left[\sum u'_{r'}\left(\mu\frac{du}{dn} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mu\cos nx\,.\,\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma\right)\right] dS + \int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt \int\limits_{S^{t_1}_{t\,r'}} \left[\sum u\left(\mu\frac{du'_{r'}}{dn} - \mu\cos nx\frac{\partial\sigma'_{r'}}{\partial t}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma'_{r'}\right)\right] dS - \int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt \int\limits_{r=r'} \left[\sum u'_{r'}\left(\mu\frac{du}{dn} + \mu\cos nx\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma\right)\right] dS +$$

$$+ \int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt \int\limits_{r=r'} \left[\sum u\left(\mu\frac{du'_{r'}}{dn} - \mu\cos nx\,.\,\frac{\partial\sigma'_{r'}}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma'_{r'}\right)\right] dS = 0.$$

Faisons maintenant le passage à la limite $r' = 0$. Nous avons pour $r = r'$:

$$u'_{r'} = -\frac{x - x_0}{2r'^2}\int_0^{t_1 - t} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu\xi}}}{\sqrt{\xi^3}}\, d\xi - \frac{\varkappa(x - x_0)}{2r'}\frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1 - t)}}}{\sqrt{(t_1 - t)^3}} = -\frac{x - x_0}{2r'}\left(F_{r'} + \frac{\varkappa e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1 - t)}}}{\sqrt{(t_1 - t)^3}}\right)$$

etc., où:

$$F_{r'} = \frac{1}{r'} \int_0^{t_1-t} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu\xi}}}{\sqrt{\xi^3}} d\xi.$$

Puis:

$$\frac{\partial u'_{r'}}{\partial x} = -\frac{1}{2r'}\left(1 - \frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}\right)\left(F_{r'} + \frac{\varkappa e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}}\right) - \frac{\varkappa^2 (x-x_0)^2}{2r'^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}},$$

$$\frac{\partial u'_{r'}}{\partial y} = \frac{3(x-x_0)(y-y_0)}{2r'}\left(F_{r'} + \frac{\varkappa e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}}\right) - \frac{\varkappa^2 (x-x_0)(y-y_0)}{2r'^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}},$$

etc.

Pour $t < t_1$, on a:

$$\lim_{r'=0} r'^2 F_{r'} = \lim_{r'=0} r' \int_0^{t_1-t} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu\xi}}}{\sqrt{\xi^3}} d\xi = 2\sqrt{\mu} \lim_{r'=0} \int_{\frac{r'}{\sqrt{\mu(t_1-t)}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4}} du = 2\sqrt{\pi\mu}. \qquad 3.$$

Enfin, nous avons d'après le théorème de TAYLOR:

$$u = u_0 + (x-x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + (y-y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + (z-z_0)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + r'^2\varphi,$$

. . . .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + r'\varphi, \ldots$$

$u_0 = u(x_0, y_0, z_0, t)$ etc. et φ désignant une fonction quelconque de x, y, z, t, dont la valeur absolue reste inférieure à une limite finie lorsque le point x, y, z d'une manière quelconque tend vers x_0, y_0, z_0. A l'aide de ces égalités, on voit sans difficulté que l'on a:

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} u'_{r'} \frac{du}{dn} dS = -\frac{\mu}{2} \lim_{r'=0} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dt \int_{r=r'} (x-x_0)^2 F_{r'} \frac{dS}{r'^2} -$$

$$-\frac{\mu\varkappa}{2} \lim_{r'=0} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dt \int_{r=r'} \frac{(x-x_0)^2}{r'^2} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}} dS = -\frac{4}{3}\pi\mu\sqrt{\pi\mu} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dt$$

et par conséquent:

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \sum u'_{r'} \frac{du}{dn} dS = -\frac{4}{3} \pi \mu \sqrt{\pi \mu} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 dt.$$

Nous avons de même:

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} u \frac{\partial u'_{r'}}{\partial x} \cos nx\, dS = -\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \left(u_0 + (x-x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \right.$$

$$\left. + (y-y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + (z-z_0)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + r'^2 \varphi\right)\left(F_{r'} + \frac{\varkappa e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}}\right)\left(\mathrm{I} - \frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}\right)\frac{(x-x_0)dS}{2r'^2} -$$

$$-\frac{\mathrm{I}}{2}\varkappa^2 \mu \lim_{r'=0} \int_{r=r'} \frac{(x-x_0)^3}{r'^3} dS \int_0 u \frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}} dt =$$

$$-\frac{\mathrm{I}}{2} \mu \lim_{r'=0} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dt \int_{r=r'} \left(\mathrm{I} - \frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}\right)(x-x_0)^2 F_{r'} \frac{dS}{r'^2} +$$

$$+\frac{\mathrm{I}}{2}\varkappa^2 \mu \lim_{r'=0} \int_{r=r'} (x-x_0)^2 \frac{dS}{r^3} \int_0^{t_1} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}} \frac{dt}{\sqrt{(t_1-t)^3}}.$$

La dernière intégrale tend vers zéro avec r'. Dans la première, nous avons:

$$\int_{r=r'} \left(\mathrm{I} - \frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}\right)(x-x_0)^2 \frac{dS}{r'^3} = \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\mathrm{I}2\,\pi}{5}\right) r' = -\frac{\mathrm{I}6\,\pi r'}{\mathrm{I}5}.$$

Donc:

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} u \frac{\partial u'_{r'}}{\partial x} \cos nx\, dS = \frac{\mathrm{I}6}{\mathrm{I}5} \pi \mu \sqrt{\pi \mu} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dt.$$

On a de même:

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} u \frac{\partial u'_{r'}}{\partial y} \cos ny\, dS = \frac{3}{2} \mu \int_0 dt \int_{r=r'} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 F_{r'} (x-x_0)^2 (y-y_0)^2 \frac{dS}{r'^4} =$$

$$\frac{4}{5} \pi \mu \sqrt{\pi \mu} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dt.$$

Donc:

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} u \frac{d u'_{r'}}{dn} dS = \frac{8}{3} \pi \mu \sqrt{\pi \mu} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dt$$

et par conséquent:

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \sum \left(u'_{r'} \frac{du}{dn} - u \frac{d u'_{r'}}{dn}\right) dS = -4\pi\mu \sqrt{\pi\mu} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 dt.$$

Cherchons maintenant la valeur limite de l'intégrale:

$$\mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Sigma u'_{r'} \cos nx \, dS = \frac{\mu r'}{2} \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS =$$

$$= -\frac{1}{2} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \frac{\partial \sigma}{\partial t} F_{r'} dS - \frac{\varkappa \mu}{2} \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \frac{\partial \sigma}{\partial t} e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1 - t)}} \frac{dS}{\sqrt{(t_1 - t)^3}}.$$

Nous obtenons donc:

$$-4\pi\mu\sqrt{\pi\mu} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_0 dt.$$

Nous avons de même:

$$\lim_{r'=0} \frac{1}{\varkappa^2} \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \sigma \, \Sigma u'_{r'} \cos nx \, dS = -\frac{4\pi\sqrt{\pi\mu}}{\varkappa^2} \int_0^{t_1} \sigma_0 \, dt.$$

Enfin:

$$\lim_{r'=0} \frac{1}{\varkappa^2} \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \sigma'_{r'} \Sigma u \cos nx \, dS = 0,$$

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \frac{\partial \sigma'_{r'}}{\partial t} \Sigma u \cos nx \, dS = -\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \sigma'_{r'} \sum \frac{\partial u}{\partial t} \cos nx \, dS = 0.$$

Comme:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_0 = 0,$$

nous avons donc:

$$\frac{4\pi r\sqrt{\pi\mu}}{\varkappa^2}\int_0^{t_0}dt_1\int_0^{t_1}\sigma_0\,dt = \lim_{r'=0}\Bigg[\int_0^{t_0}dt_1\int_{\Omega^{t_1}_{0r'}}\Big[\Sigma\, u\, u'_{r'} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\,\sigma\,\sigma'_{r'}\Big]_{t=0} d\omega +$$

$$+\int_0^{t_0}dt_1\int_0^{t_1}dt\int_{\Omega^{t_1}_{tr'}}\Sigma\, X u'_{r'}\,d\omega - \int_0^{t_0}dt_1\int_0^{t_1}dt\int_{S^{t_1}_{tr'}}\Big[\sum u'_{r'}\Big(\mu\frac{du}{dn} + \mu\cos nx\frac{\partial\sigma}{\partial t} -$$

$$-\frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\cos nx.\sigma\Big)\Big]dS + \int_0^{t_0}dt_1\int_0^{t_1}dt\int_{S^{t_1}_{tr'}}\Big[\sum u\Big(\mu\frac{du'_{r'}}{dn} - \mu\cos nx\frac{\partial\sigma'_{r'}}{\partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\cos nx.\sigma'_{r'}\Big)\Big]dS\Bigg].$$

A droite, nous traitons d'abord les intégrales de volume. Nous avons:

$$\int_0^{t_0}dt_1\int_{\Omega^{t_1}_{0r'}}(\Sigma\, u\, u'_{r'})_{t=0}\,d\omega = -\frac{r'}{2}\int_0^{t_0}dt_1\int_{S^{t_1}_{0r'}}(\Sigma\, u\cos nx)_{t=0}\,F_{t=0}\,dS -$$

$$-\frac{\mathrm{I}}{2}r'\int_0^{t_0}dt_1\int_{r=r'}(\Sigma\, u\cos nx)_{t=0}\,F_{t=0}\,dS + \frac{\mathrm{I}}{2}r'\int_0^{t_0}dt_1\int_{\Omega^{t_1}_{0r'}}\Big[F\frac{\partial\sigma}{\partial t}\Big]_{t=0}d\omega.$$

La première intégrale peut s'écrire, en posant pour plus de simplicité $S^{t_0}_{tr'} = S_{tr'}$:

$$-\frac{r'}{2}\int_{S_{0r'}}(\Sigma\, u\cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r}\int_{\varkappa(r-r')}^{t_0} r F_{t=0}\,dt_1.$$

Pour les valeurs de t qui satisfont à l'inégalité $t_1 \geqq \varkappa r$, la fonction $r r' F_{t=0}$ tend uniformément vers la limite $2\sqrt{\pi\mu}$, lorsque r' tend vers zéro. On a d'ailleurs toujours:

$$r r' F \leq 2\sqrt{\pi\mu}\,.$$

Posons:

$$S_t = \lim_{r'=0} S_{tr'}.$$

Nous avons alors:

$$\lim_{r'=0} -\frac{r'}{2}\int_{S_0}(\Sigma\, u\cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r}\int_{\varkappa r}^{t_0} r F_{t=0}\,dt_1 = -\sqrt{\pi\mu}\int_{S_0}(\Sigma\, u\cos nx)_{t=0}\Big(\frac{t_0}{r} - \varkappa\Big)dS.$$

Puis:

$$\left|\frac{r'}{2}\int\limits_{S_{0r'}}(\Sigma u \cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r}\int\limits_{\varkappa(r-r')}^{\varkappa r} rF_{t=0}\,dt_1\right| < \varkappa\sqrt{\pi\mu}\,r'\int\limits_{S_0}|\Sigma u \cos nx|_{t=0}\frac{dS}{r}.$$

Enfin, nous avons sur la partie $S_{0r'} - S_0$ de la frontière:

$$\frac{t_0}{\varkappa} \leqq r \leqq r' + \frac{t_0}{\varkappa}.$$

Donc:

$$\frac{1}{2}rr'\int\limits_{\varkappa(r-r')}^{t_0}F_{t=0}\,dt_1 \leqq \sqrt{\pi\mu}\,(t_0 - \varkappa(r-r')) < \varkappa\sqrt{\pi\mu}\,r'$$

et par conséquent:

$$\left|\frac{r_1}{2}\int\limits_{S_{0r'}-S_0}(\Sigma u \cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r}\int\limits_{\varkappa(r-r')}^{t_0} rF_{t=0}\,dt_1\right| < \varkappa\sqrt{\pi\mu}\,r'\int\limits_{S_{0r'}-S_0}|\Sigma u \cos nx|_{t=0}\frac{dS}{r}.$$

On conclut de là que la première intégrale tend vers la valeur limite:

$$-\sqrt{\pi\mu}\int\limits_{S_0}(\Sigma u \cos nx)_{t=0}\left(\frac{t_0}{r}-\varkappa\right)dS.$$

On montre sans difficulté que la deuxième intégrale a la valeur limite zéro et que la troisième intrégrale tend vers la valeur:

$$\sqrt{\pi\mu}\int\limits_{\Omega_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{t=0}\left(\frac{t_0}{r}-\varkappa\right)d\omega.$$

On a ici:

$$\Omega_0 = \lim_{r'=0}\Omega_{0r'}^{t_0}.$$

L'intégrale:

$$-\frac{1}{\varkappa^2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{\Omega_{0r'}^{t_1}}(\sigma\sigma'_{r'})_{t=0}\,d\omega$$

peut s'écrire:

$$\frac{r'}{2}\int\limits_{\Omega_{0r'}}\sigma_{t=0}\frac{d\omega}{r}\int\limits_{\varkappa(r-r')}^{t_0}\frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-\varkappa(r-r'))}}}{\sqrt{(t_1-\varkappa(r-r'))^3}}\,dt_1$$

Elle a donc la valeur limite:

$$\sqrt{\pi\mu}\int\limits_{\Omega_0}\sigma_{t=0}\frac{d\omega}{r}.$$

Envisageons maintenant l'intégrale:

$$\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{\Omega_{tr'}^{t_1}}\Sigma X u'_{r'}\,d\omega.$$

Une intégration par partie donne:

$$-\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{S_{tr'}^{t_1}}\Sigma X\cos nx\,F\,dS-\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{r=r'}\Sigma X\cos nx\,F\,dS-$$

$$-\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{\Omega_{tr'}^{t_1}}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)F\,d\omega.$$

La première intégrale peut s'écrire:

$$-\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S_{0r'}^{t_1}}dS\int\limits_0^{t_1-\varkappa(r-r')}\Sigma X\cos nx\,F\,dt=-\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S_0^{t_1}}dS\int\limits_0^{t_1-\varkappa(r-r')}\Sigma X\cos nx\,F\,dt-$$

$$-\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S_{0r'}^{t_1}-S_0^{t_1}}dS\int\limits_0^{t_1-\varkappa(r-r')}\Sigma X\cos nx\,F\,dt.$$

De ces intégrales, la première tend vers la valeur:

$$-\sqrt{\pi\mu}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S_0^{t_1}}\frac{dS}{r}\int\limits_0^{t_1-\varkappa r}\Sigma X\cos nx\,dt$$

et la seconde vers zéro, comme on le voit sans difficulté en remarquant que l'on a sur $S_{0r'}^{t_1}-S_0^{t_1}$: $t_1-\varkappa(r-r')\leq\varkappa r'$. La valeur limite de l'intégrale:

$$\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{r=r'}\Sigma X\cos nx\,F\,dS$$

est zéro et celle de l'intégrale:

$$-\frac{r'}{2}\int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt \int_{\Omega_{tr'}^{t_1}} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) F d\omega$$

est:

$$-\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt \int_{\Omega_t^{t_1}} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \frac{d\omega}{r}.$$

Passons aux intégrales de surface. Posons:

$$\mu\frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\cos nx + \mu\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cos nx = V_x,$$

etc. La première intégrale de surface peut alors s'écrire:

$$\int_0^{t_0} dt_1 \int_{S_{0r'}^{t_1}} dS \int_0^{t_1-\varkappa(r-r')} \Sigma u'_{r'} V_x dt,$$

où:

$$u'_{r'} = -\frac{r'(x-x_0)}{2r^2}F + \frac{r'\varkappa(x-x_0)}{2r}\frac{\partial F}{\partial t},$$

etc. Les termes qui contiennent F comme facteur donnent, en effectuant le passage à la limite:

$$\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0} dt_1 \int_{S_0^{t_1}} dS \int_0^{t_1-\varkappa r}\left[V_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + V_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + V_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dt.$$

Pour calculer la valeur limite des termes restants de notre intégrale, nous les écrivons comme suit:

$$-\varkappa\int_{S_{0r'}}\frac{dS}{r}\int_0^{t_0-\varkappa(r-r')}\Sigma V_x(x-x_0)dt\int_{t+\varkappa(r-r')}^{t_0}\frac{r'}{2}\frac{\partial F}{\partial t_1}dt_1 - \frac{\varkappa}{2}\int_{S_{0r'}}\frac{dS}{r^2}\int_0^{t_0-\varkappa(r-r')}\Sigma V_x(x-x_0)dt\int_0^{t_0-t-\varkappa(r-r')}\frac{r' e^{-\frac{r'^2}{4\mu\xi}}}{\sqrt{\xi^3}}d\xi.$$

D'où la valeur limite:

$$-\varkappa V\overline{\pi\mu}\int_0^{t_0} d\,t\int_{S_t}(V_x(x-x_0)+V_y(y-y_0)+V_z(z-z_0))\frac{dS}{r^2}.$$

Passons à l'intégrale:

$$\mu\int_0^{t_0} dt_1\int_0^{t_1} d\,t\int_{S_{tr'}^{t_1}}\left(u\frac{du'_{r'}}{dn}+v\frac{dv'_{r'}}{dn}+w\frac{dw'_{r'}}{dn}\right)dS.$$

Nous avons:

$$\frac{du'_{r'}}{dn}=\frac{1}{2}r'r\,F\,\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{2}\varkappa r'r^2\frac{\partial F}{\partial t}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2}\varkappa^2 r'\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\,\frac{x-x_0}{r}\frac{dr}{dn},$$

etc. Les termes qui contiennent F ou $\frac{\partial F}{\partial t}$ comme facteur, se traitent de la même manière que les termes analogues plus haut et nous donnent:

$$\mu V\overline{\pi\mu}\int_0^{t_0} dt_1\int_{S_0^{t_1}} dS\int_0^{t_1-\varkappa r}\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+v\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+w\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right)dt\,+$$

$$+\varkappa\mu V\overline{\pi\mu}\int_0^{t_0} d\,t\int_{S_t}\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+v\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+w\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right)r\,dS.$$

Les termes restants donnent:

$$\frac{1}{2}\varkappa^2\mu r'\int_{S_{0r'}}\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}dS\int_0^{t_0-\varkappa(r-r')}\Sigma\,u\,(x-x_0)\,dt\int_{t+\varkappa(r-r')}^{t_0}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1{}^2}dt_1=$$

$$=\frac{1}{2}\varkappa^2\mu\int_{S_{0r'}}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dn}dS\int_0^{t_0-\varkappa(r-r')}\Sigma\,u\,(x-x_0)\,\frac{r'e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_0-t-\varkappa(r-r'))}}}{V(t_0-t-\varkappa(r-r'))^3}dt.$$

Pour effectuer le passage à la limite nous divisons $S_{0r'}$ en deux parties S_0 et $S_{0r'}-S_0$. Dans la première partie l'intégrale:

$$\int_0^{t_0-\varkappa(r-r')}\Sigma\,u\,(x-x_0)\frac{r'e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_0-t-\varkappa(r-r'))}}}{V(t_0-t-\varkappa(r-r'))^3}dt$$

tend uniformément vers la valeur:

$$2\sqrt{\pi\mu}\,[\Sigma u(x-x_0)]_{t=t_0-\varkappa r}.$$

Comme l'autre partie tend vers zéro avec r', nous voyons que notre intégrale admet la valeur limite suivante:

$$\varkappa^2\mu\sqrt{\pi\mu}\int\limits_{S_0}[\Sigma u(x-x_0)]_{t=t_0-\varkappa r}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dn}dS.$$

Envisageons en dernier lieu l'intégrale:

$$-\frac{1}{2}r'\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{S_{tr'}^{t_1}}\Sigma\,u\cos nx\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\mu\varkappa^2\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)dS.$$

Elle donne:

$$\sqrt{\pi\mu}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{S_t}(\Sigma u\cos nx)\frac{dS}{r}-\mu\varkappa^2\sqrt{\pi\mu}\int\limits_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r}.$$

Ces longs calculs achevés, on peut résumer leurs résultats dans la formule que voici:

$$\frac{4\pi}{\varkappa^2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}\sigma_0(t)dt=\int\limits_{\Omega_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{t=0}\left(\frac{t_0}{r}-\varkappa\right)d\omega+\int\limits_{\Omega_0}\sigma_{t=0}\frac{d\omega}{r}-\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{\Omega_t^{t_1}}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\frac{d\omega}{r}-\int\limits_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\left(\frac{t_0}{r}-\varkappa\right)dS-\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S_0^{t_1}}\frac{dS}{r}\int\limits_0^{t_1-\varkappa r}\Sigma X\cos nx\,dt-$$

$$-\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S_0^{t_1}}dS\int\limits_0^{t_1-\varkappa r}\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\mu\frac{du}{dn}-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\cos nx+\mu\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cos nx\right)dt+$$

$$+\varkappa\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{S_t}\sum(x-x_0)\left(\mu\frac{du}{dn}-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\cos nx+\mu\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cos nx\right)\frac{dS}{r^2}+$$

$$+\mu\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S_0^{t_1}}dS\int\limits_0^{t_1-\varkappa r}\sum u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dt+\mu\varkappa\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{S_t}\sum u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)r\,dS+$$

$$+\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{S_t}\Sigma u\cos nx\frac{dS}{r}-\mu\varkappa^2\int\limits_{S_0}\left(\Sigma u\cos nx-\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\Sigma u(x-x_0)\right)_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r}.$$

Différentions cette formule par rapport à t_0. A gauche, nous obtenons:

$$\frac{4\pi}{\varkappa^2}\int_0^{t_0}\sigma_0(t)\,dt.$$

A droite, on calcule sans difficulté les dérivées de la plupart des termes. Envisageons p. ex. le terme troisième. Nous avons:

$$\frac{d}{dt_0}\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\left(\frac{t_0}{r}-\varkappa\right)dS=\lim_{dt_0=0}\frac{1}{dt_0}\left\{\int_{S_0^{t_0+dt_0}}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\left(\frac{t_0+dt_0}{r}-\varkappa\right)dS\right.$$

$$\left.-\int_{S_0^{t_0}}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\left(\frac{t_0}{r}-\varkappa\right)dS\right\}=$$

$$\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r}+\lim_{dt_0=0}\frac{1}{dt_0}\int_{S_0^{t_0+dt_0}-S_0^{t_0}}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\left(\frac{t_0+dt_0}{r}-\varkappa\right)dS.$$

Or on a sur $S_0^{t_0+dt_0}-S_0^{t_0}$: $t_0+dt_0-\varkappa r\geqq 0$, $t_0-\varkappa r<0$. Donc:

$$\frac{t_0+dt_0}{r}-\varkappa<\frac{dt_0}{r}.$$

De plus l'aire $S_0^{t_0+dt_0}-S_0^{t_0}$ tend toujours vers zéro avec dt_0. Donc, le troisième terme admet la dérivée:

$$-\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r}.$$

Considérons encore:

$$\frac{d}{dt_0}\int_0^{t_0}dt\int_{S_t}\Sigma u\cos nx\frac{dS}{r}=\frac{d}{dt_0}\int_{S_0}\frac{dS}{r}\int_0^{t_0-\varkappa r}\Sigma u\cos nx\,dt=$$

$$\lim_{dt_0=0}\frac{1}{dt_0}\left\{\int_{S_0^{t_0+dt_0}}\frac{dS}{r}\int_0^{t_0+dt_0-\varkappa r}\Sigma u\cos nx\,dt-\int_{S_0^{t_0}}\frac{dS}{r}\int_0^{t_0-\varkappa r}\Sigma u\cos nx\,dt\right\}=$$

$$\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r}+\lim_{dt_0=0}\frac{1}{dt_0}\int_{S_0^{t_0+dt_0}-S_0^{t_0}}\frac{dS}{r}\int_0^{t_0+dt_0-\varkappa r}\Sigma u\cos nx\,dt=\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r}.$$

En traitant les autres termes d'une manière analogue, nous obtenons la formule suivante, où S_{ph_0} désigne la limite vers laquelle tend la partie de la sphère $r = \frac{t_0}{\varkappa} + r'$ qui est située à l'intérieur de Ω, lorsque r' tend vers zéro:

$$\frac{4\pi}{\varkappa^2}\int_0^{t_0}\sigma_0(t)\,dt = \int_{\Omega_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{t=0}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{\varkappa}\int_{S_{ph_0}}\sigma_{t=0}\frac{dS}{r} - \int_0^{t_0}dt\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\frac{d\omega}{r} -$$

$$-\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r} - \int_{S_0}dS\int_0^{t_0-\varkappa r}\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\mu\frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\cos nx + \mu\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cos nx\right)dt -$$

$$-\int_{S_0}\frac{dS}{r}\int_0^{t_0-\varkappa r}\Sigma X\cos nx\,dt + \varkappa\int_{S_0}\sum(x-x_0)\left(\mu\frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\cos nx + \mu\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cos nx\right)_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r^2} +$$

$$+\mu\int_{S_0}dS\int_0^{t_0-\varkappa r}\sum u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dt + \mu\varkappa\int_{S_0}\left[\sum u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{t=t_0-\varkappa r}r\,dS +$$

$$+\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r} - \mu\varkappa^2\frac{d}{dt_0}\int_{S_0}\left[\Sigma u\cos nx - \frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\Sigma(x-x_0)\right]_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r}.$$

2. La fonction:

$$\frac{1}{\varkappa^2}\int_0^{t_0}\sigma_0(t)\,dt$$

connue, on trouve aisément une expression pour la fonction $u(x_0, y_0, z_0, t_0)$. En effet, le système 1 peut s'écrire:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^t\frac{\partial\sigma}{\partial x}dt\right) = X + \mu\Delta\left(u + \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^t\frac{\partial\sigma}{\partial x}dt\right) - \frac{\mu}{\varkappa^2}\int_0^t\Delta\frac{\partial\sigma}{\partial x}dt + \mu\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial t},$$

etc.,

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Or on a, si l'on suppose que u, v, w, σ admettent des dérivées continues des trois premiers ordres et X, Y, Z des deux premiers ordres:

$$-\frac{\partial^3\sigma}{\partial x\,\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - \frac{1}{\varkappa^2}\Delta\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

Donc:

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}\right)_{t=0} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dt - \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^t \varDelta \frac{\partial \sigma}{\partial x} dt.$$

Donc:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial x} dt\right) = \mu \varDelta \left(u + \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial x} dt\right) + X + \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}\right)_{t=0}$$

$$- \mu \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dt.$$

etc. De ces équations, on déduit d'une manière bien connue des expressions pour $u + \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial x} dt$ etc. Malheureusement, les expressions pour u, v, w, ainsi obtenues dépendent d'une manière fort compliquée des donnés à la frontière u, v, w, σ $\frac{du}{dn}$, $\frac{dv}{dn}$, $\frac{dw}{dn}$. C'est pourquoi nous choisissons une autre méthode pour parvenir à notre but.

Nous avons vu plus haut que l'on a, si u', v', w', σ' est un système de solutions du système 2, régulier à l'extérieur de la sphère $r = r'$:

$$\int_{\Omega_{r'}} \left(\Sigma u u' - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma \sigma'\right)_{t=t_0} d\omega - \int_{\Omega_{r'}} \left(\Sigma u u' - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma \sigma'\right)_{t=0} d\omega - \int_0^{t_0} dt \int_{\Omega_{r'}} (\Sigma X u') d\omega +$$

$$+ \int_0^{t_0} dt \int_S \left[\sum u' \left(\mu \frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx \,.\, \sigma + \mu \cos nx \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)\right] dS -$$

$$- \int_0^{t_0} dt \int_S \left[\sum u \left(\mu \frac{du'}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx \,.\, \sigma' - \mu \cos nx \frac{\partial \sigma'}{\partial t}\right)\right] dS +$$

$$+ \int_0^{t_0} dt \int_{r=r'} \left[\sum u' \left(\mu \frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx \,.\, \sigma + \mu \cos nx \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)\right] dS -$$

$$- \int_0^{t_0} dt \int_{r=r'} \sum u \left(\mu \frac{du'}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx \,.\, \sigma' - \mu \cos nx \frac{\partial \sigma'}{\partial t}\right)\Big] dS = 0.$$

Posons:

$$u' = -\frac{1}{2\mu}\frac{e^{-\frac{r^2}{4\mu(t_0-t)}}}{\sqrt{(t_0-t)^3}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2},\ v' = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y},$$

$$w' = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z},\ \sigma' = 0,$$

où:

$$G = \int_t^{t_0} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\mu(t_0-\tau)}}}{\sqrt{(t_0-\tau)^3}} d\tau.$$

On peut donner à la fonction G une forme différente. La fonction:

$$E(\xi, \tau) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\mu(t_0-\tau)}}}{\sqrt{t_0-\tau}}$$

satisfait à l'équation:

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = 0.$$

Donc:

$$-\int_{r'}^{r} E(\xi, \tau) d\xi + \mu \int_t^{t_0} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi}\right)_{\xi = r} d\tau - \mu \int_t^{t_0} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi}\right)_{\xi = r'} d\tau = 0$$

et par conséquent:

$$-\frac{1}{2} G = \frac{1}{r}\int_{r'}^{r} \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\mu(t_0-t)}}}{\sqrt{t_0-t}} d\xi - \frac{r'}{2r}\int_t^{t_0} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_0-\tau)}}}{\sqrt{(t_0-\tau)^3}} d\tau.$$

Dans chap. I de la première partie de ce travail, nous avons défini les fonctions $u'(r')$, $v'(r')$, $w'(r')$ par les équations:

$$u'(r') = -\frac{\partial^2 P(r')}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P(r')}{\partial z^2},\ v(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial x \partial y},\ w(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial x \partial z},$$

où:

$$P(r') = \frac{1}{r}\int_{r'}^{r} \frac{e^{-\frac{\varrho\, \xi^2}{4\mu(t_0-t)}}}{\sqrt{t_0-t}} d\xi.$$

Nous avons donc, en posant $\varrho = 1$:

$$-\frac{1}{2}G = P(r') - \frac{r'}{2r}\int\limits_{t}^{t_0} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_0-\tau)}}}{\sqrt{(t_0-\tau)^3}}\,d\tau$$

et:

$$u' = -u'(r') - \frac{r'^2}{2r^3}\left(1 - \frac{3(x-x_0)^2}{r^2}\right)F_{r'},\ v' = -v'(r') + \frac{3r'^2(x-x_0)(y-y_0)}{2r^5}F_{r'},$$

$$w' = -w'(r') + \frac{3r'^2(x-x_0)(z-z_0)}{2r^5}F_{r'},\ \sigma' = 0.$$

On a posé ici:

$$F_{r'} = \frac{1}{r'}\int\limits_{t}^{t_0} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_0-\tau)}}}{\sqrt{(t_0-\tau)^3}}\,d\tau = \frac{1}{r'}\int\limits_{0}^{t_0-t} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu\xi}}}{\sqrt{\xi^3}}\,d\xi.$$

Cela étant, on calcule assez simplement les valeurs, vers lesquelles tendent les deux derniers termes de notre formule, lorsque r' tend vers zéro. Tout d'abord, nous avons en vertu des résultats trouvés dans la première partie:

$$\lim_{r'=0}\int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_{r=r'}\left[\sum u'(r')\left(\mu\frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx.\sigma + \mu\cos nx.\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\right]dS = 0.$$

$$\lim_{r'=0}\mu\int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_{r=r'}\sum u\frac{du'(r')}{dn}\,dS = \frac{8}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\,u(x_0, y_0, z_0, t_0).$$

Les termes restants de nos deux intégrales peuvent s'écrire, en mettant:

$$V_x = \mu\frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx.\sigma + \mu\cos nx.\frac{\partial\sigma}{\partial t},$$

etc:

$$\frac{r'^2}{2}\int\limits_0^{t_0} F_{r'}\,dt\int\limits_{r=r'}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)V_x + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)V_y + \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)V_z\right]dS +$$

$$+\frac{3\mu r'}{2}\int\limits_0^{t_0} F_{r'}\,dt\int\limits_{r=r'}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)u + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)v + \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)w\right]dS.$$

Pour calculer les valeurs limites de ces deux intégrales, nous remarquons d'abord que l'on a:

$$u = u_0(t) + (x - x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \cdots + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \cdots + \varphi,$$

etc.,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + (x - x_0)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \cdots + \psi.$$

etc.,

$$\sigma = \sigma_0 + (x - x_0)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 + \cdots + \psi,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_0 + (x - x_0)\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}\right)_0 + \cdots + \psi,$$

φ et ψ étant des fonctions de x, y, z, t, continues dans le voisinage de $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ et admettant les propriétés:

$$\lim_{r=0}\frac{\varphi}{r^2} = 0, \lim_{r=0}\frac{\psi}{r} = 0.$$

Substituons dans nos intégrales ces expressions pour u, v, ... On voit de suite que la plupart des termes ainsi obtenus s'annulent, lorsqu'on effectue l'intégration sur la sphère $r = r'$ et que les termes qui contiennent φ ou ψ s'annulent avec r'. Dans la première intégrale, il reste à considérer les termes:

$$\frac{r'}{2}\int_0^{t_0} F_{r'}dt \int_{r=r'} \Bigg\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg[\mu(x - x_0)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \mu(y - y_0)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 + \mu(z - z_0)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 -$$

$$-\frac{(x - x_0)^2}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 + \mu(x - x_0)^2\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}\right)_0\Bigg] + (x - x_0)(y - y_0)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg[2\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)_0 -$$

$$-\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}\right)_0\Bigg] + (x - x_0)(z - z_0)\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg[2\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right)_0 -$$

$$-\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}\right)_0\Bigg]\Bigg\} dS.$$

Comme:

$$\int_{r=r'}(x - x_0)^2 dS = \frac{4}{3}\pi r'^4, \int_{r=r'}(x - x_0)^4 dS = \frac{4}{5}\pi r'^6,$$

$$\int_{r=r'}(x - x_0)^2(y - y_0)^2 dS = \frac{4}{15}\pi r'^6,$$

cette intégrale est égale à:

$$\frac{r'^2}{2}\int_0^{t_0}\left\{\frac{8\pi\mu}{15}\left[2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0\right]+\frac{8\pi\mu}{5}\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)_0\right]\right.$$
$$\left.-\frac{8\pi}{3}\left[\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0-\mu\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}\right)_0\right]\right\}F_{r'}dt.$$

D'où la valeur limite de la première intégrale:

$$8\pi\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0}\left\{\frac{\mu}{15}\left[2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0\right]-\frac{\mu}{5}\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)_0\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0-\mu\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}\right)_0\right]\right\}dt=$$
$$-8\pi\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0}\left\{\frac{\mu}{15}(\Delta u)_0-\frac{2\mu}{15}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}\right)_0+\frac{1}{3\varkappa^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0\right\}dt.$$

De la seconde intégrale, nous obtenons:

$$\frac{3}{4}\mu r'\int_0^{t_0}F_{r'}dt\int_{r=r'}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\left[(x-x_0)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+(y-y_0)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0+(z-z_0)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0\right]+\right.$$
$$\left.+2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)_0+2(x-x_0)(z-z_0)\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)_0\right\}dS,$$

ce qui donne:

$$-\frac{4}{3}\pi\mu\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0}\left\{3\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}\right)_0+(\Delta u)_0\right\}dt.$$

Voilà donc la valeur limite de nos deux intégrales:

$$\frac{8}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\,u(x_0,y_0,z_0,t_0)-\frac{4}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0}\left\{\mu(\Delta u)_0+\mu\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}\right)_0+\frac{2}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0\right\}dt=$$
$$-4\pi\sqrt{\pi\mu}\left(u_0(t_0)+\frac{1}{\varkappa^2}\int_0^{t_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0dt\right)+\frac{4}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\,u(x_0,y_0,z_0,0)+\frac{4}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0}X_0dt.$$

Nous avons donc obtenu la formule suivante:

$$4\pi V\overline{\pi\mu}\left[u_0(t_0) + \frac{1}{\varkappa^2}\int\limits_0^{t_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0 dt\right] = \frac{4}{3}\pi V\overline{\pi\mu}\int\limits_0^{t_0} X_0\, dt + \frac{4}{3}\pi V\overline{\pi\mu}\, u(x_0, y_0, z_0, 0) -$$

$$-\lim_{r'=0}\int\limits_{\Omega_{r'}}(\Sigma u u')_{t=0}\, d\omega - \lim_{r'=0}\int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_{\Omega_{r'}}\Sigma X u'\, d\omega + \int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_S\left[\sum u'\left(\mu\frac{du}{dn} -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma + \mu\cos nx\,.\,\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\right] dS - \mu\int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_S\sum u\,\frac{du'}{dn}\, dS.$$

Posons:

$$\lim_{r'=0} u'(r') = u',$$

etc., ce qui donne:

$$\overline{u'} = -u' + V\overline{\pi\mu}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right), \overline{v'} = -v' + V\overline{\pi\mu}\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\overline{w'} = -w' + V\overline{\pi\mu}\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Les résultats obtenus dans la première partie permettent immédiatement d'écrire les égalités:

$$\lim_{r'=0}\int\limits_{\Omega_{r'}}(\Sigma u u'(r'))_{t=0}\, d\omega = \int\limits_{\Omega}(\Sigma u\overline{u'})_{t=0}\, d\omega,$$

$$\lim_{r'=0}\int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_{\Omega_{r'}}\Sigma X u'(r')\, d\omega = \int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_{\Omega}\Sigma X\overline{u'}\, d\omega.$$

D'autre part:

$$\frac{r'^2}{2}\int\limits_{\Omega_{r'}}\left[\sum u\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) F_{r'}\right]_{t=0} d\omega = -\frac{r'^2}{2}\int\limits_S(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)(F_{r'})_{t=0}\, dS -$$

$$-\frac{r'^2}{2}\int\limits_{r=r'}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)(F_{r'})_{t=0}\, dS - \frac{r'^2}{2}\int\limits_{\Omega_{r'}}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)_{t=0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)(F_{r'})_{t=0}\, d\omega.$$

Donc:

$$\lim_{r'=0}\frac{r'^2}{2}\int\limits_{\Omega_{r'}}\left[\sum u\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)F_{r'}\right]_{t=0}d\omega=-\sqrt{\pi\mu}\int\limits_S(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dS+$$

$$+\frac{4}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\,u(x_0,y_0,z_0\,0)+\sqrt{\pi\mu}\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{t=0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\omega.$$

On obtient de la même manière:

$$\lim_{r'=0}\frac{r'^2}{2}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{\Omega_{r'}}\sum X\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)F_{r'}d\omega=-\sqrt{\pi\mu}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_S\Sigma X\cos nx\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dS+$$

$$+\frac{4}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\int\limits_0^{t_0}X_0\,dt-\sqrt{\pi\mu}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\omega.$$

Donc enfin:

$$4\pi\sqrt{\pi\mu}\left(u_0(t_0)+\frac{1}{\varkappa^2}\int\limits_0^{t_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0dt\right)=\int\limits_\Omega(\Sigma u\bar{u}')_{t=0}d\omega-\sqrt{\pi\mu}\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{t=0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\omega+$$

$$+\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_\Omega\Sigma X\bar{u}'d\omega+\sqrt{\pi\mu}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\omega+$$

$$+\sqrt{\pi\mu}\int\limits_S(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dS+\sqrt{\pi\mu}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_S\Sigma X\cos nx\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dS+$$

$$+\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_S\left[\sum u'\left(\mu\frac{du}{dn}-\frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma+\mu\,\cos nx\,\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\right]dS-\mu\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_S\sum u\frac{du'}{dn}dS.$$

Les formules analogues s'obtiennent par des permutations des lettres.

Lund, Mai 1909.

BIBLIOGRAPHIE.

Fr. Ackermann.

Weinheim u. Leipzig 1910.

EMMERICH, ALBRECHT, Leitfaden und Übungsbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Neubearb. der 10. Aufl. von W. Minks Lehrbuch der Geometri II, Abteil. A und C. — VIII + 126 pp. 8. M. 1: 50 (geh.), 1: 80 (geb.).

Einleitung. Funktionen spitzer Winkel. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks. Funkt. stumpfer Winkel. Berechn. des schiefwinkligen Dreiecks mittels des Sinus- und des Kosinussatzes. Weitere Hauptsätze z. Berechn. des schiefwinkligen Dreiecks. Verschied. Gruppen v. Dreiecksaufgaben. Funkt. beliebiger Winkel. Funkt. zusammengesetzer Winkel und Sum. v. Winkelfunkt. Aufg., die durch Einführ. v. Hilfswinkeln gelöst werden. Anwend. der ebenen Trigonometrie. — Grundlehren der Sphärik. Berechn. rechtwinkliger Kugeldreiecke. Berechnung schiefwinkl. Kugeldreiecke mittels des Sinussatzes u. der beid. Kosinussätze. Weitere Hauptsätze z. Berechn. des schiefwinkligen Kugeldreiecks. Anwend. der sphärischen Trigonometrie.

Akademische Verlagsgesellschaft.

Leipzig 1911.

ARRHENIUS, SVANTE, Das Schicksal der Planeten. Mit 2 Abb. — 55 p. 8.

Soc. ed. Dante Alighieri di Albrighi, Segati e C.

Roma 1909.

MACH, ERNESTO, I principii della meccanica, esposti criticamente e storicamente nel loro sviluppo. Traduzione di Dionisio Gambioli. Con prefazione di Giovanni Vailati. — XVI + 547 pp. 8. L. 6: —.

Sviluppo dei principi della statica. Lo sviluppo dei principi della dinamica. Extensione dei principi e sviluppo deduttivo della meccanica. Svolgimento formale della meccanica. Relazioni della meccanica con le altre scienze.

Charles Amat.

Paris 1911.

Gherardt, Maurice, Le gain mathématique à la bourse. La speculation de bourse considérée comme jeu de pur hasard; théorie mathématique de la probabilité en matière de cours; écarts et équilibres; conjectures alternantes; tableaux et graphiques à l'usage des spéculateurs; exposé théorique et pratique d'une méthode de spéculation assurant un bénéfice considérable et continuel. — 177 p. 8. Fr. 3: —.

American Mathem. Society.

New York 1911.

Klein, Felix, Lectures on mathematics. (The Evanston colloquium.) Delivered Aug. 28—Sept. 9, 1893 before members of the congress of mathematics held in connection with the world's fair in Chicago, at Northwestern University, Evanston, Ill. Reported by Alexander Ziwet. — IX + 109 pp. 8.

Clebsch. Sophus Lie. 1, 2. On the real shape of algebraic curves and surfaces. Theory of functions and geometry. On the mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences. The transcendency of the numbers e and π. Ideal numbers. The solution of higher algebraic equations. On some recent advances in hyperelliptic and Abelian functions. The most recent researches in non-Euclidean geometry. The study of mathematics at Göttingen. The development of mathematics at the german universities.

Herman Barsdorf.

Berlin 1911.

Wipper, Jury, Sechsundvierzig Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes nebst kurzen biographischen Mitteilungen über Pythagoras. Aus dem Russischen von F. Graap. Mit 59 Fig. 2:e Aufl. — 51 p. 8. M. 1: 50.

F. A. Brockhaus.

Leipzig 1908.

Mach, Ernst, Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt. Mit 257 Abbild. Sechste verb. u. vermehrte Aufl. — XVIII + 576 pp. 8. M. 8: —.

Entwickelung der Principien der Statik. Die Entwickelung der Principien der Dynamik. Die weitere Verwendung der Principien und die deductive Entwickelung der Mechanik. Die formelle Entwickelung der Mechanik. Beziehungen der Mechanik zu andern Wissensgebieten. Anhang.

S. Buchalo.

Fellbach in Wttbg. 1910.

S. Buchalo, Statik des Fluges. 1. Aufl. Mit 12 Fig. u. 7 Tabellen. — 64 p. 8 M. 3: 50.

Cambridge University Press.

London 1910—1911.

Burnside, W., Theory of groups of finite order. Sec. ed. — XXIV + 512 pp. 8. 15 sh.

On permutations. The definition of a group. On the simpler properties of a group which are independent of its mode of representation. Further properties of a group which are independent of its mode of representation. On the composition-series of a group. On the isomorphism of a group with itself. On Abelian groups. On groups whose orders are the powers of primes. On Sylow's theorem. On permutation-groups: Transitive and intransitive groups: Primitive and imprimitive groups. On permutation-groups: Transitivity and primitivity. (Concluding properties.) On the representation of a group of finite order as a permutation-group. On groups of linear substitution; reducible and irreducible groups. On the representation of a group of finite order as a group of linear substitutions. On group-characteristics. Some applications of the theory of groups of linear substitutions and of group-characteristics. On the invariants of groups of linear substitutions. On the graphical representation of a group. On the graphical representation of groups: Groups of genus zero and unity: Cayley's colour-groups. On congruence groups.

Darwin, George Howard, Sir, Scientific papers. Vol. 4. (Periodic orbits and miscellaneous papers.) — XVII + 592 pp. 8. 15 sh.

Periodic orbits: Periodic orbits. On certain discontinuities connected with periodic orbits. On certain families of periodic orbits. — The tides. — Miscellaneous papers in chronological order: On some proposed forms of slide-rule. An application of Peaucellier's cell. The mechanical description of equipotential lines. On a mechanical representation of the second elliptic integral. On maps of the world. A geometrical puzzle. A geometrical illustration of the potential of a distant centre of force. On graphical interpolation and integration. On a theorem in spherical harmonic analysis. On fallible measures of variable quantities and on the treatment of meteorological observations. On the horizontal thrust of a mass of sand. On the formation of Ripple-Mark in sand. Note on Mr Davison's paper on the straining of the earth's crust in cooling. On the mechanical conditions of a swarm of meteorites and on theories of cosmogony. On the perturbation of a comet in the neighbourhood of a planet. The Eulerian nutation of the earth's axis. The analogy between Lesage's theory of gravitation and the repulsion of light. — Papers on tides: The tidal observations of the British Antarctic Expedition 1907. On a mistake in the instructions for the use of a certain apparatus in tidal reductions. — Addresses to societies: Geological time. Pre-

sentation of the medal of the R. Astronom. Soc. to M. Henri Poincaré. Cosmical evolution. — Appendix: Marriages between first cousins in England and their effects. Note of the marriages of first cousins.

Heath, Thomas L., Sir, Diophantus of Alexandria. A study in the history of greek algebra. 2nd ed. With a supplement containing an account of Fermat's theorems and problems connected with Diophantine analysis and some solutions of Diophantine problems by Euler. — VI + 387. 8. 12 sh. 6 d.

Introduction: Diophantus and his works. The MSS. of and writers on Diophantus. Diophantus' methods of solution. The Porisms and other assumptions in Diophantus. The place of Diophantus. — The arithmetica: Book I—VI. On polygonal numbers. Conspectus of the arithmetica. — Supplement.

Baron Kelvin, Sir William Thomson, Mathematical and physical papers. Vol. 5. Arr. and rev. with brief annotations by Sir Josef Larmor. — VIII + 602 pp. 8. 18 sh.

Thermodynamics. Cosmical and geological physics. Molecular and cristalline theory. Electrodynamics. Electrical contributions to engineering societies.

Knott, Cargill Gilston, Life and scientific work of Peter Guthrie Tait. Supplementing the two volumes of scientific papers published in 1898 and 1900. With 5 portraits. — IX + 379 pp. 4. 10 sh. 6 d.

Memoir — Peter Guthrie Tait. Experimental work. Mathematical work. Quaternions. Thomson and Tait; »T and T« or Thomson and Tait's natural philosophy. Other books. Addresses, reviews and correspondence. Popular scientific articles.

Whitehead, Alfred North, and Russel, Bertrand, Principia mathematica. Vol. 1. IX + 666 pp. 8. 25 sh.

Preface. — Introduction: Preliminary explanations of ideas and notations. The theory of logical types. Imcomplete symbols. — Mathematical logics: The theory of deduction. Theory of apparent variables. Classes and relations. Logic of relations. Products and sums of classes. — Prolegomena to cardinal arithmetic: Unit classes and couples. Sub-classes, sub-relations, and relative types. One-many, many-one, and one-one relations. Selections. Inductive relations.

Ancienne Librairie Castaigne.

Bruxelles 1911.

Maingie, Louis, La théorie de l'interêt et ses applications. Préface de M. O. Lepreux. — 235 p. 8.

Théorie de l'intérêt: Préliminaires. L'intérêt dans le sens négatif. Des questions relatives aux valeurs d'un capital correspondantes à un temps positif ou à un temps

négatif. Des annuités constantes. Des annuités variables. Du calcul du taux. — Applications: Préliminaires. De l'intérêt. De l'escompte. Opérations de prêt. Des emprunts par titres.

R. Chapelot & Cie.

Paris 1911.

DUCHÊNE, Capitaine du Génie, L'aéroplane, étudié et calculé par les mathématiques élémentaires. 2 éd. VII + 306 pp. 8.

Avant-propos. Considérations préliminaires. — Principe de la sustention. Action d'un courant d'air sur une voilure. Le vol horizontal de l'aéroplane en air calme. — Le vol oblique de l'aéroplane en air calme. Equilibre et stabilité dans le vol rectiligne. Virages. — Le vent. Vent régulier et vent irrégulier. Leur action sur l'aéroplane. — Les hélices propulsives. — Résumé de mécanique.

Armand Colin.

Paris 1909—1911.

NIEWENGLOWSKI, B., Cours d'algèbre, à l'usage des élèves de la classe de math. spéc. et des candidats à l'École norm. sup. et à l'École polyt. T. 1. 6:e éd. — VI + 396 pp. 8. Fr. 8—.

Nombres positifs. Nombres négatifs. Propriétés des polynomes ordonnés. Division des polynomes ordonnés. Plus grand commun diviseur de deux polynomes entiers. Analyse combinatoire. Binome. Applications de la formule du binome. Développement de l'acroissement d'un polynome entier . . . Nombres irrationnels. Radicaux arithmétiques. Exposants fractionnaires. Expos. négatifs. Expos. irrationnels. Racine m:ième d'un polynome. Limites de quelques expressions irrationnelles. Déterminants. Équations du premier degré. Formes linéaires. Substitutions linéaires. Imaginaires. Séries. Fractions continues. Continuité. Fonction exponentielle. Logarithmes. Exponentielles imaginaires.

TANNERY, JULES, Leçons d'arithmétique théorique et pratique. Nouv. éd. 6:e, compl. refondue. (Cours complet pour la classe de mathématiques A, B publié sous la direction de M. Darboux.) — XVI + 546 pp. 8. Fr. 7: —.

Préliminaires. — Définitions et propriétés fondamentales. Numération. — Pratique des opérations. Propositions fondamentales sur la divisibilité. — Caractères de divisibilité. Plus grand commun diviseur. — Plus petit commun multiple. Nombres premiers. Fractions ordinaires. Fractions décimales. Calculs approchés. Carrés. — Cubes. Racine carée. — Racine cubique. Système métrique. Applications. Nombres irrationnels. — Ensembles. — Limites. Mesure des grandeurs. Eléments de la théorie des nombres.

Dürr'sche Buchhandlung.

Leipzig 1908—1910.

Dressler, Heinrich, Die Lehre von der Funktion. Theorie und Aufgabensammlung für alle höheren Lehranstalten (Mittelschulen). Mit 24 Figuren, 1 graph. Fahrplan. — 92 pp. 8. M. 1: 60.

Die arithmetische Form der Funktion. Die algebraische Auffassung der Funktion. Die geometrische Veranschaulichung der Funktion.

Richter, Max, Über die Einführung in die Stereometrie und in das stereometrische Zeichnen. Mit einer Aufgabensammlung. Ein Beitrag zur Methodik des geometrischen Unterrichts. — 63 pp. 8. M. 2: —.

Wilhelm Engelmann.

Leipzig 1910—1911.

Bernoulli, Jakob, und Euler, Leonh., Abhandlungen über das Gleichgewicht und die Schwingungen der ebenen elastischen Kurven. Übers. u. hrsg. von H. Linsenbarth. Mit 35 Fig. (Ostwald's Klassiker nr 175.) — 126 p. 8. M. 2: 80.

Logogriph ü. eine Eigensch. der rechtwinkl. elast. Kurve. Von der Krümmung des elast. Bandes. Bemerkung z. vorigen Abhandl. von Leibniz und Huygens. Erwiderung darauf von Jak. Bernoulli. — Von den elastischen Kurven. Anhang I zur Methode Kurven zu finden, denen eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt. Von der Schwingungsbewegung elastischer Bänder. — Vorwort z. den Anmerkungen (von K. Heun). Anmerkungen.

Gauss, Carl Friedrich, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Hrsg. von J. Frischauf. Mit 2 Fig. (Ostwald's Klassiker nr 177.) — 111 p. 8. M. 2: —.

Newcomb—Engelmanns Populäre Astronomie. 4. Aufl. In Gemeinschaft mit den Herren Prof. Eberhard, Prof. Ludendorff, Prof. Schwarzschild hrsg. von Prof. Dr. P. Kempf. Mit 213 Abb. — XVI + 772 pp. 8. M. 15: 60.

Geschichtliche Entwicklung des Weltsystems: Die alte Astronomie oder die scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper. Das Kopernikanische System oder die wahren Bewegungen der Himmelskörper. Die allgemeine Schwere. — Praktische Astronomie: Einleit. Das Fernrohr. Astronom. Messungen und Messinstrumente. Messung der Entfernungen im Raume. Das Licht. — Das Sonnensystem: Allgem. Beschaffenheit des Sonnensystems. Die Sonne. Die Planeten. Kometen und Meteore. — Stellarastronomie: Einleit. Die Fixsterne. Der Bau des Universums. Kosmogonie. — Anhang: Biographische Skizzen. Elemente und Verzeichnisse. Tafeln.

A. Francke.

Bern 1899—1911.

Gruner, Paul, Kurzes Lehrbuch der Radioaktivität. Mit 20 Fig. Zweite, vollst. umgearb. Aufl. von »Die radioaktiven Substanzen und die Theorie des Atomzerfalles». — 119 p. 8.

Vorwort. Hist. Einleitung. Die Strahlungen. Der radioaktive Umwandlungsprozess. Die radioaktiven Substansen. Anhang: Die Messmethoden der Radioaktivität. Tabelle der radioaktiven Substanzen.

Leutenegger, J., Lehrbuch der Differential-Rechnung. Zum Gebrauche an höhern Lehranstalten sowie zum Selbststudium. — 160 p. 8.

Rüefli, J., Lehrbuch der ebenen Geometrie, nebst einer Sammlung v. Übungsaufgaben. Zum Gebrauche an Sekundarschulen (Realschulen) u. Gymnasialanstalten bearb. 4 Aufl. — VIII + 199 pp. 8. Kart. M. 2: 40.

Einleitung. Von den Linien u. Winkeln. Von den Parallelen. Vom Dreieck. Viereck u. Vieleck. Vergleichung u. Ausmessung geradlinig begrentzter Flächen. Vom Kreise. Proportionalität der Linien, Winkel u. Flächen. Von der Ähnlichkeit der Figuren. Vom Kreise in Verbindung mit dem regelmässigen Vieleck.

— —, Lehrbuch der Stereometrie, nebst einer Sammlung v. Übungsaufgaben. Zum Gebrauche an Sekundarschulen (Realschulen) und Gymnasialanstalten bearb. 3. Aufl. — VI + 119 pp. 8. Kart. M. 1: 60.

Von den geraden Linien u. Ebenen im Raume. Von den körperlichen Ecken. Von d. geometr. Körpern.

— —, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, nebst einer Sammlung v. Übungsaufgaben. Zum Gebrauche an Sekundarschulen (Realschulen) u. Gymnasialanstalten bearb. 3. Aufl. — 184 p. 8. M. 2: —.

Von den trigonometr. Zahlen. Berechnung d. rechtwinkl. Dreiecks. Fortsetz. der Goniometrie. Berechnung d. schiefwinkl. Dreiecks. Anwendungen u. schwierigere Aufgaben.

— —, Elementare Theorie der Maxima und Minima, nebst Aufgaben zur Übung. VIII + 80 pp. 8. M. 2.

— —, Leitfaden der mathematischen Geographie. Für Mittelschulen u. Lehrerbildungsanstalten sowie zum Selbststudium bearb. 3. umgearb. Aufl. — VIII + 110 pp. 8. M. 1: 60.

Von den scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper. Das Sonnensystem. Die Fixsternwelt.

Carl Fromme.

Wien 1910.

Dolinski, Myron, Algebra und politische Arithmetik. 2. verm. u. verb. Aufl. — IV + 400 pp. 8. 6 Kr.

T. 1: Algebra. Die Rechnungsarten der ersten Stufe. Die Rechnungsarten der zweiten Stufe. Gleichungen d. erst. Grades mit einer u. mit mehrer. Unbek. Anwendung der Gleichungen d. erst. Grades. Verhältnisse u. Proportionen. Anwendungen der Proportionen. Die Rechnungsarten der dritten Stufe. Quadrat. Gleich. m. einer Unbek. Gleich., die sich auf quadratische zurückführen lassen. Unbestimmte Gleichungen d. erst. Grades. Logarithmen. Exponentialgleich. Reihen.

T. 2: Politische Arithmetik. Zinseszins und Zeitrentenrechnung. Tilgungspläne bei dekursiver Verzinsung. Tilgungspläne bei antizipativer Verzinsung. Tilgungspläne von Lotterieanlehen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Prämienberechnungen für einfache Leben. Berechnung der Prämienreserven. Rückkauf u. Reduktion von Versicherungen; Abänderung einer Versicherung. Prämienberechnungen für verbundene Leben. Berechnung der Prämienreserve f. verbund. Leben. Die Bilanz und die Rechnungslegung. — Aufgabensammlung. Tabellen.

Gauthier-Villars.

Paris 1910—1911.

Crelier, L., Systèmes cinématiques. (Scientia N:o 31.) Avec 13 figures et un portrait du colonel Mannheim. — 100 pp. 8. Fr. 2: —.

Système conchoïdal simple. Système du cappa. Système strophoïdal simple. Système conchoïdal circulaire. — Appareil coulisseau-manivelle. Système à deux ornières fixes. — Appareil elliptique. Système bielle-manivelle. — Appareil simple.

Duhem, Pierre, Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale. T. 1. Avec 5 figures. — IV + 528 pp. Fr. 18: —.

Introduction. Définitions préliminaires. Le principe de la conservation de l'énergie. Le travail et les actions. La quantité de chaleur. La mécanique des solides invariables et la mécanique rationnelle. La définition normale d'un système. Les préliminaires du principe de Carnot. Le principe de Sadi Carnot et de Clausius. Le potentiel thermodynamique interne et l'entropie. L'équilibre d'un système holonome. Le déplacement de l'équilibre.

Leroy, C. F. A., Traité de géométrie descriptive, suivi de la méthode des plans cotés et de la théorie des angrenages cylindriques et coniques. Avec une collection d'épures, composée de 71 planches. 15 éd., revue et annotée par M. E. Martelet. T. 1 & 2. XX + 369 + 71 pp. 4. Fr. 16: —.

T. 1. — Texte. — Des droites et des plans. Des surfaces et de leurs plans tangents. Des surfaces développables et des enveloppes. Des intersections de surfaces. Des plans tangents dont le point de contact n'est pas donné. Questions diverses. Des surfaces gauches. De la courbure des lignes et des surfaces. Additions. — Note: Sur les changements de plan de projection et sur les mouvements de rotation; par M. E. Martelet.

T. 2. Atlas: 71 planches.

LUSSAN, ÉLOI, Essai de démonstration générale du théorème de Fermat. — 11 p. 8. Fr. 1: —.

NIELSEN, NIELS, Théorie des fonctions métasphériques. Cours professés à l'Université de Copenhague. — VII + 212 pp. 4. Fr. 12: —.

Applications de la fonction gamma: Quelques lemmes fondamentaux. La fonction gamma. La fonction hypergéométrique. Sur une classe de séries infinies. — Les fonctions métasphériques: Propriétés fondamentales. Prolongements analytiques. Les fonctions ultrasphériques. Applications des formules fondamentales. Équations de François Neumann. — Séries infinies: Séries de Charles Neumann. Séries de François Neumann. Séries de produits de deux fonctions métasphériques. Séries de fonctions hypergéométriques généralisées. Formules d'addition. — Intégrales définies: Généralisations des intégrales classiques. Applications des séries de Charles Neumann. Applications d'une intégrale de M. de Sonine.

ZORETTI, LUDOVIC, Leçons sur le prolongement analytique, professées au collège de France. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publ. sous la direction de M. Émile Borel.) — VI + 116 pp. Fr. 3: 75.

Les ensembles de points. La notion de fonction analytique. Les fonctions entières. Les ensembles parfaits discontinus de singularités. Les lignes singulières. Les fonctions multiformes. Sur la notion de coupure.

Ginn & Company.

London 1910.

VEBLEN, OSWALD, and YOUNG, JOHN WESLEY, Projective geometry. Vol. 1. — X + 342 pp. 8.

Introduction. Theorems of alignment and the principle of duality. Projection, section, perspectivity. Elementary configurations. Projectivities of the primitive geometric forms of one, two and three dimensions. Harmonic constructions and the fundamental theorem of projective geometry. Conic sections. Algebra of points and one-dimensional coördinate systems. Coördinate systems in two- and three-dimensional forms. Projectivities in one-dimensional forms. Geometric constructions. Invariants. Projective transformations of two-dimensional forms. Families of lines.

Gleerupska Universitetsbokhandeln.

Lund 1911.

Bäcklund, A. V., Föreläsningar öfver kropparnes elasticitet. — VI + 371 pp. 8.

Om de solida kropparnes elasticitet: Allmänna karaktärer för de elastiska kropparne. Isotropa kroppar med ändlig utsträckning i alla riktningar. Om starkt svängda membraners svängningar. Svängningar af stafvar, skifvor el. sfäriska kroppar. — Om eterns elasticitet: Om ljusets reflektion och brytning af fullkomligt genomskinliga kroppar, som därvid förhålla sig som isotropa intermedia. Om ljusets absorption och spridning. Vibrationsrörelser inom kristalliniska kroppar. Om ljusets gång genom kristalliniska kroppar. Om ljusets böjning. Transformationsformler f. öfvergången från Fresnels's optik till Franz Neumann's, och tvärtom. Noter.

G. J. Göschen.

Leipzig 1908—1911.

Fischer, Paul B., Koordinatensysteme. Mit 8 Fig. (Sammlung Göschen N:r 507.) — 125 p. 8. Geb. 80 Pf.

Einleitung. Die Descartes-Plückerschen Koordinaten. Die projektiven Koordinaten. Die krummlinigen Koordinaten. Koordinatenbestimmung in der mehrdimensionalen Geometrie. Anhang.

Hack, Franz, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 15 Fig. (Sammlung Göschen N:r 508.) — 122 p. 8. Geb. 80 Pf.

Die Grundlehren. Anwendung der Grundlehren auf spezielle Probleme. Das Gesetz der grossen Zahlen. Wahrscheinlichkeit auf Grund der Erfahrung. Theorie der Beobachtungsfehler. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik. Zahlentafeln.

Hinrichs, W., Einführung in die geometrische Optik. (Sammlung Göschen N:r 532.) Mit 55 Fig. — 144 p. 8. M. 0:80.

Die Grundsetze der geometrischen Optik. Von der Reflexion an ebenen Flächen. Von der Reflexion an sphärischen Flächen. Von der Brechung an ebenen Flächen. Von der Brechung an einer Kugelfläche. Brechung durch ein zentriertes System von Kugelflächen. Linsen und Linsensysteme.

Junker, Friedr., Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Mit 46 Fig. 3 verb. Aufl. (Sammlung Göschen N:r 146.) — 129 p. 8. M. 0:80.

Ableitungen und Differentiale erster Ordnung. Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung. Reihenentwicklung der Funktionen. Unbestimmte Formen. Maxima u. Minima der Funktionen. Anwendung der Differentialrechnung auf die ebene Geometrie.

MAYER, EUGEN JOH., Das Rechnen in der Technik und seine Hilfsmittel, Rechenschieber, Rechentafeln, Rechenmaschienen usw. Mit 30 Fig. (Sammlung Göschen N:r 405.) — 128 p 8. M. 0: 80.

Der logarithmische Rechenschieber. Numerische Tafeln. Rechenmaschienen. Grundoperationen des graphischen Rechnens. Graphisch-mechanische Flächenbestimmung. Graphische Darstellung von Funktionen u. graphische Tafeln.

SIMON, MAX, Analytische Geometrie der Ebene. 3:e verb. Aufl. (Sammlung Göschen N:r 65.) Mit 52 Fig. — 195 p. 8. M. 0: 80.

Koordinaten und Punkt. Die gerade Linie. Der Punkt als Träger der sich in ihm schneidenden Geraden. Parallel-Koordinaten-Transformation. Der Kreis. Die Kegelschnitte. Die Parabel. Die Ellipse. Die Hyperbel. Höhere Kurven. Die Cissoide des Diokles. Cassinische Kurven oder Lemniskaten. Die Spirale des Archimedes. Die Zykloide oder Radlinie.

Ludwig Grossmann.

Wien 1910.

GROSSMANN, LUDWIG, Fragmente neuerer mathematisch-technischer Disciplinen der Versicherungs- und Finanzwissenschaft. Begründet auf Ergebnissen selbständiger, exact wissenschaftlicher Forschung; mit Commentaren u. Ergänz. zu dem Werke »Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie.» 6:er Teil. — 63 p. 8.

Allgem. Integration der linearen Differentialgleichungen höh. Ordnung, deren weit. Entwicklung u. Anwendung. Das Versicherungswesen u. dessen functioneller Begriff. Der Wechselcurs u. dessen Bedeutung f. den internat. Kreditverkehr. Reflexionen üb. die Ausgleich. d. Sterbetafeln m. Rücksicht auf die analyt.-geom. Darstellung u. Construction der Sterblichkeitscurven. D. Check u. dessen Bedeut. als Zahlungsmittel. Über das Wesen der Versicherung geg. Verlosungsverlust vom Finanz- u. versicherungstechn. Gesichtspunkte. Die Biologie d. Menschen v. Gesichtspunkte d. Lebensversicherung.

M. Heinsius Nachfolger.

Leipzig 1910.

HOFMANN, JOHANNES, Ein Nachweis der Richtigkeit des Fermat'schen Satzes. (Im Anschluss an die Schrift: K. HEIM, »Das Weltbild der Zukunft».) 50 p. 8. M. 1: 20.

Herder'sche Verlagshandlung.

Freiburg im Breisgau 1909.

SCHWERING, KARL, Lehrbuch der kleinsten Quadrate. Mit 3 Fig. — VIII + 106 pp. 8. M. 2: 40 (geh.) — 2: 80 (geb.).

Das arithmetische Mittel. Andere Mittelwerte. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz. Andere Mittelwerte. Einige einfache Aufgaben. Forts. Minimum einer Funktion m. Bedingungsgleichung. Weitere Beispiele. Ausgleichung überzähliger Bestimmungen. Minimum m. linearen Bedingungsgleichungen. Bestimmung v. Irrationalitäten nach d. Methode der kleinsten Quadrate. Der Näherungskreis. Trägheitsmoment. Zahlenbeispiel z. einem Gefüge überzähl. Gleich. ersten Grades. Ausgleichung eines Vierecks, dessen Winkel an Seiten u. Diagonalen gemessen sind. Allgem. Entwickl. über das Vieleck. Forts. Aufstellung der allgem. Lösung f. n Unbekannte mit vier Gleichungen. Ausgleich. eines Vierecks, dessen Seit. u. Diag. unmittelbar gemessen sind. Gewicht. — Vorbemerk. Die Gammafunkt. u. die Stirling'sche Reihe. Reihenentwicklung f. die Fehlerfunktion. Der mittlere u. der durchschnittliche Fehler. Anderes Fehlergesetz. Methode der Biquadrate. Anderweitiges Auftreten d. Gleichung $y = e^{-hx^2}$.

A. Hermann & Fils.

Paris 1911.

Fabry, E., Théorie des séries à termes constants. Applications aux calculs numériques. — 198 pp. 8. Fr. 6: —.

Notions générales. Séries à termes positifs. Séries à signes variés. Sommations et calculs numériques. Transformation des séries. Séries semi-convergentes. Note supplémentaire: Plus grande limite.

S. Hirzel.

Leipzig 1910.

Planck, Max, Acht Vorlesungen über theoretische Physik, gehalten an der Columbia University in the City of New York im Frühjahr 1909. — 127 p 8. M. 3: 60.

Einleitung. Reversibilität u. Irreversibilität. — Thermodynamische Gleichgewichtszustände in verdünnten Lösungen. — Atomistische Theorie der Materie. — Zustandsgleichung eines einatomigen Gases. — Wärmestrahlung. Elektrodynamische Theorie. — Wärmestrahlung. Statistische Theorie. — Allgemeine Dynamik. Prinzip der kleinsten Wirkung. — Allgemeine Dynamik. Prinzip der Relativität.

Stark, J., Prinzipien der Atomdynamik. T. 1: Die elektrischen Quanten. — X + 124 pp. 8. M. 3: 20.

Prinzipielle Methoden der physikalischen Erkenntnis. Atomistische Struktur der elektrischen Ladung und der elektromagnetischen Medien. Die Masse der freien elektrischen Quanten. Energie und Struktur des stationären elektromagnetischen Feldes.

Francis Hodgson.

London 1910.

Gallatly, William, The modern geometry of the triangle. — 70 p. 8. 2 sh. 6 d.

Lemoine and Brocard points. Angular and tripolar coordinates. Pedal and antipedal triangles. The medial triangle. Simson's line. The orthopole. Orthogonal projection.

Ulrico Hoepli.

Milano 1910—1911.

Beltrami, Eugenio, Opere Matematiche, Pubbl. per cura della facoltà di scienze della R. Università di Roma. T. 3. — 488 p. 4. L. 25: —.

Pascal, E., Lezioni di calcolo infinitesimale. Parte 1—2. 3:a ed. riv. (Manuali Hoepli 178—179, 180—181.) — P. 1. VIII + 310 pp. 8 P. 2. VIII + 330 pp. 8.

P. 1. Calcolo differenziale: Funzioni reali di variabili reali. Derivate di una funzione. Sviluppabilità in serie delle funzioni. Studio dei diversi modi di variare di una funzione nelle vicinanze di un punto. Alcune applicazioni analitiche. Applicazioni geometriche. Principii di geometria differenziale. — P. 2. Calcolo integrale: Gli integrali definiti e indefiniti. L'integrabilità delle funzioni. Calcolo degli integrali indef. e def. Gli integrali multipli. Le forme ai differenziali tot. di primo ord. e di primo grado. Geometria integrale. Equazioni differenziali.

Internationale Verlagsanstalt für Kunst u. Literatur.

Berlin 1911.

Werner, Otto, Zur Physik Leonardo da Vincis. Mit 104 Abb. — IV + 184 pp. 8. M. 2: —.

Leonardos Bildungsgang. Quellen Leonardo da Vincis für die uns interessierenden Gegenstände. Leonardos Physik: Optik, Akustik, Wärme, Magnetismus. Schlusswort.

Verlagsbuchhandl. Max Jänecke.

Hannover 1909.

Gruhn, P., Mathematische Formelsammlung. — 61 p. 8. M. 1: 20 geb.

Arithmetik und Algebra. Trigonometrie. Längen- und Flächenberechnungen an ebenen Gebilden. Rauminhalte und Oberflächen von Körpern. Analytische Geometrie der Ebene. Differentialrechnung. Integralrechnung. Die griechischen Buchstaben.

Friedrich Kilian's Nachf.

Budapest 1910.

STEÉCZ, GEORG, Der »grosse Satz» Fermats ohne Kongruenzen bewiesen. — 100 p. 4.

Allgemeine Fragestellung über Fermats »Grossen Satz» u. die kritischen Grundgleichungen dazu. Der affirmative Teil des Fermat'schen Satzes. Unmöglichkeit geradzahlich potenzirter Fermat'scher Gleichungen von höherem als zweitem Grad. Elementärste Begründung der Abel'schen Grundformeln zur Kongruenzmethode. Unmöglichkeit Fermat'scher Gleichungen von höher als zweiter Potenz im Allgemeinen. Fermat's »wunderbarer» Beweis für seinen »Grossen Satz .

Wilhelm Knapp.

Halle a. S. 1909.

LICHTENECKER, K., und ARTMANN, P., Naturlehre. Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper; Wärmelehre; Grundriss der Chemie. Hrsg. v. Emil Burok. Mit 103 Abbildungen im Text. — VIII + 168 pp. 8. M. 6: 25.

1 Teil. Physik. 2 Teil. Chemie: die Metalloide, die Metalle.

L. Kókai.

Budapest 1909—1911.

VÖRÖS, CYRILLO, Analitika geometrio absoluta. V. 1. La ebeno Bolyaia. — 132 p. 8. K. 9: 60.

Antauparolo. Enkonduko. Parto unua: Punkto kaj rekto. Parto dua: Konikoj.

—, Elementoj de la geometrio absoluta. — 104 p. 8. K. 4: 80.

Enkonduko. Ebena geometrio. Trigonometrio. Elementoj de la spaca geometrio. Rimarkoj pri la elipsa ebeno.

—, Analitikus Bolyaiféle geometria. Elsö kötet sikgeometria. VII + 474 pp. 8. K. 15: —.

Bevezetés. — A pont-és sugarsor geometriája: A pont meghatározása. A sugár meghatározása. Pontsorok tránszformációja. Az egyenes idomainak geometriái. Sugársorok tránszform. Ortogonális geometria. — A sik geometriája: Pontkoordináták. Vonalkoordináták. Transzformáció a síkban. Elsörendü idomok kollineár geometriája. Az elsörendü idomok kongruens geometriája. Másodrendü idom. a kollineár geometriában. A másodrendü idom. sora. Egy alapul vett kúpszeletre vonatkozó geometria. Egy kúpszeletre vonatkozó kör geometriája. A kúpszeletek asszimptótikus és fokális tulajdonsága. A kúpszeletek kongruens geometriája.

M. Krayn.

Berlin 1910.

Eberhardt, C., Theorie und Berechnung der Luftschrauben. Mit Beispielen und Versuchsresultaten aus der Praxis. Mit 60 Abbild. — 122 p. 8.

Hubschrauben. Schrauben im Marsch. Schrauben mit gewölbten Flächen. Beispiele aus der Praxis.

Sturm, Ch., Lehrbuch der Analysis (Cours d'analyse). Übers. von Theodor Gross. Neue unveränd. Ausg. in einem Bde. — XVIII + 711 pp. 8. M. 10 (geb.).

Bd. 1. Vorwort des Übersetzers. Notiz ü. Sturms Leben u. Schriften. Differentialrechnung: Einleit. Angaben. Lehrsätze ü. die Ableit. u. Differentiale. Differentiations-Regeln. Reihen. Differentiation der transcend. Funktionen. Differentiation der unentwickelt. (impliciten) Funktionen. Vertausch. der unabh. Veränderl. Differentiation der Funkt. v. mehreren unabh. Veränderl. Analyt. Anwendungen der Differentialrechn. Reihenentwickel. f. Funktionen einer Veränderl. Anwend. der Maclaurinschen Reihe. Die Moivresche Formel u. Folgerungen aus ihr. Auflös. der binom. Gleichungen. Vieldeutige Ausdrücke. Entwickel. der Funktionen mehrerer Veränderl. Maxima u. Minima der Funkt. mehrerer Veränderl. — Geometr. Anwendungen der Differentialrechn.: Theorie der Tangenten. Sätze ü. die Flächen u. Bogen ebener Kurven. Beziehung der eben. Kurven auf Polarkoordinaten. Theorie d. Berührung der eben. Kurven. Evoluten u. einhüllende Kurven ebener Kurven. Spezielle Untersuchung d. Cykloide. Krümmung eben. Kurven. Die Kurven doppelter Krümmung. Krumme Flächen u. Linien doppelter Krümmung. Krümmung d. Linien im Raume. Schraubenlinie. Singuläre Punkte d. eben. Kurven. — Integralrechn.: Regeln f. die Integration d. Funktionen. Integration rationaler Funktionen. Integrat. irration. Funkt. Integrat. transcendenter Funkt. Bestimmte Integrale. Integrat. durch Reihen. — Geometr. Anwendungen d. Integralrechn.: Quadratur ebener Flächen. Rektifikat. ebener Kurven. Kubatur d. Körper. Mehrfache Integrale. Inhalt krummer Flächen.

Bd. 2. Vorvort d. Übersetzers. Integralrechnung, Forts.: Differentiation u. Integration unter dem Integralzeichen. Berechn. bestimmter Integrale. Eulersche Integrale. Integrat. vollst. Differentiale u. der Differentialgleichungen. Singuläre Auflösungen d. Gleich. mit zwei Veränderl. Differentialgleich. beliebiger Ordn. Integrat. einiger Differentialgleich. v. belieb. Ordnung. Integrat. der linearen Differentialgleich. ohne zweites Glied. Integrat. d. vollständ. linearen Differentialgleich. Auflös. der Differentialgleich. durch Reihen. Simultane Differentialgleich. Integrat. der Gleichungen m. part. Differentialen. Geometr. Anwendungen d. part. Differentialgleich. Krümmung d. Flächen. Rechnung m. endlichen Differenzen. Die inverse Differenzenrechn. Interpolationsformeln. — Variationsrechnung: Variation bestimmter Integrale. Anwendungen.

Gerhard Kühtmann.

Dresden 1911.

Kühtmanns Rechentafeln. Ein handliches Zahlenwerk mit zwei Millionen Lösungen, die alles Multiplizieren und Dividieren ersparen und selbst die grössten

Rechnungen dieser Art in wenige Additions- oder Subtraktionszahlen auflösen. Nebst Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1 bis 1000. — 476 p. 4. Geb. M. 18: —.

Libraire Larousse.

Paris 1911.

VINOT, JOSEPH, Récréations mathématiques. Questions curieuses et utiles extraites des auteurs anciens et modernes. 6:e éd. — VIII + 215 pp. 8.

Longmans, Green & C:o.

London 1910.

HIME, HENRY W. L., Anharmonic coordinates. — XIII + 127 pp. 8. 7 sh. 6 d.

Plane geometric nets. The point. The straight line. Distances, areas and angular functions. The general equation of the second degree. Special conics. Tangential equations. Cross ratio. Transformation of coordinates. The circle. The foci of a conic. Miscellaneous theorems.

J. B. Metzler'sche Buchhandlung.

Stuttgart 1909—1910.

PILGRIM, L., Vereinfachte Behandlung der schiefwinkligen Koordinaten im Raum. (Sep.-abdr. aus den Mathem.-naturw. Mitteilungen.) — 78 pp. 8. M. 2: 40.

Projektion eines Vektors. Zwei Vektoren. Drei Vektoren. Die gerade Linie. Die Ebene. Koordinatentransformation. Tetraederkoordinaten. Massbeziehungen in tetrametr. Koordinaten. — Tangente, Normalen, Schmiegungs- und Normalebene. Krümmungs- und Torsionsradius, Schmiegungsschraubenlinie u. Schmiegungskugel. Zweite Form der Raumkurvengleichungen. — Krumme Flächen: Erste Form der Flächengleichung. Parameterdarstellung einer Fläche.

REGER, F., Tachymeter-Tafeln als Ergänzungen der Jordanschen »Hilfstafeln für Tachymetrie». Mit einem Vorwort von E. Hammer. — VI + 146 pp. 8. M. 5: —.

I. D von 251 bis 350 für α bis zu 10° A. T. II. α von 30° bis 45° A. T. für D bis zu 101.

Munn & Company.

New York 1910.

The fourth dimension simply explained. A collection of essays selected from those submitted in the scientific american's prize competition. With an introduction and editorial notes by HENRY P. MANNING. — 251 p. 8. $ 1: 50.

Introduction. An elucidation of the fourth dimension. Non-euclidean geometry and the fourth dimension. Fourth dimension absurdities. The boundary of the four-dimensional unit and other features of four-dimensional space. How the fourth dimension may be studied. Space and hyperspace. An interpretation of the fourth dimension. Length, breadth, thickness, and then what? The fourth dimension algebraically considered. Difficulties in imagining the fourth dimension. Some fourth dimension curiosities. Characteristics of the fourth dimension. The fourth dimension the playground of mathematics. The true and the false in the theory of four dimensions. The ascending series of dimensions. The mind's eye and the fourth dimension. Other dimensions than ours. The meaning of the term »fourth dimension». A pupil in geometry quizzies his teacher about the fourth dimension. Possible measurements and forms in a system of four dimensions. The fairyland of the fourth dimension. The properties of four-dimensional space.

John Murray.

London 1911.

Report of the eightieth meeting of the British Association for the advancement of science, Sheffield: 1910, Aug. 31—Sept. 7. — CXLIV + 868 + 96 pp. 8.

Thos. P. Nichols & son.

Lynn, Mass., U. S. A. 1911.

See, T. J. J., Researches on the evolution of the stellar systems. Vol. 2. The capture theory of cosmical evolution, founded on dynamical principles and illustr. by phenomena observ. in the spiral nebulae, the planetary syst., the double and multiple stars and clusters and the starclouds of the milky way. — 734 p. 4.

Methods for finding the orbits and spiral paths which a particle may describe und. centr. forces varying as some power of the distance. Investigations of the laws of attraction f. particles moving in particular plane spirals; and of the projection of these paths, with espec. refer. to the figures of the nebulae: compar. of theory w. observations. Theory of the motion of a syst. of bodies subj. to their mut. gravitation, and of the invariable plane discov. by Laplace in 1784. Theory of the rotation of a condens. mass and of the formation of the spiral or whirlpool nebulae. Distribut. of the nebulae w. resp. to the milky way, the size of the larger spiral nebulae, and other consider. which invalidate the theories of these nebulae heretofore advanced. On the movement and close approach of sep. stars. The secular effects of the action of a resist. medium upon the orbital motions of the heavenly bodies. The restrict. problem of three bodies, or theory of the motion of a sun and planet revolv. in circles ab. their common center of grav. and act. up. a particle or satellite of infinites. mass. Theory of the capture of

comets and of the transform. of their orbits by the perturbat. of the planets. Dynamical theory of the capt. of satellites and of the division of nebulae und. the secular action of a resist. medium. Origin of the lunar-terrestrial syst. by capt., w. further consider. on the theory of satellites and on the phys. cause which has determ. the directions of the rotations of the planets ab. their axes. On the determination of the secular acceleration of the mean motion of the moon from the observ. of ancient eclipses and on an indicated secular accelerat. of the mean motion of the sun. Investigation of the sev. phys. causes which may contribute to the product. of the observ. secular accelerat. in the mean motion of the moon and of the indicat. secular accelerat. in the mean motion of the sun. On the craters, mountains, Maria and other phenomena observ. on the surface of the moon and on the indic. processes of the planetary growth. New theory of the origin of the planet. syst. On the fig. and dimens. of the planets and of the ring syst. of Saturn, and on the intern. constit. of the planets resulting from Laplace's law of density. Researches on the phys. constitution of the heavenly bodies. Researches on the rigidity of the heavenly bodies. Theory of the nebulae. Theory of double and multiple stars. Theory of star clusters. Gen. theory of the milky way and of the construct. of the sideral heavens. Spiral theory of the milky way, and of the two star streams; theory of temporary and of variable stars, and of the extinction of light in space. The laws of cosmical evolution.

Stab. Tipogr. Succ. Fratelli Nistri.

Pisa 1909.

Dini, Ulisse, Lezioni di analisi infinitesimale Vol. 2 — Calcolo integrale. (1 Parte.) — XIII + 468 pp. 8. Lire 20:—.

Integrali definiti. Proprietà fondamentali. Integrali indefiniti. Integrazione delle funzioni razionali. Integrazione di alcune funzioni irrazionali. Integrazione di alcune funzioni trascendenti. Caso delle funzioni che divengono infinite in punti dell' intervallo d'integrazione. Integrali fra limiti infiniti. Integrazione per serie. Integrali delle funzioni che oltre alla variabile d'integrazione contengono altre variabili. Applicazioni varie dei processi di derivazione e d'integrazione sotto il segno. Area delle curve piane. Archi delle curve nel piano e nello spazio. Area delle superficie curve. Volumi. Valori medii negli integrali definiti. Calcolo approssimato di questi integrali. Brevi studii sugli integrali Euleriani. Breve studio sugli integrali multipli. Trasformazione delle variabili in questi integrali. Integrazione delle espressioni differenziali che contengono più variabili.

Alvis Riedel.

Triest.

Riedel, A., Die Rechnungsgrundlagen der allgemeinen Pensionsanstalt für Angestellte, tabellarisch ausgewertet. — XIX + 120 pp. Kanzleiformat. — »Ergänzende Bemerkungen zu den Rechnungsgrundlagen der allgem. Pensionsanstalt f. Angeställte.« — 26 p. Kanzleiformat. Kr. 15.

Grundzahlen zur Berechnung der Leibrente für einen Invaliden. Grundzahl. z. Berechn. der Aktivitätsrente. Grundzahl. z. Berechn. der Anwartschaft auf Invalidenpension. Grundzahl. z. Berechn. der Leibrente f. Frauen. Grundzahl. z. Berechn. d. Anwartschaft auf Witwenpension. Sterbetafel f. sämtl. Eisenbahnbedienstete. Grundzahl. z. Berechn. d. Anwartschaft auf Waisenpension. Berechn. der Wahrscheinlichkeiten verheiratet zu sein, (μx), f. die Alter 51 bis 69. Berechn. der Werte m 50 $y = \frac{l y + h}{l y}$. Grundzahl z. Berechn. der Anwartschaft auf einmalige Abfertigung. Werte der temporären, monatl. vorschüssigen Aktivitätsrente von jährlich 1. Werte d. aufgeschob., monatl. vorschüssigen Aktivitätsrente v. jährlich 100. Werte d. aufgeschob. Anwartschaft auf eine gleichbleib. Invalidenrente v. jährl. 100. Werte d. aufgeschob. Anwartschaft auf eine gleichbleib. Witwenrente v. jährl. 100. Werte d. aufgeschob. Anwartschaft auf eine mit 1 beg. u. jährl. um 1 steig. Invalidenrente. Werte d. aufgeschob. Anwartschaft auf eine m. 1 beg. u. jährl. um 1 steig. Witwenrente. Werte der aufgeschob. Anwartschaft auf eine gleichbleib. Waisenrente v. jährl. 1. Werte d. Anwartschaft auf eine einmal. Abfertigung v. 100. Werte d. steig. Invalidenpension f. ein Pensionsschema m. einer Karenzfrist v. 10 Jahren u. einer Dienstdauer v. 40 Jahren. Werte d. steig. Witwenpension f. ein Pensionsschema m. einer Karenzfrist v. 10 Jahren u. einer Dienstdauer v. 40 Jahren. Werte d. steig. Invalidenpension f. ein Pensionsschema m. einer Karenzfrist v. 10 Jahren u. einer Dienstdauer v. 35 Jahren. Werte d. steig. Witwenpension f. ein Pensionsschema m. einer Karenzfrist v. 10 Jahren u. einer Dienstdauer v. 35 Jahren. Werte d. Anspruches auf Invalidenpension u. Altersrente n. Pensionsschema A. Werte d. Anspruches auf Witwenpension n. Pensionsschema A. Werte d. Anspruches auf Invalidenpension u. Altersrente n. Pensionsschema B. Werte d. Anspruches auf Witwenpension n. Pensionsschema B.

Riedel, A., Tabellarische Auswertung der Rechnungsgrundlagen für Bureaubeamtenpensionsfonds. — XV + 77 pp. Kanzleiformat. Kr. 10:—.

Ausscheideordnung d. Aktiven u. Absterbeordnung d. Invaliden. Diskontierte Zahlen d. Invaliden. Diskont. Zahlen d. Aktiven. Hilfszahlen z. Berechn. des Wertes v. Invaliden-Pensionsanwartschaften. Hilfszahlen z. Berechn. d. Wertes v. Witwen- und Waisen-Pensionsanwartschaften f. Invalide. Hilfszahl. z. Berechn. d. Wertes v. Witwen-Pensionsanwartschaften f. Aktive. Hilfszahl. z. Berechn. d. Wertes v. Waisen-Pensionsanwartschaften f. Aktive. Hilfszahl. z. Berechn. d. Wertes d. einmal. Abfertigung f. verheiratete Mitglieder, welche im Zustande d. Aktivität sterben. Werte d. temporären, monatl. vorschüssigen Aktivitätsrente v. jährl. 1. Werte d. aufgeschob., monatl. vorschüssigen Aktivitätsrente v. jährl. 100. Werte der aufgeschob. Anwartschaft auf eine gleichbleib. Invalidenrente v. jährl. 100. Werte d. aufgeschob. Anwartschaft auf eine gleichbleib. Witwenrente v. jährl. 100. Werte d. aufgeschob. Anwartschaft auf eine m. 1 beg. u. jährl. um 1 steig. Invalidenrente. Werte d. aufgeschob. Anwartschaft auf eine m. 1 beg. u. jährl. um 1 steig. Witwenrente. Werte d. aufgeschob. Anwartschaft auf eine gleichbleib. Waisenrente v. jährl. 100. Werte d. Anwartschaft auf eine einmal. Abfertig. von 100. Werte d. steig. Invalidenpension f. ein Pensionsschema m. einer Karenzfrist v. 10 Jahr. u. einer Dienstdauer v. 40 Jahr. Werte d.

steig. Witwenpension f. ein Pensionsschema m. einer Karenzfrist v. 10 Jahr. u. einer Dienstdauer v. 40 Jahr. Werte d. steig. Invalidenpension f. ein Pensionsschema m. einer Karenzfrist v. 10 Jahr. u. einer Dienstdauer v. 35 Jahr. Werte d. steig. Witwenpension f. ein Pensionsschema m. einer Karenzfrist v. 10 Jahr. u. einer Dienstdauer v. 35 Jahr.

Otto Salle.

Berlin 1907—1910.

Jacobi de Billy, Doctrinæ analyticæ inventum novum. Fermats Briefen an Billy entnommen. Hrsg. u. übers. von Paul von Schaewen. — 143 p. 8. M. 3:—.

Inventum novum. Übersetzung des Inventum novum. Anmerkungen.

Lanner, Alois, Neuere Darstellungen der Grundprobleme der reinen Mathematik im Bereiche der Mittelschule. — VIII + 192 pp. 8. M. 3:—.

B. G. Teubner.

Leipzig 1908—1911.

Archimedis Opera Omnia cum commentariis Eutocii. Ed. J. L. Heiberg. Vol. I. (Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana.) — XI + 445 pp. 8. geh. M. 6:—; geb. M. 6:60.

Auerbach, F., & Rothe, R., Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. 2 Jahrgang. 1911. Mit einem Bildnis Hermann Minkowskis. — IX + 567 pp. 8. M. 7:—

Hermann Minkowski. Kalender. Astronomie. Zahlentafeln. — Mathematik: Arithmetik u. Algebra; Analysis; Geometrie; Angewandte Mathematik; Mathematischer Unterricht. — Mechanik: Statik; Kinematik; Dynamik; Potentialtheorie. — Physik: Die Relativitätstheorie; Physik der Materie; Schall; Wärme; Elektricität und Magnetismus; Licht; Radioaktivität. — Elektrotechnik. — Allgemeine Chemie. — Zeitschriften f. Mathematik und Physik.

Behrendsen, D., & Götting, E., Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. Unterstufe Ausgabe A für Gymnasien. 2:e Aufl. Mit 295 Fig. — VIII + 277 pp. 8. M. 2:80 geb.

Vorbereitender Lehrgang. — Planimetrie: Die Lehre von den Dreiecken. Lehre von den Vier- und Vielecken. Lehre vom Kreise. Flächeninhalt der Figuren. Lehre von den Proportionen u. von der Ähnlichkeit. Algebra und Geometrie. Berechnung der Dreiecke, regelmässigen Vierecke u. des Kreises. Anhang. — Arithmetik.

Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. VI. — 88 p. 8. M. 0:50.

Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. H. 4. — 54 pp. 8. M. 0:50.

Cohn, Emil, Physikalisches über Raum und Zeit. — 24 pp. 4. M. 0:60.

Engelhardt, Philipp, Untersuchungen über die im Schlusswort des Lie'schen Werkes »Geometrie der Berührungstransformationen» angedeuteten Probleme. — 65 pp. 8. M. 2:—.

Enriques, Federigo, Fragen der Elementargeometrie. Aufsätze von U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali. Gesamm. und zusammengest. Teil 1: Die Grundlagen der Geometrie. Mit 144 Fig. Deutsch v. H. Thieme. — X + 366 pp. 8. M. 10:—.

F. Enriques: Über die philosophische Bedeutung der Fragen, die sich auf die Grundlagen der Geometrie beziehen. — F. Enriques: Bemerkungen zum Unterricht in der wissenschaftlichen Geometrie. — U. Amaldi: Über den Begriff der Geraden und der Ebene. — A. Guarducci: Kongruenz und Bewegung. — G. Vitali: Über Anwendungen des Postulats der Stetigkeit in der elementaren Geometrie. — U. Amaldi: Über die Lehre von der Äquivalenz. — G. Vailati: Lehre von den Proportionen. — R. Bonola: Über die Parallelentheorie und über die nichteuklidischen Geometrie.

Fueter, Rudolf, Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluss auf die Entwicklung der Zahlentheorie. Bericht zur Feier des 100 Geburtstags Eduard Kummers der deutschen Mathematiker-Vereinigung. — 47 pp. 8. M. 1:50.

Geck, Erwin, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Württemberg. (Abhandl. üb. den math. Unterricht in Deutschland ... hrsg. von F. Klein. Bd. II, H. 3.) — 102 p. 8. M. 2:60.

Einleitung. Die Mathematik im Gymnasium. Die Mathematik im Realgymnasium und in der Realschule. Die Mathematik in den höheren Mädchenschulen u. dem Lehrerinnenseminar. Die mathematischen Lehrbücher. Die Prüfungen. Von der Ausbildung der Lehrer an den höheren Schulen.

Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke. Bd. 3, T. 1. Theorie der Ebbe und Flut, Prüfungsarbeit 1840, und Abhandlungen zur mathematischen Physik aus dem Nachlasse. Hrsg. von Justus Grassmann & Friedrich Engel. Mit 16 Fig. — 353 p. 8. M. 18:— geh.

Theorie der Ebbe und Flut: Vorbemerkungen des Herausgebers. Die Prüfungsarbeit. Formeltafeln. Anmerkungen zur Theorie der Ebbe und Flut. — Abhandlungen zur mathemat. Physik: Analytische Optik aus der Undulationstheorie. Bearb. 1846. Analytische Optik. Bearb. 1850. Undulationstheorie. Verbreitung des Schalles. Hypothese der aus + E und — E zusammengesetzten Ätheratome. Va. Ätheratome. Verzeichnis der Stellen, an denen der Abdruck von der Urschrift abweicht. Sachregister. Namenregister etc.

Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke. Bd 3, T. 2. Grassmanns Leben, geschildert von Friedrich Engel. Nebst einem Verzeichnisse der von Grassmann veröffentlichten Schriften und einer Übersicht des handschriftlichen Nachlasses. Mit 3 Fig. — XIII + 400 pp. 8. M. 18:— geh.

Hahn, Hans, Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen. Teil I. — 52 pp. 8. M. 1:20.

Einleitende Theoreme. Die Fredholmsche Theorie. Reelle symmetrische Kerne.

Herting, Gottlieb, Von Strecke, Quadrat und Würfel zum bestimmten Integral. Zum Gebrauche in den oberen Klassen unserer Mittelschulen und beim Selbstunterrichte. — IV + 135 pp. 8. M. 2:80 geb.

Inhalt: Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie, einige bestimmte Integrale mit Anwendungen.

Klein, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. T. 1: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung geh. im Wintersemester 1907—08. Ausgearb. von E. Hellinger. 2:e Aufl. — 614. p. 4. M. 7:50 geh.

Einleitung. — Das Rechnen mit den natürlichen Zahlen. Die ersten Erweiterungen des Zahlbegriffes. Von den besonderen Eigenschaften der ganzen Zahlen. Die komplexen Zahlen. — Über die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt. — Reelle Gleichungen mit reellen Unbekannten. Gleichungen im Gebiete komplexer Grössen. — Logarithmus und Exponentialfunktion. Die goniometrischen Funktionen. Von der eigentlichen Infinitesimalrechnung. — Transzendenz von e und π. Die Mengenlehre. — Zusätze zur zweiten Auflage.

Kowalewski, Gerhard, Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen. Fortsetzung der Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, zugleich eine Einführung in die Funktionentheorie. Mit 124 Fig. — M. 12:— geh., 13:— geb.

Die komplexen Zahlen. Komplexe Funktionen reeller Veränderlichen. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Kurvenintegrale. Der Cauchy'sche Fundamentalsatz und seine Konsequenzen. Unendliche Reihen und unendliche Produkte von Funktionen. Das Theorem von Mittag-Leffler und die Weierstrass'sche Produktdarstellung der ganzen Funktionen.

Lanchester, F. W., Aerodynamik, ein Gesamtwerk über das Fliegen. Aus dem engl. übers. von C. & A. Runge. 2:er Bd. (Aerodonetik.) Mit Anhängen üb. die Theorie u. Anwendung des Gyroskops, über den Flug der Geschosse usw. Mit 208 Fig. — XIV + 327 pp. 8. M. 12:— geb.

Freier Flug, die allgem. Prinzipien u. die Erscheinungen. — Die Phygoidentheorie: Die Gleichungen der Flugbahn. Aufzeichnung der Flugbahn. — Elementare Folgerungen aus der Phygoidentheorie. Stabilität der Flugbahn unter dem Einfluss des Widerstandes und des Trägheitsmoments. Nachprüfung und Beweis der Phygoidentheorie durch Versuche. Seitliche Stabilität und Richtungsstabilität. Rückblick auf die Kapitel 1—7 und allgem. Schlussfolgerungen. Der Segelflug. Experimentelle Aerodonetik.

Lietzmann, Walther, Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preussen. Mit 18 Fig. (Abhandl. üb. den math. Unterricht in Deutschland ... hrsg. von F. Klein. Bd I, H. 2.) — VI + 202 pp. 8. M. 5:—.

Die allgemeine Organisation des Unterrichts an den höheren Knabenschulen. Die mathematischen Lehrpläne u. Lehraufgaben f. die höh. Knabenschulen in Preussen. Der Einfluss der Reformbewegung auf die Lehrpläne.

Lorey, Wilhelm, Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preussen und einigen Norddeutschen Staaten. (Abhandl. üb. d. mathem. Unterricht in Deutschland ... hrsg. von F. Klein. Bd 1, H. 3.) — 118 p. 8. M. 3:20 geh.

Neuendorff, R., Praktische Mathematik. 1. Graphisches und numerisches Rechnen. Mit 69 Fig. — VI + 104 pp. 8. M. 1:25.

Graphische Darstellungen. Flächenmessung. Körpermessung. Verkürztes Rechnen. Des Rechnen mit Tabellen. Mechanische Rechenhilfsmittel. Sachregister.

Nielsen, Niels, Elemente der Funktionentheorie. Vorlesungen gehalten an der Universität Kopenhagen. — X + 520 pp. 8. M. 15:— geb.

Funktionen reeller Veränderlichen. Fundamentalreihen und Grenzwerte. Allgemeine Zahlenfolgen. Unendliche Reihen mit reellen Gliedern. Zahlenmengen. Funktionen einer reellen Veränderlichen. Stetige Funktionen. Gleichmässig konvergente Reihen. Differentialquotienten. Funktionen zweier reeller Veränderlichen. Integration endlicher Funktionen. Der allgemeine Integralbegriff. Integrale mit einem Parameter. — *Funktionen komplexer Veränderlichen.* Komplexe Zahlen. Zahlenmengen mit komplexen Elementen. Analytische Funktionen. Reihen mit komplexen Gliedern. Unendliche Produkte. Anwendungen des Cauchyschen Satzes. Gleichmässig konvergente Funktionenfolgen. Potenzreihen. Transzendente Funktionen. Die gebrochene lineare Transformation. Abbildung durch analytische Funktionen. — *Elementare Funktionen.* Die trigonometrischen Funktionen. Der Logarithmus und die zyklometrischen Funktionen. Bestimmung gewisser Integraltypen. Algebraische Funktionen. Algebraische Singulari-

täten. Elementartranszendenten algebraischer Argumente. Integrale spezieller algebraischer Funktionen. Doppelperiodische Funktionen. Polynome von Bernoulli, Stirling und Legendre. Summenformeln. Asymptotische Reihen. Die Gammafunktion.

Poincaré, Henri, Die neue Mechanik. — 22 pp. 4. M. 0:60.

— —, Der Wert der Wissenschaft. (Wissenschaft und Hypotese II.) Deutsch von E. und H. Weber. Mit einem Bildnis des Verfassers. Zweite Aufl. — VII + 251 pp. 8. M. 3:60 geb.

Die mathematischen Wissenschaften. Die physikalischen Wissenschaften. Der objektive Wert der Wissenschaft.

Runge, C., Analytische Geometrie der Ebene. Mit 75 Fig. — 198 p. 8. M. 6:— geb.

Die Gleichung der geraden Linie und des Kreises. Die Konstruktionen mit Geraden und Kreisen. Die linearen Koordinatentransformationen. Homogene Koordinaten.

Schimmack, Rud., Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland. Mit einem Einführungswort zu Band III von F. Klein. (Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. Bd. III, 1.) — VI + 146 pp. 8. M. 3:60.

Die Vorgeschichte der Reformbewegung und ihre Entwicklung bis 1907. — Die Fortschritte der Reformbewegung seit 1907. A. Arbeit auf Versammlungen und Ausschüssen: B. Neugestaltungen im Unterrichtswesen; C. Aufsätze und Bücher zur Reformbewegung. — Anhang 1: Entwurf eines mathematischen Lehrplans für die Oberrealschulen. Anhang 2: Namen- und Sachverzeichnis.

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung 4:e & 5:e Aufl. bearb. von Georg Scheffers. 2:er Bd. (Integralrechnung.) Mit 108 Fig. — XIV + 638 pp. 8. M. 13:— geb.

Das Integral. Integrale von elementaren Funktionen. Theorie der bestimmten Integrale. Theorie der Eulerschen Integrale. Quadratur und Rektifikation von Kurven. Kubatur, Komplanation und mehrfache Integrale. Integration vollständiger Differentiale und Integration längs Kurven. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Einleitung zu dem Anhange von A. Harnack. Anhang: Grundriss der Theorie der Fourierschen Reihe und des Fourierschen Integrales von A. Harnack. Geschichtliche Anmerkungen zum ersten und zweiten Bande.

Timerding, H. E., Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern. (Abhandlungen üb. d. mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch d. Internat. Math. Unterrichtskommission. Hrsg. von F. Klein Bd. 3, H. 2.) Mit 22 Fig. — VI + 112 pp. 8. M. 2:80 geh.

Einleitung. — Historischer Teil: Die Entwicklung der Mathematik in ihrer Beziehung zur Physik. Die Entwicklung des physikalischen Lehrbuches in mathemat. Hinsicht. — Methodischer Teil: Allgemeine Betrachtungen. Der mathematische Charakter einzelner physikalischer Probleme. Besondere mathematische Fragen.

TREUTLEIN, P., Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen. Mit einem Einführungswort von F. Klein und mit 38 Taf. u. 87 Abbild. — X + 216 pp. 8. M. 5:— geh.; M. 5:60 geb.

Anschauliche Raumlehre od. geometrischer Anschauungsunterricht auf der Unterstufe unserer höheren Schulen. Geschichte des geometrischen Anschauungsunterrichtes. Forderung eines sachgemässen geometrischen Anschauungsunterrichtes als Unterstufe und Begründung dafür. Praktische Gestaltung des geometrischen Anschauungsunterrichtes. A Allgemeine Bemerkungen. B Einzelausführungen für den Unterrichtsgang. Körper und aus ihnen abgeleitete Gebilde. Flächeninhalt ebener Figuren. Rauminhalt der einfacheren Körperformen. — *Der geometrische Unterricht der Oberstufe unserer höheren Schulen.* (Eine Skizze.) Anhang.

VAHLEN, THEODOR, Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstellung. Eine Ergänzung der niederen und eine Vorstufe zur höheren Geometrie. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern, Bd. 33.) Mit 127 Figuren im Text. — XII + 349 pp. 8. geh. M. 11:—; geb. M. 12:—.

Lineare Konstruktionen. Quadratische Konstruktionen. Kubische Konstruktionen. — Höhere algebraische und transzendente Konstruktionen. Anwendungen und Ergänzungen zu den vorhergehenden Teilen. — Numerische Approximationen. Analytische Approximationen. Konstruktive Approximationen. Irrazionalität und Transzendenz von e und π.

WIELEITNER, HEINRICH, Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten sowie Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte im Königreich Bayern. Mit einem Einführungswort von P. Treutlein. (Abhandl. üb. den math. Unterricht in Deutschland . . . hrsg. von F. Klein.) — XI + 85 pp. 8. M. 2:40.

Allgemeines. Das humanist. Gymnasium. Das Realgymnasium. Die Realschule und Oberrealschule. Die Lehrbücher. Stellungnahme d. Fachkreise zu den Reformfragen. Die Prüfungsordnung f. Lehramtskandidaten. Pädagogische Ausbild. u. Fortbild. der Mittelschullehrer.

ZÜHLKE, PAUL, Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten. (Abhandl. üb. d. mathem. Unterricht in Deutschland. . . . hrsg, von F. Klein. Bd. 3, H. 3.) Mit 14 Fig. — 92 p. 8. M. 2:60 geh.

Einleitung. Die Stellung des Linearzeichnens und der darstellenden Geometrie im Gesamtlehrplan. Lehrstoff. Lehrverfahren. Zeichensäle und Zeichengeräte. Linearzeichnen und darstellende Geometrie bei Versetzungen und Reifeprüfungen.

Friedr. Vieweg & Sohn.

Braunschweig 1909—1911.

FRICKE, ROBERT, Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt. 5 Aufl. Mit 74 Fig. — XV + 219 pp. 8. M. 5:— geh.; 5:80 geb.

Einleitung. Erklär. u. Berechn. des Differentialquotienten einer Funktion f(x). Die Ableitungen u. Differentiale höh. Ordnung einer Funktion f(x). — Bestimmung d. Maxima u. Minima einer Funktion f(x). Betracht. des Verlaufes ebener Kurven. Theorie d. unendlichen Reihen. Bestimmung der unter den Gestalten $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \cdots$ sich darbietenden Funktionswerte. — Begriffe des unbest. u. des bestimmt. Integrals nebst. geometr. Anwendungen. Weiterführung der Theorie der unbest. Integrale. — Differentiation u. Integration der Funkt. mehrerer unabh. Variabelen. Der Taylorsche Lehrsatz u. die Theorie der Maxima u. Minima. Geometr. Anwend. der Funkt. mehrerer Variabelen. — Allgem. Bemerkungen ü. Differentialgleichungen. Gewöhnl. Differentialgl. erster Ordn. mit zwei Variabelen. Gewöhnl. Differentialgl. höh. Ordnung m. zwei Variabelen. — Komplexe Zahlen u. Funktionen komplexer Variabelen.

LAUE, M., Das Relativitätsprinzip. Mit 14 Abbild. (Die Wissenschaft, Sammlung naturwissenschaftlicher u. mathematischer Monographien, H. 38.) — 10 + 208 pp. 8. geh. M. 6:50; geb. M. 7:20.

Die Problemstellung. Die älteren Theorien der Elektrodynamik bewegter Körper. Die Relativitätstheorie, kinematischer Teil. Weltvektoren und- tensoren. Die Elektrodynamik des leeren Raumes nach dem Relativitätsprinzip. Die Minkowskische Elektrodynamik der ponderablen Körper. Dynamik. Anhang.

MÜLLER, ALOYS, Das Problem des absoluten Raumes und seine Beziehung zum allgemeinen Raumproblem. (Die Wissenschaft, Sammlung naturwissenschaftlicher u. mathematischer Monographien, H. 39.) — 10 + 154 pp. 8. geh. M. 4:—; geb. M. 4:80.

Einleitung. — Logisch-physikalische Theorie des absoluten Raumes: Das phoronomische Weltbild. Die Dynamik des phoronomischen Weltbildes. Die Versuche zur Konstruktion des dynamischen Weltbildes: Der erste Weg, der zweite Weg. Inertialsystem u. absoluter Raum. Logik des absoluten Raumes. Das Trägheitsprinzip u. die Trägheitswirkungen. — Philosophische Theorie des abs. Raumes: Die allgemein-logische Begründung des abs. Raumes. Methaphysik des abs. Raumes. Die Grundlagen der Metaphysik des abs. Raumes u. der modernen Physik. — Die nichteuklidischen Geometrien u. der abs. Raum. Schluss. Anhang.

J. J. Weber.

Leipzig 1910.

BENDT, FRANZ, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 4 verb. Aufl. Mit 39 Abbildungen. — XVI + 267 pp. 8. M. 3:—.

Die algebraische Analysis: Vom binomischen Lehrsatz. Die unendlichen Reihen. — Die Differentialrechnung: Die allgemeine Lehre von den Funktionen. Die Entwicklung der Differentialformeln. Die Bildung der Differentialquotienten der Funktionen von Funktionen. Die höheren Differentialquotienten. Die Reihen von Taylor und MacLaurin. Die Bestimmung unbestimmter Formen. Vom Maximum u. Minimum der Funktionen. Von den Tangenten, Normalen, Subtangenten und Subnormalen der Kurven. Von der Konväxität, der Konkavität u. den Wendepunkten einer Kurve. Die Krümmung der Kurven und der Krümmungskreis. Die Bildung der Differentialquotienten von mehreren unabh. Veränderlichen. Entwickelung der Differentialquotienten für die nicht entwickelbaren Funktionen. Vertauschung der unabh. veränderl. Grössen. — Die Integralrechnung: Die Integralformeln. Die teilweise Integration. Formeln. Die bestimmten Integrale. Die Quadratur der Kurven. Die Rektifikation der Kurven. Die Inhaltsbestimmung der Rotationsflächen. Die Kubatur der Rotationskörper. Die vielfachen Integrale. Die Differentialgleichungen. Die komplexen Zahlen. Allgemeine Formeltafel.

Konrad Wittwer.

Stuttgart 1911.

GAUSS, F. G., Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Zum Gebrauche für Schule und Praxis. 111 bis 115 Aufl. — 176 + XXXIV pp. 8. M. 2:50.

EXPOSÉ SUCCINCT DES RÉSULTATS PRINCIPAUX DU MÉMOIRE POSTHUME DE KORKINE, AVEC UNE TABLE DES RACINES PRIMITIVES ET DES CARACTÈRES, QUI S'Y RAPPORTENT, CALCULÉE PAR LUI POUR LES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS À 4000 ET PROLONGÉE JUSQU'À 5000.

Par

C. POSSE

à St. Petersbourg.

1. Le mémoire posthume de Korkine, sous le titre: »Sur la distribution des nombres entiers suivant un module premier et les congruences binômes, avec une table des racines primitives et des caractères, qui s'y rapportent, pour tous les nombres premiers, inférieurs à 4000», est publié en russe dans le »Recueil mathematique de Moscou», (t. XXVII 1909).

Nous reproduisons ici cette table, l'ayant prolongée jusqu'à 5000, et nous donnons dans cette note l'explication de sa construction et son application à la résolution des congruences binômes, ce qui constitue le résultat principal du mémoire de Korkine.

La table contient quatre colonnes, qui forment pour chacun des nombres premiers inférieurs à 5000 une bande particulière. Dans la première colonne se trouvent les nombres premiers p, dans la seconde les nombres $p-1$, décomposés en facteurs premiers, dans la troisième une des racines primitives g de p, dans la quatrième les nombres, appelés *caractères*, dont la définition et le calcul seront indiqués tout à l'heure.

La partie de la table, correspondante aux nombres p inférieurs à 1000, a été empruntée aux tables de Jacobi »Canon arithmeticus», en conservant les racines primitives adoptées pour bases dans ces dernières. Pour les nombres p entre 1000 et 4000 les racines primitives et les caractères ont été calculés par Korkine; pour les nombres p entre 4000 et 5000 les caractères sont calculés par nous, à l'aide des tables des racines primitives de Wertheim (Acta mathematica t. 20).

En empruntant à ces tables les racines primitives, nous avons remplacé la plus petite racine positive, donnée par Wertheim, quand elle surpasse 2, par les nombres 10 et -10, lorsqu'ils sont aussi racines primitives, pour conserver l'anologie avec la partie de la table calculée par Korkine, et parce que le calcul des caractères à l'aide de ces nombres présente quelques avantages.

2. *Définition et calcul des caractères.* Soit p le nombre premier donné, et

$$p-1=q^{a}.N,$$

q étant un nombre premier, α un entier positif et N un nombre non divisible par q.

Les *caractères principaux ou du premier ordre et du degré* q sont les solutions de la congruence

$$u^{q}-1 \equiv 0 \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Nous les désignerons par

$$1,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{q-1}.$$

En désignant par ξ un non-résidu du degré q du nombre p, c'est à dire un nombre, dont la puissance

$$\xi^{\frac{p-1}{q}}$$

n'est pas congrue à l'unité suivant le module p, nous pouvons prendre

$$u_1 \equiv \xi^{\frac{p-1}{q}} \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

et nous aurons tous les q caractères principaux du degré q, en faisant

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ q-1$$

dans la formule

$$u_i \equiv u_1^{i} \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

En particulier, si l'on connait une racine primitive g de p, on pourra prendre $\xi=g$, et c'est justement cette supposition qui est adoptée dans le calcul des caractères de la table.

Les caractères du second ordre et du degré q sont les solutions de la congruence

$$\frac{u^{q^2}-1}{u^{q}-1} \equiv 0 \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1^*)$$

Ils n'existent que dans le cas de $\alpha \geq 2$, et dans ce cas leur nombre est égal à $q(q-1)$. On obtient une solution u'_1 de la congruence (1^*), en posant

$$u'_1 \equiv \xi^{\frac{p-1}{q^2}} \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2^*)$$

ξ désignant le même nombre que plus haut, et on aura toutes les solutions, c'est à dire tous les caractères du second ordre, en faisant

$$i = 1, 2, 3, \ldots q - 1$$

dans la formule

$$u'_i \equiv [u'_1]^i \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3^*)$$

et multipliant les nombres

$$u'_1, u'_2, \ldots u'_{q-1}$$

par les caractères du premier ordre

$$1, u_1, u_2, \ldots u_{q-1}.$$

Remarquons encore la formule

$$[u'_i]^q \equiv u_i \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

qui découle immédiatement des formules (1), (2), (1*), (2*). On définit d'une manière analogue les caractères du 3me, 4me ... ordre; l'ordre le plus élevé des caractères pour le nombre p donné est égal à α. Les caractères de l'ordre $K \leqq \alpha$ et du degré q sont les solutions de la congruence

$$\frac{u^{q^K} - 1}{u^{q^{K-1}} - 1} \equiv 0 \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1^{**})$$

Leur nombre est égal à $q^{K-1}(q-1)$. On obtient un de ces caractères $u_1^{(K-1)}$, en posant

$$u_1^{(K-1)} \equiv \xi^{\frac{p-1}{q^K}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2^{**})$$

ξ désignant *toujours le même non-résidu du degré q;* on les obtiendra tous, en faisant

$$i = 1, 2, 3, \ldots q - 1$$

dans la formule

$$u_i^{(K-1)} \equiv [u_1^{(K-1)}]^i \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3^{**})$$

et multipliant les nombres

$$u_1^{(K-1)}, u_2^{(K-1)}, \ldots u_{q-1}^{(K-1)}$$

par tous les caractères de tous les ordres inférieurs à K. Remarquons encore la formule

$$[u_i^{(K)}]^q \equiv u_i^{(K-1)} \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4^*)$$

qui découle immédiatement des précédentes.

On voit d'après cela qu'on peut définir les caractères du degré q comme les solutions du système suivant de congruences:

$$u^q \equiv 1, [u']^q \equiv u, [u'']^q \equiv u', \ldots [u^{(a-1)}]^q \equiv u^{(a-2)} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

On en tire comme conséquence cette formule générale:

$$[u_m^{(\mu)} u_n^{(\nu)} \ldots u_r^{(\varrho)}]^q \equiv u_m^{(\mu-1)} u_n^{(\nu-1)} \ldots u_r^{(\varrho-1)} \text{ (mod. } p) \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Elle montre, que pour avoir une solution de la congruence

$$X^q \equiv A \text{ (mod. } p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

où A est représenté sous forme d'un produit des caractères, il suffit d'augmenter d'une unité les indices supérieurs dans l'expression de A.

C'est sous cette forme, que Korkine énonce la règle, qui sert de base à son procédé de la résolution des congruences binômes.

Ajoutons à cela, que pour obtenir toutes les solutions de la congruence (7) il suffit de multiplier la solution obtenue par tous les caractères principaux du degré q.

Dans le cas de $q = 3$, les caractères, nommés cubiques, sont désignés par les lettres

$$z_i, z'_i, z''_i, \ldots$$

Les trois caractères principaux sont

$$1, z_1, z_2,$$

solutions de la congruence

$$z^3 - 1 \equiv 0 \text{ (mod. } p)$$

ou, en excluant l'unité, de la congruence

$$z^2 + z + 1 \equiv 0 \text{ (mod. } p)$$

d'où il suit, qu'on a

$$z_2 \equiv z_1^2 \equiv -z_1 - 1 \text{ (mod. } p).$$

Dans le cas de $q = 2$, les caractères, nommés quadratiques, sont désignés par les lettres

$$f, f', f'', \ldots$$

Les caractères quadratiques principaux ne sont autre chose, que les nombres $+1$ et -1; les caractères du second ordre sont les solutions de la congruence

$$f^2 \equiv -1 \text{ (mod. } p).$$

En appliquant la règle, exprimée par la formule (6), dans le cas de $q=2$, il faut évidemment remplacer le facteur (-1), lorsqu'il figure dans l'expression de A, par la lettre f, pour passer de l'expression de A à celle de X. Dans la table, les caractères quadratiques sont calculés successivement à l'aide des formules

$$f^{(\alpha-2)} \equiv g^{\frac{p-1}{2^\alpha}},\ f^{(\alpha-3)} \equiv [f^{(\alpha-2)}]^2, \ldots f' \equiv f''^2,\ f \equiv f'^2 \pmod{p}$$

en supposant $\alpha \geqq 2$, $p-1=2^\alpha N$, N impair, et désignant par g la racine primitive, placée dans la troisième colonne. La formule

$$f^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

sert comme moyen de vérification du calcul.

Pour les caractères cubiques et de degrés supérieurs la table ne contient qu'un seul caractère de chaque ordre, l'indice inférieur 1 étant toujours sous-entendu. Les caractères cubiques, pour un nombre $p=3^\beta N+1$, où N n'est pas divisible par 3, sont calculés à l'aide des formules

$$z^{(\beta-1)} \equiv g^{\frac{p-1}{3^\beta}},\ z^{(\beta-2)} \equiv [z^{(\beta-1)}]^3, \ldots z \equiv z'^3 \pmod{p}$$

la formule $z^2 \equiv -z-1 \pmod{p}$ servant de vérification du calcul. Pour

$$p = 2^\alpha 3^\beta q^\gamma r^\delta s^\varepsilon \ldots + 1,$$

où

$$3 < q < r < s \ldots,$$

les caractères des degrés $q, r, s, \ldots$ sont désignés respectivement par les lettres $u, v, w, \ldots$ avec des indices supérieurs, et calculés à l'aide des formules

$$u^{(\gamma-1)} \equiv g^{\frac{p-1}{q^\gamma}},\ u^{(\gamma-2)} \equiv [u^{(\gamma-1)}]^q, \ldots u \equiv [u']^q \pmod{p}$$

et d'autres analogues pour les $v, w, \ldots$ qu'il est inutile d'écrire.

Le signe $\equiv$ est remplacé par le signe $=$.

Remarque. Dans tout ce qui précède et dans la suite, en disant, que nous calculons un nombre quelconque A, nous sous-entendons, que c'est le nombre de la suite

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \pm \frac{p-1}{2},$$

congru à A suivant le module p, que nous calculons. Cela revient à considérer tous les nombres congrus entre eux suivant le module p comme un seul nombre, représenté par son résidu, le plus petit en valeur absolue, par rapport à p.

3. *Résolution des congruences binômes.* Il suffit de considérer les congruences

$$x^q \equiv a \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

où q est un diviseur premier de $p-1$, car c'est à ce cas que se réduisent tous les autres. En outre, nous aurons la condition

$$a^{\frac{p-1}{q}} \equiv 1 \pmod{p},$$

car c'est dans ce cas seulement, que la congruence (8) admet des solutions.

Congruences du second degré. Le cas le plus simple de $q=2$ mérite d'être considéré à part.

Les solutions de la congruence

$$x^2 \equiv a \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8^*)$$

sont connues sous une forme générale, pour les modules p de la forme

$$p = 4n+3.$$

En effet, on a ici

$$a^{\frac{p-1}{2}} = a^{2n+1} \equiv 1 \pmod{p},$$

donc

$$a^{2n+2} \equiv a, \text{ et } x \equiv \pm a^{n+1} \pmod{p}.$$

Pour les modules p de la forme

$$p = 4n+1,$$

les solutions de la congruence sont aussi connues dans le cas de n impair. En effet, si $n = 2m+1$, on aura

$$p = 8m+5,$$

$$a^{\frac{p-1}{2}} = a^{4m+2} \equiv 1 \pmod{p},$$

donc

$$1)\ a^{2m+1} \equiv 1, \text{ ou } 2)\ a^{2m+1} \equiv -1.$$

Dans le cas 1), on aura évidemment

$$x \equiv \pm a^{m+1} \pmod{p}$$

et dans le cas 2)

$$x \equiv \pm f . a^{m+1} \pmod{p}$$

où f est un nombre tel, que

$$f^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

c'est à dire un caractère quadratique du second ordre. Pour $p < 5000$, la table nous le donne immédiatement; pour les modules plus grands, il faudra le calculer au moyen d'un non-résidu quadratique. Dans le cas de n pair le module p aura la forme

$$p = 2^{\alpha} N + 1,$$

α étant un entier positif $\geqq 3$, N un nombre impair.

Si

$$a^N \equiv 1 \pmod{p}$$

on aura

$$a^{N+1} \equiv a, \text{ et } x \equiv \pm a^{\frac{N+1}{2}} \pmod{p}.$$

Supposons donc, que a^N n'est pas congru à 1. Calculons les nombres

$$a^N,\ a^{2N},\ a^{2^2 N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

On arrivera nécessairement à un nombre congru à 1, car

$$a^{\frac{p-1}{2}} = a^{2^{\alpha-1}N} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Soit

$$a^{2^{n+2}N}$$

le premier nombre de la suite (9) congru à 1. On aura alors

$$a^{2^{n+1}N} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Posons

$$F \equiv a^{2^n N},\ F' \equiv a^{2^{n-1}N}, \ldots F^{(n-1)} \equiv a^{2N},\ F^{(n)} \equiv a^N \pmod{p}.$$

Nous aurons

$$F^2 \equiv -1,\ F'^2 \equiv F, \ldots [F^{(n)}]^2 \equiv F^{(n-1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

La première de ces congruences donne

$$F \equiv f \text{ ou } F \equiv -f;$$

les nombres F et f étant connus, on saura lequel des deux cas a lieu effectivement.

Si $F \equiv f$, la congruence

$$F'^2 \equiv f \pmod{p}$$

donnera,

$$F' \equiv +f' \text{ ou } F' \equiv -f'.$$

Si $F \equiv -f$, la congruence

$$F'^2 \equiv -f$$

donnera

$$F' \equiv +ff' \text{ ou } -ff' \pmod{p}.$$

Ainsi on aura le nombre F' représenté par l'une des formes

$$f, -f, ff', -ff'.$$

En continuant ainsi de proche en proche, on parviendra à une expression de $F^{(n)}$ sous la forme d'un produit des caractères

$$-1, f, f', \ldots f^{(n)}$$

et l'application de la règle du nº 2 nous donnera ensuite une expression de la même forme d'un nombre $F^{(n+1)}$, satisfaisant à la congruence

$$[F^{(n+1)}]^2 \equiv F^{(n)} \equiv a^N \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Après cela, on déterminera un nombre φ, satisfaisant à la congruence

$$\varphi \,.\, F^{(n+1)} \equiv 1 \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

et l'on aura les solutions de la congruence (8*) sous la forme

$$x \equiv \pm \varphi \,.\, a^{\frac{N+1}{2}} \pmod{p}.$$

En effet

$$x^2 \equiv a \,.\, a^N \varphi^2 \equiv a \,.\, [F^{(n+1)} \,.\, \varphi]^2 \equiv a \pmod{p}$$

Quant au nombre φ, il n'est pas même nécessaire de résoudre la congruence linéaire (12), car ayant l'expression de $F^{(n+1)}$ sous la forme d'un produit des caractères, on obtiendra une expression analogue de φ, à l'aide de la formule

$$-ff'f''f''' \ldots [f^{(n+1)}]^2 \equiv 1 \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

qui découle immédiatement de la définition des caractères.

Pour éclaircir le procédé exposé, citons quelques exemples.

I. $$x^2 \equiv 380 \pmod{4481}.$$

$$p = 4481,\ p - 1 = 2^7 \,.\, 35,\ N = 35,\ a = 380.$$

Calculons

$$a^N \equiv 380^{35} \equiv -2035,$$

$$a^{2N} \equiv 781,\ a^{2^2 N} \equiv 545,\ a^{2^3 N} \equiv 1279,$$

$$a^{2^4 N} \equiv 276,\ a^{2^5 N} \equiv -1,\ a^{2^6 N} \equiv 1.$$

Donc

$$F \equiv 276, \; F' \equiv 1279, \; F'' \equiv 545,$$
$$F''' \equiv 781 \quad F^{\mathrm{IV}} \equiv -2035 \equiv a^N.$$

La table nous donne

$$f \equiv 276, \; f' \equiv -1279, \; f'' \equiv -1934,$$
$$f''' \equiv 364, \; f^{\mathrm{IV}} \equiv 1372, \; f^{\mathrm{V}} \equiv 1937.$$

Donc

$$F \equiv f, \; F' \equiv -f', \; F'' \equiv \pm f f''.$$

Or

$$f f'' \equiv -545, \; F'' \equiv 545,$$

donc

$$F'' \equiv -f f'', \; F''' \equiv \pm f f' f'''.$$

Or

$$f f' f''' \equiv -781, \; F''' \equiv 781,$$

donc

$$F''' \equiv -f f' f''', \; F^{\mathrm{IV}} \equiv \pm f f' f'' f^{\mathrm{IV}};$$

or

$$f f' f'' f^{\mathrm{IV}} \equiv 2035,$$

donc

$$F^{\mathrm{IV}} \equiv -f f' f'' f^{\mathrm{IV}}.$$

On prendra donc

$$F^{\mathrm{V}} \equiv \pm f f' f'' f''' f^{\mathrm{V}},$$

le signe de F^{V} pouvant être choisi à volonté, et d'après les congruences

$$\varphi F^{\mathrm{V}} \equiv 1, \; -f f' f'' f''' f^{\mathrm{IV}} [f^{\mathrm{V}}]^2 \equiv 1$$

on voit que

$$\varphi \equiv \pm f^{\mathrm{IV}} f^{\mathrm{V}} \equiv 331;$$
$$a^{\frac{N+1}{2}} \equiv 380^{18} \equiv -324;$$

les solutions cherchées sont

$$x \equiv \pm 331 \cdot 324 \equiv \pm 300 \pmod{4481}.$$

II. $$x^2 + 71 \equiv 0 \pmod{4057}.$$

$$p - 1 = 2^3 \cdot 507, \; N = 507, \; a = -71.$$
$$a^N = (-71)^{507} \equiv -2200 \equiv f.$$

d'après la table,

$$a^{2N} \equiv -1.$$

Ayant

$$F \equiv a^N f,$$

nous pouvons prendre

$$F' \equiv \pm f' \equiv \pm 315,$$

d'après la table, et

$$\varphi \equiv \pm f f' \equiv \pm 315 \,.\, 2200 \equiv \pm 747,$$

$$a^{\frac{N+1}{2}} = (-71)^{254} \equiv -1863, \; x \equiv \pm 1863 \,.\, 747 \equiv \pm 110.$$

Congruences des degrés supérieurs à 2.

Passons aux congruences

$$x^q \equiv a \text{ (mod. } p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

où

$$q > 2, \text{ et } p - 1 = q^{\alpha} N,$$

N étant non-divisible par q.

Nous allons distinguer ici aussi les deux cas:

$$1) \; a^N \equiv 1 \text{ (mod. } p)$$

et

$$2) \; a^N \text{ n'est pas congru à } 1 \text{ (mod. } p).$$

Le premier cas aura lieu nécessairement quand $\alpha = 1$, parce-que alors

$$a^N = a^{\frac{p-1}{q}} \equiv 1 \text{ (mod. } p).$$

[C'est le cas le plus fréquent pour les modules $p < 5000$ et $q > 3$.] Dans ce cas on aura les q solutions de la congruence (8) de la manière suivante.

Soit

$$N = q N' + \varrho, \text{ où } |\varrho| < q$$

et σ et τ deux nombres entiers positifs, satisfaisant à l'équation

$$\varrho \sigma - q \tau = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

[Quand $\varrho = -1$, on peut prendre $\sigma = 1$, $\tau = 0$]. On aura une solution de la congruence (8), en posant

$$x \equiv a^{N'\sigma + \tau} \text{ (mod. } p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

En effet

$$x^q \equiv a^{q(N'\sigma+\tau)} \equiv a \,.\, a^{(qN'+\varrho)\sigma} \equiv a \,.\, a^{N\sigma} \equiv a \text{ (mod. } p).$$

On aura toutes les solutions, en multipliant la solution obtenue par les caractères principaux

$$1, u_1, u_2, \dots u_{q-1},$$

dont u_1 se trouve dans la table (pour $p < 5000$), et les autres se calculent aisément au moyen de la formule

$$u_i \equiv u_1^i \pmod{p}.$$

Dans le cas général où a^N n'est pas congru à 1, la marche à suivre est tout à fait analogue à celle, que nous avons développée dans le cas de $q = 2$. Calculons les nombres

$$a^N, a^{qN}, a^{q^2 N}, \dots \tag{16}$$

On arrivera à un nombre congru à 1, parce-que

$$a^{\frac{p-1}{q}} = a^{q^{\alpha-1} \cdot N} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Soit

$$a^{q^{n+1}N}$$

le premier nombre de la suite (16) congru à 1.

En posant

$$U \equiv a^{q^n N}, U' \equiv a^{q^{n-1}N}, \dots U^{(n-1)} \equiv a^{qN}, U^{(n)} \equiv a^N \pmod{p}$$

on aura

$$U^q \equiv 1, U'^q \equiv U, \dots [U^{(n)}]^q \equiv U^{(n-1)} \pmod{p} \quad \dots \dots \dots \tag{17}$$

La première de ces congruences donne

$$U \equiv u_i,$$

où u_i est un des caractères principaux du degré q, différent de 1; la congruence

$$U'^q \equiv u_i$$

donnera ensuite

$$U' \equiv u'_i \lambda,$$

λ étant un des caractères principaux, l'unité y compris.

Connaisant les nombres U' et u'_i on aura aussi la valeur de λ.

Si $\lambda \equiv 1$, la congruence

$$U''^q \equiv U' \equiv u'_i$$

donnera

$$U'' \equiv u''_i \mu,$$

μ étant un des caractères principaux, l'unité y compris. Si $\lambda \equiv u_k$, la congruence

$$U''^q \equiv U' \equiv u'_i u_k$$

donnera

$$U'' \equiv u''_i u'_k \nu,$$

ν étant un des caractères principaux.

Continuant ainsi de proche en proche, nous parviendrons à une expression de $U^{(n)} \equiv a^N$ sous la forme d'un produit des caractères de divers ordres. Ensuite, l'application de la règle du nº 2 donnera une expression de la même forme d'un nombre $U^{(n+1)}$, satisfaisant à la congruence

$$[U^{(n+1)}]^q \equiv U^{(n)} \equiv a^N \pmod{p}.$$

Après cela, on cherchera un nombre φ, satisfaisant à la congruence

$$\varphi\, U^{(n+1)} \equiv 1 \pmod{p}$$

et on aura une solution de la congruence (8), en posant

$$x \equiv a^{N'\sigma+\tau} \varphi^\sigma \pmod{p},$$

les lettres N', σ, τ ayant la même signification que dans le cas précédent comme on le vérifie aisément.

Il suffit de multiplier la solution obtenue par les caractères principaux pour avoir toutes les solutions. Remarquons encore, que pour avoir les expressions de λ, μ, ν, ... on peut appliquer un procédé très simple, indiqué par Korkine, et que nous allons expliquer sur un exemple. Supposons qu'il s'agisse de trouver le facteur ν dans la congruence

$$U'' \equiv u''_i u'_k \nu.$$

Multipliant les deux membres par u''_{q-i}, et remarquant, que

$$u''_i u''_{q-i} \equiv [u''_1]^q \equiv u'_1,$$

nous débarasserons le coefficient de ν du caractère u''_i et nous aurons

$$u''_{q-i} U'' \equiv u'_1 u'_k \nu \equiv u'_{k+1} \nu;$$

en multipliant de part et d'autre par u'_{q-k-1} et remarquant, que

$$u'_{k+1} u'_{q-k-1} \equiv [u'_1]^q \equiv u_1$$

nous aurons

$$u''_{q-i} u'_{q-k-1} U'' \equiv u_1 \nu,$$

en multipliant enfin par u_{q-1}, on aura

$$u''_{q-i}\, u'_{q-k-1}\, u_{q-1}\, U'' \equiv \nu \pmod{p}$$

pour l'expression de ν par des nombres connus. Dans les exemples numériques la détermination des $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ se fait le plus souvent par des considérations particulières, sans recourir au procédé général.

Exemples.

III. $$x^3 \equiv 6 \pmod{4861}$$

$$p = 4861,\ p - 1 = 3^5 . 20,\ N = 20,$$

$$N' = 6,\ \varrho = 2,\ 2\sigma - 3\tau = -1,\ \sigma = \tau = 1.$$

La table nous donne

$$z_1 \equiv -320,\ (z_2 \equiv -z - 1 \equiv 319)$$

$$z_1' \equiv -2078,\ z_1'' \equiv 975,\ z_1''' \equiv -765,\ z_1^{\mathrm{IV}} \equiv 243.$$

Calculons

$$a^N \equiv 6^{20} \equiv -79,\ a^{3N} \equiv -2078 \equiv z_1'$$

donc

$$a^N \equiv -79 \equiv z_1''\lambda \equiv 975\lambda,$$

où λ doit être egal à l'un des nombres 1, z_1 et z_2; on voit de suite que la valeur $\lambda \equiv 1$ est à rejéter, ainsi que $\lambda \equiv z_1$; c'est $\lambda \equiv z_2 \equiv 319$ qui satisfait à la congruence

$$-79 \equiv 975\lambda \pmod{4861}.$$

Or aura donc

$$U'' \equiv a^N \equiv z_1'' z_2$$

et l'on pourra prendre

$$U''' \equiv z_1''' z_2' \equiv -765\, z_2',$$

$$z_2' \equiv 2078^2 \equiv 1516 \pmod{p}$$

et l'on aura

$$U''' \equiv -765 . 1516 \equiv 2039 \pmod{p}.$$

On trouvera φ d'après la congruence

$$2039\varphi \equiv 1 \pmod{p},$$

qui donne

$$\varphi \equiv 1521.$$

Solutions:

$$x_1 \equiv a^{N'\sigma+\tau} \varphi^\sigma \equiv 6^7 . 1521 \equiv -2056$$

$$x_2 \equiv x_1 z_1 \equiv 1685,\ x_3 \equiv x_1 z_2 \equiv 371.$$

IV $$x^5 \equiv 229 \pmod{4751}.$$

$$p - 1 = 5^3 . 38, \quad N = 38, \quad N' = 7, \quad \varrho = 3,$$

$$3\sigma - 5\tau = -1, \quad \sigma = 3, \quad \tau = 2.$$

La table donne

$$u_1 \equiv -2323, \quad u_1' \equiv 1913, \quad u_1'' \equiv -2110.$$

Calculons

$$a^N = 229^{38} \equiv 1913, \text{ donc } U' = u_1',$$

$$U'' \equiv u_1'' \equiv -2110, \quad -2110\,\varphi \equiv 1 \pmod{4751}$$

$$\varphi \equiv 340$$

$$x_1 \equiv a^{N'\sigma+\tau}\varphi^\sigma \equiv 229^{23} . 340^3, \quad 229^{23} \equiv 966, \quad 340^3 \equiv -1023.$$

$$x_1 \equiv -966 . 1023 \equiv 10.$$

Calculons les nombres u_2, u_3, u_4, d'après le nombre $u_1 \equiv -2323$ de la table et nous obtenons

$$u_2 \equiv u_1^2 \equiv -807, \quad u_3 \equiv u_1^2 \equiv 1984, \quad u_4 \equiv u_1^2 \equiv 362.$$

Solutions:

$$x_1 \equiv 10, \quad x_2 \equiv x_1 u_1 \equiv 525, \quad x_3 \equiv x_1 u_2 \equiv 1432, \quad x_4 \equiv x_1 u_3 \equiv 836, \quad x_5 \equiv x_1 u_4 \equiv -1331.$$

V. $$x^{11} + 615 \equiv 0 \pmod{2663}.$$

$$p - 1 = 11^3 . 2, \quad N = 2, \quad N' = 0, \quad \varrho = 2, \quad \sigma = 5, \quad \tau = 1.$$

$$x_1 \equiv -615\,\varphi^5.$$

$$a^N = (-615)^2 \equiv 79 \equiv u_1' \text{ (voir la table).}$$

$$U'' \equiv u_1'' \equiv 4 \text{ (v. la t.).}$$

$$4\varphi \equiv 1 \pmod{2663}, \quad \varphi \equiv 666.$$

$$x_1 \equiv -615 . 666^5 \equiv 2.$$

$$u_1 \equiv -142 \text{ (table)}, \quad u_2 \equiv -1140, \quad u_3 \equiv -563,$$

$$u_4 \equiv 56, \quad u_5 \equiv 37, \quad u_6 \equiv 72, \quad u_7 \equiv 428, \quad u_8 \equiv 473,$$

$$u_9 \equiv -591, \quad u_{10} \equiv -1294.$$

Solutions:

$$2, \; -284, \; 383, \; -1126, \; 112, \; 74,$$

$$144, \; 856, \; 946, \; -1182, \; 75.$$

4. *Application de la résolution des congruences binômes à la recherche des racines primitives.* — Nous avons déjà remarqué au commencement de cette note, que pour pouvoir calculer les caractères de tous les ordres, il n'est pas indispensable de connaître une racine primitive g du nombre donné p; il suffit de connaître un non-résidu ξ. Si dans le calcul des caractères on prend pour ξ, au lieu de g, un autre non-résidu, on trouvera les mêmes nombres, mais dans un ordre différent. Ayant les caractères, calculés au moyen d'un non-résidu quelconque, on peut les appliquer à la résolution des congruences binômes de la manière indiquée plus haut. Or, parmi les solutions des congruences binômes se trouvent, certaines conditions étant remplies, les racines primitives du module p et il y a des cas où toutes les solutions sont des racines primitives. Korkine énonce dans son mémoire le théorème suivant, qui se rapporte directement à la recherche des racines primitives:

Théorème. Soit p un nombre premier et δ un diviseur quelconque de $p-1$, premier ou composé; soit a un nombre, appartenant à l'exposant $\frac{p-1}{\delta}$ (ou au groupe (δ), d'après la terminologie de Korkine*), alors parmi les solutions de la congruence*

$$x^\delta \equiv a \ (mod.\ p)$$

il y aura précisement

$$\frac{\varphi(p-1)}{\varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right)}$$

racines primitives de p.

($\varphi(N)$ désigne le nombre des nombres premiers à N, qui ne le surpassent pas.) Korkine ne donne pas la démonstration de son théorème, mais cette démonstration est très facile, et, si nous l'omettons ici aussi, c'est uniquement pour ne pas étendre encore cette note, déjà assez longue. Remarquons seulement, que si δ est egal à un diviseur *premier* q de p, on aura

$$\frac{\varphi(p-1)}{\varphi\left(\frac{p-1}{q}\right)} = q \text{ ou } q-1;$$

donc, dans ce cas, toutes les solutions de la congruence

$$x^q \equiv a \ (\text{mod. } p)$$

ou toutes les solutions, à l'exception d'une seule, (qu'on distingue facilement des autres) sont racines primitives de p.[1]

[1] La même circonstance peut arriver aussi dans le cas de δ non premier.

Pour donner une application de ce théorème, prenons

$$p = 10009$$

nombre premier en déhors des limites de la table de Desmarest, donnant les racines primitives des nombres premiers inférieurs à 10000. Nous aurons

$$p - 1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 139.$$

Prenons $a = 2$ et cherchons l'exposant, auquel il appartient, en considérant les diverses puissances de 2, aux exposants — diviseurs de $p - 1$. Nous trouverons que la plus petite de ces puissances congrue à 1 est $\frac{p-1}{6} = 1668$; donc 2 appartient à cet exposant ou au groupe (6). Considérons la congruence

$$x^6 \equiv 2 \text{ (mod. } 10\,009) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

D'après le théorème de Korkine parmi ses solutions se trouvent

$$\lambda = \frac{\varphi(p-1)}{\varphi\left(\frac{p-1}{6}\right)}$$

racines primitives de p. Or, nous avons ici $\lambda = 6$, donc toutes les solutions de la congruence (18) sont racines primitives de p.

Pour trouver les solutions de la congruence (18), posons $x^3 \equiv y$, et résolvons d'abord la congruence

$$y^2 \equiv 6 \text{ (mod. } 10\,009)$$

Nous trouverons

$$y_1 \equiv 5590, \; y_2 \equiv -5590.$$

En résolvant ensuite les congruences

$$x^3 \equiv 5590, \; x^3 \equiv -5590 \text{ (mod. } p)$$

nous trouverons les six solutions de la congruence (18), savoir

$$\pm 6060, \; \pm 2997, \; \pm 952$$

qui sont racines primitives de 10 009. Le défaut de cette methode pour la recherche des racines primitives, qu'elle partage d'ailleurs avec les autres méthodes indirectes, consiste en ce qu'elle donne des racines primitives très grandes. La plus

petite racine primitive de 10 009 est 11, mais on ne la trouve pas par cette méthode. Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre donné a soit racine primitive d'un nombre premier p, et l'examen des suppositions $a = 2, 3, 5, 6, \ldots$ qui nous l'ont donnée.

$^{25}/_{12}$. V. 09.

C. Posse.

Table des racines primitives et des caractères, qui s'y rapportent pour les nombres premiers, inférieurs à 4000.

p	$p-1$	g	Caractères
5	2^2	2	$f=2$
7	2.3	3	$z=2$
11	2.5	2	$u=4$
13	$2^2.3$	6	$f=8,\ z=-4$
17	2^4	10	$f''=10,\ f'=-2,\ f=4$
19	2.3^2	10	$z'=5,\ z=11$
23	2.11	10	$u=8$
29	$2^2.7$	10	$f=-12,\ u=-5$
31	$2.3.5$	17	$z=-6,\ u=8$
37	$2^2.3^2$	5	$f=6,\ z'=-4,\ z=10$
41	$2^3.5$	6	$f'=-14,\ f=-9,\ u=10$
43	$2.3.7$	28	$z=6,\ u=11$
47	2.23	10	$u=6$
53	$2^2.13$	26	$f=-23,\ u=10$
59	2.29	10	$u=-18$
61	$2^2.3.5$	10	$f=-11,\ z=13,\ u=-3$
67	$2.3.11$	12	$z=29,\ u=-5$
71	$2.5.7$	62	$u=5,\ v=32$
73	$2^3.3^2$	5	$f'=10,\ f=27,\ z'=2,\ z=8$
79	$2.3.13$	29	$z=-24,\ u=10$
83	2.41	50	$u=10$
89	$2^3.11$	30	$f'=-12,\ f=55,\ u=32$
97	$2^5.3$	10	$f'''=30,\ f''=27,\ f'=50,\ f=-22,\ z=-36$
101	$2^2.5^2$	2	$f=10,\ u'=16,\ u=-6$
103	$2.3.17$	6	$z=46,\ u=-3$
107	2.53	63	$u=10$
109	$2^2.3^3$	10	$f=33,\ z''=-28,\ z'=-43,\ z=-46$
113	$2^4.7$	10	$f''=65,\ f'=44,\ f=15,\ u=-7$
127	$2.3^2.7$	109	$z'=-24,\ z=19,\ u=2$

p	$p-1$	g	Caractères
131	$2.5.13$	10	$u=58,\ v=-18$
137	$2^3.17$	12	$f'=10,\ f=-37,\ u=72$
139	$2.3.23$	92	$z=42,\ u=-39$
149	$2^2.37$	10	$f=-44,\ u=17$
151	$2.3.5^2$	114	$z=32,\ u'=94,\ u=59$
157	$2^2.3.13$	139	$f=28,\ z=-13,\ u=67$
163	2.3^4	70	$z'''=10,\ z''=22,\ z'=53,\ z=58$
167	2.83	10	$u=100$
173	$2^2.43$	91	$f=80,\ u=10$
179	2.89	10	$u=100$
181	$2^2.3^2.5$	10	$f=-19,\ z'=73,\ z=48,\ u=42$
191	$2.5.19$	157	$u=-7,\ v=-84$
193	$2^6.3$	10	$f^{\mathrm{IV}}=35,\ f'''=67,\ f''=50,\ f'=-9,\ f=81,\ z=-85$
197	$2^2.7^2$	73	$f=-14,\ u'=100,\ u=-6$
199	$2.3^2.11$	127	$z'=-37,\ z=92,\ u=-74$
211	$2.3.5.7$	142	$z=-15,\ u=71,\ v=-40$
223	$2.3.37$	10	$z=39,\ u=68$
227	2.113	-10	$u=100$
229	$2^2.3.19$	10	$f=107,\ z=94,\ u=17$
233	$2^3.29$	10	$f'=12,\ f=144,\ u=128$
239	$2.7.17$	-2	$u=-38,\ v=-107$
241	$2^4.3.5$	112	$f''=130,\ f'=30,\ f=-64,\ z=-16,\ u=91$
251	2.5^3	224	$u''=-24,\ u'=100,\ u=113$
257	2^8	10	$f^{\mathrm{VI}}=10,\ f^{\mathrm{V}}=100,\ f^{\mathrm{IV}}=-23,$ $f'''=15,\ f''=-32,\ f'=-4,\ f=16$
263	2.131	10	$u=100$
269	$2^2.67$	10	$f=-82,\ u=47$
271	$2.3^3.5$	-2	$z''=-60,\ z'=-13,\ z=-29,\ u=-27$
277	$2^2.3.23$	199	$f=60,\ z=160,\ u=30$
281	$2^3.5.7$	117	$f'=192,\ f=53,\ u=86,\ v=165$
283	$2.3.47$	-10	$z=44,\ u=161$
293	$2^2.73$	204	$f=155,\ u=100$
307	$2.3^2.17$	-10	$z'=53,\ z=-18,\ u=9$
311	$2.5.31$	-10	$u=6,\ v=-51$
313	$2^3.3.13$	10	$f'=5,\ f=25,\ z=-99,\ u=103$

p	$p-1$	g	Caractères
317	$2^2 . 79$	270	$f = 114,\ u = 100$
331	$2 . 3 . 5 . 11$	140	$z = -32,\ u = 150,\ v = 120$
337	$2^4 . 3 . 7$	10	$f'' = 191,\ f' = 85,\ f = 148,\ z = 128,\ u = 175$
347	$2 . 171$	-10	$u = 100$
349	$2^2 . 3 . 29$	220	$f = -136,\ z = -123,\ u = -121$
353	$2^5 . 11$	212	$f''' = 10,\ f'' = 100,\ f' = 116,\ f = 42,\ u = 58$
359	$2 . 179$	-10	$u = 100$
367	$2 . 3 . 61$	10	$z = -84,\ u = -75$
373	$2^2 . 3 . 31$	291	$f = -104,\ z = -89,\ u = -13$
379	$2 . 3^3 . 7$	10	$z'' = 24,\ z' = 180,\ z = -52,\ u = 119$
383	$2 . 191$	10	$u = 100$
389	$2^2 . 97$	10	$f = 115,\ u = -114$
397	$2^2 . 3^2 . 11$	28	$f = 63,\ z' = -85,\ z = 34,\ u = -107$
401	$2^4 . 5^2$	211	$f'' = 147,\ f' = -45,\ f = 20,\ u' = 224,\ u = -29$
409	$2^3 . 3 . 17$	235	$f' = 31,\ f = 143,\ z = 53,\ u = 25$
419	$2 . 11 . 19$	10	$u = 152,\ v = 135$
421	$2^2 . 3 . 5 . 7$	238	$f = 29,\ z = 20,\ u = -67,\ v = 75$
431	$2 . 5 . 43$	-10	$u = -26,\ v = 64$
433	$2^4 . 3^3$	10	$f'' = -151,\ f' = -148,\ f = -179,$
			$z'' = 3,\ z' = 27,\ z = 198$
439	$2 . 3 . 73$	-10	$z = -172,\ u = -42$
443	$2 . 13 . 17$	-10	$u = 188,\ v = 59$
449	$2^6 . 7$	3	$f^{IV} = -58,\ f''' = 221,\ f'' = -100,$
			$f' = 122,\ f = 67,\ u = -125$
457	$2^3 . 3 . 19$	380	$f' = 207,\ f = -109,\ z = 133,\ u = 174$
461	$2^2 . 5 . 23$	10	$f = 48,\ u = -110,\ v = 196$
463	$2 . 3 . 7 . 11$	174	$z = 21,\ u = -155,\ v = 134$
467	$2 . 233$	-10	$u = 100$
479	$2 . 239$	-10	$u = 100$
487	$2 . 3^5$	10	$z^{IV} = 100,\ z''' = 189,\ z'' = -12,\ z' = 220,\ z = 232$
491	$2 . 5 . 7^2$	10	$u = -175,\ v' = -109,\ v = 153$
499	$2 . 3 . 83$	10	$z = 139,\ u = 4$
503	$2 . 251$	10	$u = 100$
509	$2^2 . 127$	10	$f = 208,\ u = -180$
521	$2^3 . 5 . 13$	439	$f' = -206,\ f = 235,\ u = 25,\ v = 101$

p	$p-1$	g	Caractères
523	$2.3^2.29$	-10	$z'=94,\ z=60,\ u=226$
541	$2^2.3^3.5$	10	$f=52,\ z''=76,\ z'=225,\ z=-130,\ u=140$
547	$2.3.7.13$	17	$z=40,\ u=9,\ v=-30$
557	$2^2.139$	41	$f=-118,\ u=100$
563	2.281	-10	$u=100$
569	$2^3.71$	420	$f'=76,\ f=86,\ u=-242$
571	$2.3.5.19$	10	$z=109,\ u=106,\ v=-300$
577	$2^6.3^2$	10	$f^{\mathrm{IV}}=146,\ f'''=-33,\ f''=-65,\ f'=186,$
			$f=-24,\ z'=321,\ z=213$
587	2.293	-10	$u=100$
593	$2^4.37$	10	$f''=-94,\ f'=-59,\ f=-77,\ u=258$
599	$2.13.23$	-10	$u=270,\ v=324$
601	$2^3.3.5^2$	506	$f'=-163,\ f=125,\ z=24,\ u'=-111,\ u=-178$
607	$2.3.101$	575	$z=210,\ u=100$
613	$2^2.3^2.17$	32	$f=-35,\ z'=160,\ z=-66,\ u=197$
617	$2^3.7.11$	410	$f'=182,\ f=423,\ u=420,\ v=342$
619	$2.3.103$	10	$z=252,\ u=315$
631	$2.3^2.5.7$	-10	$z'=-255,\ z=43,\ u=279,\ v=-204$
641	$2^7.5$	3	$f^{\mathrm{V}}=243,\ f^{\mathrm{IV}}=77,\ f'''=160,\ f''=-40,$
			$f'=318,\ f=-154,\ u=-284$
643	$2.3.107$	353	$z=177,\ u=100$
647	$2.17.19$	10	$u=555,\ v=287$
653	$2^2.163$	140	$f=504,\ u=100$
659	$2.7.47$	10	$u=144,\ v=185$
661	$2^2.3.5.11$	284	$f=555,\ z=364,\ u=406,\ v=68$
673	$2^5.3.7$	198	$f'''=-107,\ f''=8,\ f'=64,\ f=58,$
			$z=255,\ u=-23$
677	$2^2.13^2$	213	$f=-26,\ u'=100,\ u=-144$
683	$2.11.31$	-10	$u=-2,\ v=76$
691	$2.3.5.23$	521	$z=253,\ u=320,\ v=20$
701	$2^2.5^2.7$	10	$f=135,\ u'=-118,\ u=464,\ v=361$
709	$2^2.3.59$	10	$f=-96,\ z=-228,\ u=385$
719	2.359	-10	$u=100$
727	$2.3.11^2$	10	$z=-282,\ u'=375,\ u=181$
733	$2^2.3.61$	583	f [illegible] 380, z [illegible] 308, u [illegible]

p	$p-1$	g	Caractères
739	$2 \cdot 3^2 \cdot 41$	-9	$z' = 317,\ z = -321,\ u = 133$
743	$2 \cdot 7 \cdot 53$	10	$u = -151,\ v = -117$
751	$2 \cdot 3 \cdot 5^3$	39	$z = 72,\ u'' = 100,\ u' = 171,\ u = 460$
757	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$	2	$f = 87,\ z'' = 228,\ z' = 3,\ z = 27,\ u = 232$
761	$2^3 \cdot 5 \cdot 19$	422	$f' = 62,\ f = 39,\ u = 168,\ v = 410$
769	$2^8 \cdot 3$	78	$f^{VI} = 79,\ f^{V} = 89,\ f^{IV} = 231,\ f''' = 300,$ $f'' = 27,\ f' = -40,\ f = 62,\ z = 408$
773	$2^2 \cdot 193$	302	$f = -317,\ u = 100$
787	$2 \cdot 3 \cdot 131$	10	$z = 407,\ u = 510$
797	$2^2 \cdot 199$	623	$f = -215,\ u = 100$
809	$2^3 \cdot 101$	703	$f' = 239,\ f = -318,\ u = 100$
811	$2 \cdot 3^4 \cdot 5$	10	$z''' = 184,\ z'' = 213,\ z' = -279,\ z = 130,\ u = 212$
821	$2^2 \cdot 5 \cdot 41$	10	$f = -295,\ u = 161,\ v = -37$
823	$2 \cdot 3 \cdot 137$	10	$z = -175,\ u = 55$
827	$2 \cdot 7 \cdot 59$	-10	$u = 270,\ v = 440$
829	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 23$	598	$f = 246,\ z' = -204,\ z = 125,\ u = 507$
839	$2 \cdot 419$	-10	$u = 100$
853	$2^2 \cdot 3 \cdot 71$	394	$f = 333,\ z = 220,\ u = 284$
857	$2^3 \cdot 107$	10	$f' = 506,\ f = -207,\ u = 98$
859	$2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$	2	$z = 260,\ u = -66,\ v = -86$
863	$2 \cdot 431$	10	$u = 100$
877	$2^2 \cdot 3 \cdot 73$	42	$f = -151,\ z = -283,\ u = 220$
881	$2^4 \cdot 5 \cdot 11$	115	$f'' = -85,\ f' = 177,\ f = 494,\ u = 268,\ v = 143$
883	$2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$	10	$z' = 286,\ z = 337,\ u' = 126,\ u = 707$
887	$2 \cdot 443$	10	$u = 100$
907	$2 \cdot 3 \cdot 151$	539	$z = 384,\ u = 100$
911	$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	10	$u = 361,\ v = 502,\ w = 30$
919	$2 \cdot 3^3 \cdot 17$	10	$z'' = 515,\ z' = -95,\ z = 52,\ u = 703$
929	$2^5 \cdot 29$	224	$f''' = 269,\ f'' = -101,\ f' = -18,\ f = 324,\ u = -361$
937	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$	10	$f' = 67,\ f = -196,\ z' = -241,\ z = 322,\ u = -308$
941	$2^2 \cdot 5 \cdot 47$	10	$f = -97,\ u = 349,\ v = 248$
947	$2 \cdot 11 \cdot 43$	10	$u = 185,\ v = -7$
953	$2^3 \cdot 7 \cdot 17$	10	$f' = 156,\ f = 511,\ u = 508,\ v = 604$
967	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23$	526	$z = 142,\ u = 97,\ v = 187$
971	$2 \cdot 5 \cdot 97$	10	$u = -239,\ v = 169$

p	$p-1$	g	Caractères
977	$2^4.61$	10	$f''=-403,\ f'=227,\ f=-252,\ u=-353$
983	2.491	10	$u=100$
991	$2.3^2.5.11$	-10	$z'=-70,\ z=-114,\ u=-166,\ v=-46$
997	$2^2.3.83$	656	$f=161,\ z=304,\ u=100$
1009	$2^4.3^2.7$	11	$f''=179,\ f'=-247,\ f=469,\ z'=-87,$ $z=374,\ u=-74$
1013	$2^2.11.23$	3	$f=-45,\ u=122,\ v=-427$
1019	2.509	10	$u=100$
1021	$2^2.3.5.17$	10	$f=-374,\ z=-369,\ u=-219,\ v=81$
1031	$2.5.103$	14	$u=264,\ v=320$
1033	$2^3.3.43$	10	$f'=231,\ f=-355,\ z=195,\ u=336$
1039	$2.3.173$	-10	$z=140,\ u=482$
1049	$2^3.131$	3	$f'=461,\ f=-426,\ u=267$
1051	$2.3.5^2.7$	10	$z=180,\ u'=-454,\ u=-380,\ v=402$
1061	$2^2.5.53$	3	$f=-103,\ u=-196,\ v=-58$
1063	$2.3^2.59$	10	$z'=-282,\ z=343,\ u=99$
1069	$2^2.3.89$	10	$f=-249,\ z=86,\ u=45$
1087	$2.3.181$	10	$z=257,\ u=-40$
1091	$2.5.109$	10	$u=93,\ v=-173$
1093	$2^2.3.7.13$	5	$f=-530,\ z=151,\ u=9,\ v=124$
1097	$2^3.137$	10	$f'=-79,\ f=-341,\ u=-326$
1103	$2.19.29$	10	$u=-354,\ v=-322$
1109	$2^2.277$	10	$f=-354,\ u=19$
1117	$2^2.3^2.31$	2	$f=214,\ z'=529,\ z=-121,\ u=331$
1123	$2.3.11.17$	-10	$z=33,\ u=-384,\ v=36$
1129	$2^3.3.47$	11	$f'=-437,\ f=168,\ z=387,\ u=338$
1151	$2.5^2.23$	-10	$u'=470,\ u=224,\ v=467$
1153	$2^7.3^2$	10	$f^{V}=-359,\ f^{IV}=-255,\ f'''=457,\ f''=156,$ $f'=123,\ f=140,\ z'=-523,\ z=502$
1163	$2.7.83$	-10	$u=44,\ v=-118$
1171	$2.3^2.5.13$	10	$z'=-388,\ z=750,\ u=-184,\ v=166$
1181	$2^2.5.59$	10	$f=-243,\ u=-9,\ v=-205$
1187	2.593	-10	$u=100$
1193	$2^3.149$	10	$f'=362,\ f=-186,\ u=354$
1201	$2^4.3.5^2$	11	$f''=473,\ f'=343,\ f=-49,\ z=570,\ u'=96,\ u=-139$

p	$p-1$	g	Caractères
1213	$2^2 . 3 . 101$	2	$f = 495,\ z = 217,\ u = 457$
1217	$2^6 . 19$	10	$f^{IV} = 271,\ f''' = 421,\ f'' = -441,\ f' = -239,$ $f = -78,\ u = -549$
1223	$2 . 13 . 47$	10	$u = -554,\ v = -259$
1229	$2^2 . 307$	10	$f = 632,\ u = 168$
1231	$2 . 3 . 5 . 41$	3	$z = 126,\ u = 401,\ v = -231$
1237	$2^2 . 3 . 103$	2	$f = -546,\ z = 300,\ u = 385$
1249	$2^5 . 3 . 13$	7	$f''' = 577,\ f'' = -554,\ f' = -338,$ $f = 585,\ z = -94,\ u = 994$
1259	$2 . 17 . 37$	10	$u = 594,\ v = -583$
1277	$2^2 . 11 . 29$	2	$f = 113,\ u = 135,\ v = -313$
1279	$2 . 3^2 . 71$	-10	$z' = 392,\ z = 504,\ u = -641$
1283	$2 . 641$	-10	$u = 100$
1289	$2^3 . 7 . 23$	6	$f' = 497,\ f = 810,\ u = -204,\ v = -373$
1291	$2 . 3 . 5 . 43$	10	$z = 346,\ u = -228,\ v = -299$
1297	$2^4 . 3^4$	10	$f'' = 355,\ f' = 216,\ f = -36,\ z''' = 9,$ $z'' = 729,\ z' = 104,\ z = 365$
1301	$2^2 . 5^2 . 13$	10	$f = 51,\ u' = 468,\ u = 549,\ v = 305$
1303	$2 . 3 . 7 . 31$	10	$z = -96,\ u = 98,\ v = 140$
1307	$2 . 653$	-10	$u = 100$
1319	$2 . 659$	-10	$u = 100$
1321	$2^3 . 3 . 5 . 11$	13	$f' = 371,\ f = 257,\ z = 297,\ u = 133,\ v = -396$
1327	$2 . 3 . 13 . 17$	10	$z = 347,\ u = 601,\ v = -506$
1361	$2^4 . 5 . 17$	3	$f'' = 574,\ f' = 114,\ f = -614,\ u = 211,\ v = 260$
1367	$2 . 683$	10	$u = 100$
1373	$2^2 . 7^3$	2	$f = 668,\ u'' = 16,\ u' = 226,\ u = 333$
1381	$2^2 . 3 . 5 . 23$	10	$f = -366,\ z = -355,\ u = 670,\ v = 20$
1399	$2 . 3 . 233$	-10	$z = -391,\ u = -285$
1409	$2^7 . 11$	3	$f^{V} = -387,\ f^{IV} = 415,\ f''' = 327,\ f'' = -155,$ $f' = 72,\ f = -452,\ u = -417$
1423	$2 . 3^2 . 79$	3	$z' = -17,\ z = -644,\ u = 201$
1427	$2 . 23 . 31$	-10	$u = 459.\ v = -118$
1429	$2^2 . 3 . 7 . 17$	10	$f = -620,\ z = -665,\ u = -64,\ v = -324$
1433	$2^3 . 179$	10	$f' = -507,\ f = 542,\ u = 961$
1439	$2 . 719$	-10	$u = 100$

p	$p-1$	g	Caractères
1447	$2.3.241$	10	$z=-705,\ u=123$
1451	$2.5^2.29$	2	$u'=321,\ u=712,\ v=347$
1453	$2^2.3.11^2$	2	$f=497,\ z=-694,\ u'=-263,\ u=131$
1459	2.3^6	3	$z^{\mathrm{V}}=9,\ z^{\mathrm{IV}}=-730,\ z'''=547,\ z''=-379,$ $z'=-272,\ z=339$
1471	$2.3.5.7^2$	-10	$z=-252,\ u=554,\ v'=-470,\ v=-208$
1481	$2^3.5.37$	3	$f'=-655,\ f=-465,\ u=-98,\ v=-264$
1483	$2.3.13.19$	2	$z=-39,\ u=191,\ v=-46$
1487	2.743	10	$u=100$
1489	$2^4.3.31$	14	$f''=-189,\ f'=-15,\ f=225,\ z=483,\ u=132$
1493	$2^2.373$	2	$f=432,\ u=16$
1499	$2.7.107$	2	$u=-252,\ v=-105$
1511	$2.5.151$	-10	$u=534,\ v=-474$
1523	2.761	-10	$u=100$
1531	$2.3^2.5.17$	10	$z'=276,\ z=-647,\ u=102,\ v=-525$
1543	$2.3.257$	10	$z=681,\ u=136$
1549	$2^2.3^2.43$	10	$f=-88,\ z'=635,\ z=-276,\ u=507$
1553	$2^4.97$	10	$f''=251,\ f'=-672,\ f=-339,\ u=-388$
1559	$2.19.41$	-10	$u=-531,\ v=-102$
1567	$2.3^3.29$	10	$z''=-382,\ z'=-77,\ z=-536,\ u=775$
1571	$2.5.157$	10	$u=382,\ v=588$
1579	$2.3.263$	10	$z=-640,\ u=493$
1583	$2.7.113$	10	$u=274,\ v=-688$
1597	$2^2.3.7.19$	11	$f=610,\ z=222,\ u=-447,\ v=-414$
1601	$2^6.5^2$	3	$f^{\mathrm{IV}}=-773,\ f'''=356,\ f''=257,\ f'=408,$ $f=-40,\ u'=-182,\ u=442$
1607	$2.11.73$	10	$u=-605,\ v=82$
1609	$2^3.3.67$	7	$f'=630,\ f=-523,\ z=250,\ u=-468$
1613	$2^2.13.31$	3	$f=127,\ u=775,\ v=-695$
1619	2.809	10	$u=100$
1621	$2^2.3^4.5$	10	$f=166,\ z'''=135,\ z''=-303,\ z'=-146,$ $z=184,\ u=-407$
1627	$2.3.271$	3	$z=-265,\ u=729$
1637	$2^2.409$	2	$f=316,\ u=16$
1657	$2^3.3^2.23$	15	$f'=239,\ f=783,\ z'=-12,\ z=-71,\ u=-4$

p	$p-1$	g	Caractères
1663	$2 \cdot 3 \cdot 277$	10	$z = -319,\ u = 537$
1667	$2 \cdot 7^2 \cdot 17$	-10	$u' = 595,\ u = 176,\ v = -544$
1669	$2^2 \cdot 3 \cdot 139$	2	$f = -220,\ z = 248,\ u = 758$
1693	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 47$	2	$f = 92,\ z' = 356,\ z = -434,\ u = 642$
1697	$2^5 \cdot 53$	10	$f''' = -283,\ f'' = 330,\ f' = 202,\ f = 414,\ u = 629$
1699	$2 \cdot 3 \cdot 283$	3	$z = 397,\ u = 729$
1709	$2^2 \cdot 7 \cdot 61$	10	$f = -390,\ u = 223,\ v = 305$
1721	$2^3 \cdot 5 \cdot 43$	3	$f' = -232,\ f = 473,\ u = 399,\ v = -328$
1723	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 41$	3	$z = -42,\ u = 555,\ v = -261$
1733	$2^2 \cdot 433$	2	$f = -410,\ u = 16$
1741	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$	10	$f = 59,\ z = -357,\ u = -277,\ v = 20$
1747	$2 \cdot 3^2 \cdot 97$	2	$z' = 472,\ z = 371,\ u = 94$
1753	$2^3 \cdot 3 \cdot 73$	7	$f' = 489,\ f = 713,\ z = -183,\ u = 348$
1759	$2 \cdot 3 \cdot 293$	10	$z = -509,\ u = -871$
1777	$2^4 \cdot 3 \cdot 37$	10	$f'' = 865,\ f' = 108,\ f = -775,\ z = 629,\ u = -32$
1783	$2 \cdot 3^4 \cdot 11$	10	$z''' = 855,\ z'' = -709,\ z' = -525,$ $z = -194,\ u = 367$
1787	$2 \cdot 19 \cdot 47$	-10	$u = 109,\ v = 90$
1789	$2^2 \cdot 3 \cdot 149$	10	$f = -724,\ z = -153,\ u = 812$
1801	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	11	$f' = 524,\ f = 824,\ z' = 144,\ z = 74,$ $u' = 256,\ u = 350$
1811	$2 \cdot 5 \cdot 181$	10	$u = -771,\ v = 279$
1823	$2 \cdot 911$	10	$u = 100$
1831	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 61$	7	$z = -673,\ u = 481,\ v = -588$
1847	$2 \cdot 13 \cdot 71$	10	$u = -459,\ v = 921$
1861	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31$	10	$f = 61,\ z = -455,\ u = 758,\ v = -87$
1867	$2 \cdot 3 \cdot 311$	10	$z = 834,\ u = -712$
1871	$2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$	10	$u = 267,\ v = -323,\ w = 3$
1873	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 13$	10	$f'' = -780,\ f' = -325,\ f = 737,$ $z' = -763,\ z = 114,\ u = 917$
1877	$2^2 \cdot 7 \cdot 67$	2	$f = 137,\ u = -747,\ v = 55$
1879	$2 \cdot 3 \cdot 313$	2	$z = -489,\ u = 64$
1889	$2^5 \cdot 59$	3	$f''' = -433,\ f'' = 478,\ f' = -85,$ $f = -331,\ u = -170$
1901	$2^2 \cdot 5^2 \cdot 19$	2	$f = 218,\ u' = 155,\ u = -775,\ v = -668$

p	$p-1$	g	Caractères
1907	$2 \cdot 953$	-10	$u = 100$
1913	$2^3 \cdot 239$	10	$f' = 922,\ f = 712,\ u = -102$
1931	$2 \cdot 5 \cdot 193$	2	$u = -114,\ v = 907$
1933	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23$	5	$f = -598,\ z = -592,\ u = 121,\ v = 325$
1949	$2^2 \cdot 487$	10	$f = 580,\ u = 255$
1951	$2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$	3	$z = 76,\ u' = 564,\ u = 955,\ v = 340$
1973	$2^2 \cdot 17 \cdot 29$	2	$f = 259,\ u = -25,\ v = 224$
1979	$2 \cdot 23 \cdot 43$	10	$u = -935,\ v = -928$
1987	$2 \cdot 3 \cdot 331$	2	$z = 647,\ u = 64$
1993	$2^3 \cdot 3 \cdot 83$	5	$f' = 960,\ f = 834,\ z = -313,\ u = -27$
1997	$2^2 \cdot 499$	2	$f = -412,\ u = 16$
1999	$2 \cdot 3^3 \cdot 37$	-10	$z'' = 920,\ z' = -461,\ z = 808,\ u = 189$
2003	$2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	-10	$u = 874,\ v = -882,\ w = -443$
2011	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$	3	$z = 205,\ u = -683,\ v = -895$
2017	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$	10	$f''' = 593,\ f'' = 691,\ f' = -548,\ f = -229,$ $z' = -84,\ z = 294,\ u = 79$
2027	$2 \cdot 1013$	10	$u = 100$
2029	$2^2 \cdot 3 \cdot 13^2$	10	$f = -992,\ z = -976,\ u' = 962,\ u = 306$
2039	$2 \cdot 1019$	-10	$u = 100$
2053	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 19$	2	$f = 244,\ z'' = 971,\ z' = 215,\ z = -198,\ u = -124$
2063	$2 \cdot 1031$	10	$u = 100$
2069	$2^2 \cdot 11 \cdot 47$	10	$f = -164,\ u = 647,\ v = -331$
2081	$2^5 \cdot 5 \cdot 13$	3	$f''' = 888,\ f'' = -155,\ f' = -947,\ f = -102,$ $u = 844,\ v = -237$
2083	$2 \cdot 3 \cdot 347$	-10	$z = -450,\ u = 160$
2087	$2 \cdot 7 \cdot 149$	5	$u = 142,\ v = 645$
2089	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 29$	7	$f' = 572,\ f = -789,\ z' = 918,\ z = -827,\ u = 914$
2099	$2 \cdot 1049$	10	$u = 100$
2111	$2 \cdot 5 \cdot 211$	10	$u = -325,\ v = 899$
2113	$2^6 \cdot 3 \cdot 11$	10	$f^{IV} = -276,\ f''' = 108,\ f'' = -1014,\ f' = -835,$ $f = -65,\ z = -439,\ u = 16$
2129	$2^4 \cdot 7 \cdot 19$	3	$f'' = -588,\ f' = 846,\ f = 372,\ u = -340,\ v = 947$
2131	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 71$	[illegible]	$z = 468,\ u = -397,\ v = -884$
2137	$2^3 \cdot 3 \cdot 89$	10	$f' = -629,\ f = 296,\ z = -202,\ u = 200$
2141	$2^2 \cdot 5 \cdot 107$	10	$f = -419,\ u = 997,\ v = 515$

p	$p-1$	g	Caractères
2143	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17$	10	$z' = 839,\ z = 349,\ u = 154,\ v = 512$
2153	$2^3 \cdot 269$	10	$f' = -1059,\ f = -232,\ u = -391$
2161	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$	23	$f'' = -954,\ f' = 335,\ f = -147,\ z'' = -96,$ $z' = -887,\ z = 593,\ u = 953$
2179	$2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$	10	$z' = 876,\ z = -124,\ u' = -496,\ u = -648$
2203	$2 \cdot 3 \cdot 367$	-10	$z = 285,\ u = -162$
2207	$2 \cdot 1103$	10	$u = 100$
2213	$2^2 \cdot 7 \cdot 79$	2	$f = -1083,\ u = 524,\ v = 769$
2221	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37$	10	$f = -790,\ z = 543,\ u = 71,\ v = 484$
2237	$2^2 \cdot 13 \cdot 43$	2	$f = 1021,\ u = 214,\ v = -253$
2239	$2 \cdot 3 \cdot 373$	-10	$z = -296,\ u = -833$
2243	$2 \cdot 19 \cdot 59$	-10	$u = 433,\ v = -123$
2251	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$	10	$z' = 838,\ z = -709,\ u'' = 9,\ u' = 523,\ u = 361$
2267	$2 \cdot 11 \cdot 103$	-10	$u = -140,\ v = -945$
2269	$2^2 \cdot 3^4 \cdot 7$	10	$f = -982,\ z''' = 999,\ z'' = -139,$ $z' = 877,\ z = 82,\ u = 729$
2273	$2^5 \cdot 71$	10	$f''' = 75,\ f'' = 1079,\ f' = 465,\ f = 290,\ u = -1064$
2281	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$	7	$f' = 1074,\ f = -710,\ z = 663,\ u = 633,\ v = 518$
2287	$2 \cdot 3^2 \cdot 127$	-11	$z' = 632,\ z = -805,\ u = 335$
2293	$2^2 \cdot 3 \cdot 191$	2	$f = -600,\ z = -990,\ u = -490$
2297	$2^3 \cdot 7 \cdot 41$	10	$f' = -890,\ f = -365,\ u = -1058,\ v = 988$
2309	$2^2 \cdot 577$	10	$f = -688,\ u = 764$
2311	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	3	$z = -883,\ u = 585,\ v = 850,\ w = -808$
2333	$2^2 \cdot 11 \cdot 53$	2	$f = -108,\ u = 919,\ v = 593$
2339	$2 \cdot 7 \cdot 167$	10	$u = 1065,\ v = -498$
2341	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$	10	$f = 153,\ z' = 132,\ z = 1106,\ u = 735,\ v = 500$
2347	$2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 23$	-10	$z = -1063,\ u = -855,\ v = -201$
2351	$2 \cdot 5^2 \cdot 47$	-10	$u' = -746,\ u = 531,\ v = 627$
2357	$2^2 \cdot 19 \cdot 31$	2	$f = 633,\ u = -475,\ v = -793$
2371	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 79$	10	$z = -465,\ u = 971,\ v = 83$
2377	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 11$	5	$f' = -580,\ f = -1134,\ z'' = 576,\ z' = -693,$ $z = 721,\ u = -144$
2381	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$	3	$f = -69,\ u = -1034,\ v = -437,\ w = 949$
2383	$2 \cdot 3 \cdot 397$	10	$z = -1104,\ u = -860$
2389	$2^2 \cdot 3 \cdot 199$	10	$f = 285,\ z = 689,\ u = 202$

p	$p-1$	g	Caractères
2393	$2^3 \cdot 13 \cdot 23$	3	$f' = 58,\ f = 971,\ u = 135,\ v = -87$
2399	$2 \cdot 11 \cdot 109$	-10	$u = 551,\ v = 1225$
2411	$2 \cdot 5 \cdot 241$	10	$u = -371,\ v = -1027$
2417	$2^4 \cdot 151$	10	$f'' = 1055,\ f' = 1205,\ f = -592,\ u = -696$
2423	$2 \cdot 7 \cdot 173$	10	$u = 155,\ v = 305$
2437	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29$	2	$f = -398,\ z = -86,\ u = 801,\ v = 433$
2441	$2^3 \cdot 5 \cdot 61$	6	$f' = 1122,\ f = -672,\ u = 590,\ v = 739$
2447	$2 \cdot 1223$	10	$u = 100$
2459	$2 \cdot 1229$	10	$u = 100$
2467	$2 \cdot 3^2 \cdot 137$	3	$z' = -411,\ z = -217,\ u = 342$
2473	$2^3 \cdot 3 \cdot 103$	10	$f' = -978,\ f = -567,\ z = 1015,\ u = -512$
2477	$2^2 \cdot 619$	2	$f = 915,\ u = 16$
2503	$2 \cdot 3^2 \cdot 139$	3	$z' = -331,\ z = -1227,\ u = -1360$
2521	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	17	$f' = -1205,\ f = -71,\ z' = 1081,\ z = -676,$
			$u = -461,\ v = -499$
2531	$2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$	2	$u = 232,\ v = 1055,\ w = 217$
2539	$2 \cdot 3^3 \cdot 47$	10	$z'' = -118,\ z' = -299,\ z = -307,\ u = -780$
2543	$2 \cdot 31 \cdot 41$	10	$u = -799,\ v = -40$
2549	$2^2 \cdot 7^2 \cdot 13$	10	$f = -357,\ u' = -629,\ u = -658,\ v = 400$
2551	$2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17$	2	$z = -51,\ u' = 17,\ u = -1050,\ v = -462$
2557	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 71$	2	$f = -611,\ z' = 821,\ z = -836,\ u = -544$
2579	$2 \cdot 1289$	10	$u = 100$
2591	$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 37$	7	$u = 670,\ v = -741,\ w = -187$
2593	$2^5 \cdot 3^4$	10	$f''' = -5,\ f'' = 25,\ f' = 625,\ f = -918,$
			$z''' = -114,\ z'' = -941,\ z' = -408,\ z = 1137$
2609	$2^4 \cdot 163$	3	$f'' = -743,\ f' = -1059,\ f = -389,\ u = 830$
2617	$2^3 \cdot 3 \cdot 109$	10	$f' = 99,\ f = -667,\ z = 1064,\ u = -583$
2621	$2^2 \cdot 5 \cdot 131$	10	$f = 472,\ u = -761,\ v = -864$
2633	$2^3 \cdot 7 \cdot 47$	10	$f' = 885,\ f = 1224,\ u = -660,\ v = 86$
2647	$2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$	2	$z'' = -495,\ z' = 812,\ z = -186,$
			$u' = -824,\ u = 391$
2657	$2^5 \cdot 83$	10	$f''' = 13,\ f'' = 169,\ f' = -666,\ f = -163,\ u = 1024$
2659	$2 \cdot 3 \cdot 443$	2	$z = 903,\ u = 64$
2663	$2 \cdot 11^3$	2	$u'' = 4,\ u' = 79,\ u = -142$
2671	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 89$	10	$z = -545,\ u = -96,\ v = 968$

p	$p-1$	g	Caractères
2677	$2^2 . 3 . 223$	2	$f = 550,\ z = -1034,\ u = -1258$
2683	$2 . 3^2 . 149$	2	$z' = -779,\ z = -637,\ u = -790$
2687	$2 . 17 . 19$	10	$u = 612,\ v = 168$
2689	$2^7 . 3 . 7$	19	$f^{\mathrm{V}} = -362,\ f^{\mathrm{IV}} = -717,\ f''' = 490,\ f'' = 779,$ $f' = -873,\ f = 1142,\ z = 391,\ u = 749$
2693	$2^2 . 673$	2	$f = -859,\ u = 16$
2699	$2 . 19 . 71$	2	$u = 944,\ v = 896$
2707	$2 . 3 . 11 . 41$	-10	$z = 1327,\ u = -704,\ v = 135$
2711	$2 . 5 . 271$	-10	$u = 324,\ v = -636$
2713	$2^3 . 3 . 113$	10	$f' = 1040,\ f = -887,\ z = 1211,\ u = -1218$
2719	$2 . 3^2 . 151$	-10	$z' = -59,\ z = 1265,\ u = 1326$
2729	$2^3 . 11 . 31$	7	$f' = -66,\ f = -1102,\ u = -239,\ v = -13$
2731	$2 . 3 . 5 . 7 . 13$	10	$z = -447,\ u = 1233,\ v = -63,\ w = 1365$
2741	$2^2 . 5 . 137$	10	$f = -656,\ u = -966,\ v = -307$
2749	$2^2 . 3 . 229$	6	$f = 640,\ z = -596,\ u = 431$
2753	$2^6 . 43$	10	$f^{\mathrm{IV}} = -488,\ f''' = -1367,\ f'' = -598,$ $f' = -286,\ f = -794,\ u = 828$
2767	$2 . 3 . 461$	10	$z = -329,\ u = 1113$
2777	$2^3 . 347$	10	$f' = -224,\ f = 190,\ u = 230$
2789	$2^2 . 17 . 41$	10	$f = 167,\ u = -132,\ v = -354$
2791	$2 . 3^2 . 5 . 31$	6	$z' = -1195,\ z = 91,\ u = 800,\ v = -1164$
2797	$2^2 . 3 . 233$	2	$f = -603,\ z = -1101,\ u = 1299$
2801	$2^4 . 5^2 . 7$	3	$f'' = 24,\ f' = 576,\ f = 1258,\ u' = -1314,$ $u = -400,\ v = -930$
2803	$2 . 3 . 467$	-10	$z = -414,\ u = -671$
2819	$2 . 1409$	10	$u = 100$
2833	$2^4 . 3 . 59$	10	$f'' = -423,\ f' = 450,\ f = 1357,\ z = -1301,$ $u = 664$
2837	$2^2 . 709$	2	$f = 416,\ u = 16$
2843	$2 . 7^2 . 29$	-10	$u' = -1018,\ u = 1275,\ v = -857$
2851	$2 . 3 . 5^2 . 19$	2	$z = 1014,\ u' = 1107,\ u = -107,\ v = -27$
2857	$2^3 . 3 . 7 . 17$	11	$f' = 1133, f = 896, z = -351, u = -678, v = 1275$
2861	$2^2 . 5 . 11 . 13$	10	$f = 1202,\ u = 633,\ u = -669,\ w = 559$
2879	$2 . 1439$	-10	$u = 100$
2887	$2 . 3 . 13 . 37$	10	$z = -699,\ u = 1390,\ v = -707$

p	$p-1$	g	Caractères
2897	$2^4 . 181$	10	$f'' = 286,\ f' = 680,\ f = -1120,\ u = -485$
2903	$2 . 1451$	10	$u = 100$
2909	$2^2 . 727$	10	$f = 878,\ u = 1273$
2917	$2^2 . 3^6$	6	$f = 54,\ z^{\mathrm{V}} = 1296,\ z^{\mathrm{IV}} = 256,\ z''' = -1368,$ $z'' = -65,\ z' = -427,\ z = 247$
2927	$2 . 7 . 11 . 19$	10	$u = -419,\ v = 119,\ w = -1090$
2939	$2 . 13 . 113$	10	$u = -1386,\ v = -950$
2953	$2^3 . 3^2 . 41$	13	$f' = 456,\ f = 1226,\ z' = -407,\ z = 800$
2957	$2^2 . 739$	2	$f = 1222,\ u = 16$
2963	$2 . 1481$	-10	$u = 100$
2969	$2^3 . 7 . 53$	3	$f' = -544,\ f = -964,\ u = 529,\ v = 1038$
2971	$2 . 3^3 . 5 . 11$	10	$z'' = 1379,\ z' = 876,\ z = -55,\ u = -748,\ v = 1414$
2999	$2 . 1499$	-10	$u = 100$
3001	$2^3 . 3 . 5^3$	14	$f' = -1338,\ f = -1353,\ z = 934,\ u'' = 264.$ $u' = 1412,\ u = -1003$
3011	$2 . 5 . 7 . 43$	10	$u = -1113,\ v = 561,\ w = 1471$
3019	$2 . 3 . 503$	10	$z = -240,\ u = 711$
3023	$2 . 1511$	10	$u = 100$
3037	$2^2 . 3 . 11 . 23$	2	$f = 281,\ z = -746,\ u = -148,\ v = -126$
3041	$2^5 . 5 . 19$	3	$f''' = -1161,\ f'' = 758,\ f' = -185,$ $f = 774,\ u = 1046,\ v = 1058$
3049	$2^3 . 3 . 127$	11	$f' = 1046,\ f = -475,\ z = -533,\ u = -8$
3061	$2^2 . 3^2 . 5 . 17$	13	$f = -501,\ z' = -1406,\ z = -562,$ $u = -472,\ v = -125$
3067	$2 . 3 . 7 . 73$	-10	$z = 973,\ u = 1495,\ v = 347$
3079	$2 . 3^4 . 19$	-2	$z''' = 283,\ z'' = 668,\ z' = -358,\ z = 546,\ u = 1247$
3083	$2 . 23 . 67$	-10	$u = 773,\ v = 254$
3089	$2^4 . 193$	3	$f'' = 709,\ f' = -826,\ f = -393,\ u = 1506$
3109	$2^2 . 3 . 7 . 37$	11	$f = 727,\ z = 1085,\ u = 766,\ v = 860$
3119	$2 . 1559$	-10	$u = 100$
3121	$2^4 . 3 . 5 . 13$	7	$f'' = 436,\ f' = -285,\ f = 79,\ z = -1122,$ $u = -958,\ v = 829$
3137	$2^6 . 7^2$	10	$f^{\mathrm{IV}} = 507,\ f''' = -185,\ f'' = -282,\ f' = 1099,$ $f = 56,\ u' = -161,\ u = -1548$
3163	$2 . 3 . 17 . 31$	5	$z = -537,\ u = 985,\ v = -109$

p	$p-1$	g	Caractères
3167	$2 \cdot 1583$	10	$u = 100$
3169	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 11$	7	$f''' = 233,\ f'' = 416,\ f' = -1239,\ f = 1325,$ $z' = 1562,\ z = 97,\ u = -1383$
3181	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 53$	7	$f = -282,\ z = 440,\ u = 425,\ v = -901$
3187	$2 \cdot 3^3 \cdot 59$	2	$z'' = 781,\ z' = -471,\ z = -1316,\ u = -811$
3191	$2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29$	11	$u = 1330,\ v = 1024,\ w = 1079$
3203	$2 \cdot 1601$	10	$u = 100$
3209	$2^3 \cdot 401$	3	$f' = 22,\ f = 484,\ u = 143$
3217	$2^4 \cdot 3 \cdot 67$	5	$f'' = 279,\ f' = 633,\ f = -1436,\ z = -205,\ u = 815$
3221	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23$	10	$f = 234,\ u = -1464,\ v = 1106,\ w = 763$
3229	$2^2 \cdot 3 \cdot 269$	6	$f = -839,\ z = 914,\ u = 421$
3251	$2 \cdot 5^3 \cdot 13$	6	$u'' = 670,\ u' = -417,\ u = -1237,\ v = 1252$
3253	$2^2 \cdot 3 \cdot 271$	2	$f = -1598,\ z = -1440,\ u = 843$
3257	$2^3 \cdot 11 \cdot 37$	10	$f' = 904,\ f = -291,\ u = -164,\ v = -465$
3259	$2 \cdot 3^2 \cdot 181$	10	$z' = -231,\ z = -853,\ u = -1622$
3271	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 109$	3	$z = -843,\ u = 1096,\ v = -1148$
3299	$2 \cdot 17 \cdot 97$	10	$u = -1585,\ v = 911$
3301	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$	10	$f = 1212,\ z = -1575,\ u' = 94,\ u = 454,\ v = -1550$
3307	$2 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 29$	2	$z = 57,\ u = -237,\ v = 265$
3313	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 23$	10	$f'' = -536,\ f' = -935,\ f = -407,$ $z' = -1001,\ z = 1123,\ u = 98$
3319	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 79$	6	$z = 1527,\ u = 21,\ v = 1306$
3323	$2 \cdot 11 \cdot 151$	2	$u = 73,\ v = 678$
3329	$2^8 \cdot 13$	3	$f^{VI} = -268,\ f^{V} = -1414,\ f^{IV} = -1333,$ $f''' = -797,\ f'' = -630,\ f' = 749,$ $f = -1600,\ u = -359$
3331	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 37$	10	$z' = -548,\ z = 1463,\ u = 1177,\ v = 491$
3343	$2 \cdot 3 \cdot 557$	10	$z = -1425,\ u = 443$
3347	$2 \cdot 7 \cdot 239$	2	$u = -899,\ v = -351$
3359	$2 \cdot 23 \cdot 73$	10	$u = -1138,\ v = 1491$
3361	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	22	$f''' = 1630,\ f'' = 1710,\ f' = 30,\ f = 900,$ $z = -893,\ u = 200,\ v = 844$
3371	$2 \cdot 5 \cdot 337$	10	$u = -1303,\ v = -709$
3373	$2^2 \cdot 3 \cdot 281$	5	$f = 1105,\ z = -655,\ u = -488$
3389	$2^2 \cdot 7 \cdot 11^2$	10	$f = 1344,\ u = 883,\ v' = -1339,\ v = -495$

p	$p-1$	g	Caractères
3391	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 113$	-10	$z=555,\ u=926,\ v=-449$
3407	$2\cdot 13\cdot 131$	10	$u=-540,\ v=572$
3413	$2^2\cdot 853$	2	$f=-1471,\ u=16$
3433	$2^3\cdot 3\cdot 11\cdot 13$	10	$f'=-1338,\ f=1651,\ z=-269,$ $u=-1521,\ v=6$
3449	$2^3\cdot 431$	3	$f'=953,\ f=1122,\ u=-337$
3457	$2^7\cdot 3^3$	7	$f^{\mathrm{V}}=540,\ f^{\mathrm{IV}}=1212,\ f'''=-281,\ f''=-550,$ $f'=-1716,\ f=-708,\ z''=392,\ z'=1520,$ $z=722$
3461	$2^2\cdot 5\cdot 173$	10	$f=-1453,\ u=1292,\ v=-1120$
3463	$2\cdot 3\cdot 577$	10	$z=367,\ u=-807$
3467	$2\cdot 1733$	-10	$u=100$
3469	$2^2\cdot 3\cdot 17^2$	10	$f=1003,\ z=1683,\ u'=872,\ u=-1249$
3491	$2\cdot 5\cdot 349$	6	$u=1469,\ v=-1435$
3499	$2\cdot 3\cdot 11\cdot 53$	2	$z=156,\ u=223,\ v=-1704$
3511	$2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 13$	-10	$z''=-638,\ z'=554,\ z=756,\ u=-1711,$ $v=-1556$
3517	$2^2\cdot 3\cdot 293$	2	$f=-596,\ z=258,\ u=579$
3527	$2\cdot 41\cdot 43$	10	$u=234,\ v=-826$
3529	$2^3\cdot 3^2\cdot 7^2$	17	$f'=1396,\ f=808,\ z'=-1042,\ z=-449,$ $u'=-1050,\ u=-1482$
3533	$2^2\cdot 883$	2	$f=548,\ u=16$
3539	$2\cdot 29\cdot 61$	10	$u=-1606,\ v=-450$
3541	$2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 59$	7	$f=852,\ z=59,\ u=-1381,\ v=-42$
3547	$2\cdot 3^2\cdot 197$	-10	$z'=1177,\ z=1162,\ u=76$
3557	$2^2\cdot 7\cdot 127$	2	$f=-943,\ u=-1583,\ v=-663$
3559	$2\cdot 3\cdot 593$	-10	$z=-1436,\ u=-79$
3571	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 17$	10	$z=103,\ u=-443,\ v=65,\ w=1105$
3581	$2^2\cdot 5\cdot 179$	10	$f=364,\ u=-1362,\ v=-1356$
3583	$2\cdot 3^2\cdot 199$	3	$z'=95,\ z=1038,\ u=1448$
3593	$2^3\cdot 449$	10	$f'=-799,\ f=-1153,\ u=-376$
3607	$2\cdot 3\cdot 601$	10	$z=1399,\ u=861$
3613	$2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 43$	2	$f=85,\ z=-1676,\ u=268,\ v=-670$
3617	$2^5\cdot 113$	10	$f'''=793,\ f''=-509,\ f'=-1343,$ f [illegible] 1274, u [illegible] 1048

p	$p-1$	g	Caractères
3623	$2 \cdot 1811$	10	$u = 100$
3631	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$	-10	$z = -336,\ u = -1529,\ v' = -403,\ v = -1662$
3637	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 101$	2	$f = 1027,\ z' = 961,\ z = -696,\ u = -1614$
3643	$2 \cdot 3 \cdot 607$	-10	$z = -423,\ u = 1818$
3659	$2 \cdot 31 \cdot 59$	10	$u = -1818,\ v = 564$
3671	$2 \cdot 5 \cdot 367$	13	$u = 846,\ v = 830$
3673	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 17$	10	$f' = 1010,\ f = -994,\ z'' = 1587,\ z' = -616,$ $z = 1151,\ u = -763$
3677	$2^2 \cdot 919$	2	$f = 1309,\ u = 16$
3691	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 41$	2	$z' = -47,\ z = -475,\ u = 643,\ v = 1752$
3697	$2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$	5	$f'' = -643,\ f' = -615,\ f = 1131,\ z = 519,$ $u = -1400,\ v = -1446$
3701	$2^2 \cdot 5^2 \cdot 37$	10	$f = 1279,\ u' = -781,\ u = 391,\ v = 1380$
3709	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 103$	10	$f = 1609,\ z' = -541,\ z = 498,\ u = 239$
3719	$2 \cdot 11 \cdot 13^2$	10	$u = 768,\ v' = 1317,\ v = 2250$
3727	$2 \cdot 3^4 \cdot 23$	10	$z''' = 832,\ z'' = 785,\ z' = 1841,\ z = 1188,\ u = 1614$
3733	$2^2 \cdot 3 \cdot 311$	2	$f = -851,\ z = 948,\ u = 363$
3739	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 89$	7	$z = -695,\ u = 929,\ v = 357$
3761	$2^4 \cdot 5 \cdot 47$	3	$f'' = -693,\ f' = -1159,\ f = 604,$ $u = -806,\ v = -1071$
3767	$2 \cdot 7 \cdot 269$	10	$u = 743,\ v = 822$
3769	$2^3 \cdot 3 \cdot 157$	7	$f' = 409,\ f = 1445,\ z = -464,\ u = -251$
3779	$2 \cdot 1889$	10	$u = 100$
3793	$2^4 \cdot 3 \cdot 79$	7	$f'' = 141,\ f' = 916,\ f = 803,\ z = 1068,\ u = -1167$
3797	$2^2\ 13 \cdot 73$	2	$f = -742,\ u = -827,\ v = -232$
3803	$2 \cdot 1901$	10	$u = 100$
3821	$2^2 \cdot 5 \cdot 191$	10	$f = 376,\ u = 1421,\ v = -1619$
3823	$2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13$	3	$z = -1185,\ u' = 1551,\ u = 1123,\ v = -348$
3833	$2^3 \cdot 479$	10	$f' = 19,\ f = 361,\ u = 863$
3847	$2 \cdot 3 \cdot 641$	10	$z = 1892,\ u = -220$
3851	$2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	2	$u' = 518,\ u = -1042,\ v = 1192,\ w = 9$
3853	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 107$	2	$f = 1305,\ z' = -501,\ z = -1140,\ u = 335$
3863	$2 \cdot 1931$	10	$u = 100$
3877	$2^2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19$	2	$f = -502,\ z = 224,\ u = 1039,\ v = -1038$
3881	$2^3 \cdot 5 \cdot 97$	13	$f' = 1581,\ f = 197,\ u = 1107,\ v = 18$

p	$p-1$	g	Caractères
3889	$2^4 \cdot 3^5$	11	$f'' = 1925,\ f' = -592,\ f = 454,\ z^{IV} = 1955,$ $z''' = -1273,\ z'' = -1700,\ z' = 923,\ z = 1890$
3907	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31$	2	$z' = -978,\ z = -63,\ u = 739,\ v = -802$
3911	$2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 23$	-10	$u = 1190,\ v = 841,\ w = 1415$
3917	$2^2 \cdot 11 \cdot 89$	2	$f = -835,\ u = -1267,\ v = -1496$
3919	$2 \cdot 3 \cdot 653$	3	$z = -1170,\ u = 729$
3923	$2 \cdot 37 \cdot 53$	-10	$u = 1240,\ v = 344$
3929	$2^3 \cdot 491$	3	$f' = -1643,\ f = 226,\ u = -1297$
3931	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 131$	2	$z = -618,\ u = 1547,\ v = 967$
3943	$2 \cdot 3^3 \cdot 73$	10	$z'' = 334,\ z' = -1646,\ z = -1136,\ u = 64$
3947	$2 \cdot 1973$	-10	$u = 100$
3967	$2 \cdot 3 \cdot 661$	10	$z = 888,\ u = 316$
3989	$2^2 \cdot 997$	10	$f = -481,\ u = -1967$

Table des racines primitives et des caractères, qui s'y rapportent pour les nombres premiers entre 4000 et 5000.

p	$p-1$	g	Caractères
4001	$2^5 \cdot 5^3$	3	$f''' = -662,\ f'' = -1866,\ f' = 1086,\ f = -899,$ $u'' = 1444,\ u' = 395,\ u = 1401$
4003	$2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29$	2	$z = 822,\ u = -938,\ v = -224$
4007	$2 \cdot 2003$	10	$u = 100$
4013	$2^2 \cdot 17 \cdot 59$	2	$f = -1230,\ u = -10,\ v = -547$
4019	$2 \cdot 7^2 \cdot 41$	10	$u' = 27,\ u = 1428,\ v = -112$

p	$p-1$	g	Caractères
4021	$2^2.3.5.67$	2	$f=-723,\ z=-1813,\ u=-1313,\ v=1452$
4027	$2.3.11.61$	-10	$z=1820,\ u=-1724,\ v=224$
4049	$2^4.11.23$	3	$f''=1881,\ f'=-665,\ f=884,\ u=920,$ $v=-596$
4051	$2.3^4.5^2$	10	$z'''=-43,\ z''=1513,\ z'=870,\ z=797,$ $u'=2003,\ u=-32$
4057	$2^3.3.13^2$	10	$f'=-315,\ f=-2200,\ z=-1409,$ $u'=-1878,\ u=751$
4073	$2^3.509$	10	$f'=-1149,\ f=549,\ u=-296$
4079	2.2039	11	$u=121$
4091	$2.5.409$	10	$u=641,\ v=510$
4093	$2^2.3.11.31$	2	$f=1059,\ z=902,\ u=100,\ v=1148$
4099	$2.3.683$	10	$z=-2018,\ u=-156$
4111	$2.3.5.137$	-10	$z=1055,\ u=1504,\ v=887$
4127	2.2063	10	$u=100$
4129	$2^5.3.43$	13	$f'''=1392,\ f''=1163,\ f'=-1743,$ $f=-895,\ z=-1980,\ u=898$
4133	$2^2.1033$	2	$f=-733,\ u=16$
4139	2.2069	10	$u=100$
4153	$2^3.3.173$	10	$f'=599,\ f=1643,\ z=-171,\ u=1824$
4157	$2^2.1039$	2	$f=1761,\ u=16$
4159	$2.3^3.7.11$	3	$z''=321,\ z'=366,\ z=1604,\ u=970,$ $v=2045$
4177	$2^4.3^2.29$	10	$f''=236,\ f'=1395,\ f=-457,\ z'=678,$ $z=-1103,\ u=658$
4201	$2^3.3.5^2.7$	11	$f'=1649,\ f=1154,\ z=-1125,$ $u'=943,\ u=353,\ v=-1076$
4211	$2.5.421$	10	$u=872,\ v=-663$
4217	$2^3.17.31$	10	$f'=-1551,\ f=1911,\ u=-1700,$ $v=792$
4219	$2.3.19.37$	10	$z=112,\ u=1516,\ v=-214$
4229	$2^2.7.151$	10	$f=-2082,\ u=1595,\ v=1540$
4231	$2.3^2.5.47$	-10	$z'=1078,\ z=-621,\ u=280,\ v=1756,$
4241	$2^4.5.53$	3	$f''=-783,\ f'=-1856,\ f=1044,$ $u=1395,\ v=808$
4243	$2.3.7.101$	2	$z=298,\ u=1860,\ v=1630$

p	$p-1$	g	Caractères
4253	$2^2.1063$	2	$f=561,\ u=16$
4259	2.2129	10	$u=100$
4261	$2^2.3.5.71$	10	$f=721,\ z=-1647,\ u=398,\ v=-1419$
4271	$2.5.7.61$	-10	$u=1369,\ v=-1975,\ w=-1533$
4273	$2^4.3.89$	5	$f''=-582,\ f'=1157,\ f=1200,\ z=-1611,$ $u=-208$
4283	2.2141	2	$u=4$
4289	$2^6.67$	3	$f^{IV}=-1076,\ f'''=-254,\ f''-181$ $f'=-1551,\ f=-528,\ u=119$
4297	$2^3.3.179$	5	$f'=1008,\ f=1972,\ z=1410,\ u=1535$
4327	$2.3.7.103$	10	$z=-628,\ u=359,\ v=-1626$
4337	$2^4.271$	10	$f''=1945,\ f'=1161,\ f=886,\ u=-1699$
4339	$2.3^2.241$	10	$z'=-2350,\ z=237,\ u=-118$
4349	$2^2.1087$	10	$f=-608,\ u=1302$
4357	$2^2.3^2.11^2$	2	$f=-66,\ z'=-303,\ z=-1318,$ $u'=1336,\ u=-758$
4363	$2.3.727$	2	$z=412,\ u=64$
4373	$2^2.1093$	2	$f=1904,\ u=16$
4391	$2.5.439$	-10	$u=1263,\ v=-1926$
4397	$2^2.7.157$	2	$f=505,\ u=-1387,\ v=-1394$
4409	$2^3.19.29$	3	$f'=-693,\ f=-332,\ u=209,\ v=-444$
4421	$2^2.5.13.17$	10	$f=-952,\ u=-235,\ v=1033,\ w=1135$
4423	$2.3.11.67$	10	$z=-67,\ u=-980,\ v=-785$
4441	$2^3.3.5.37$	21	$f'=1096,\ f=2146,\ z=-902,$ $u=-890,\ v=-460$
4447	$2.3^2.13.19$	10	$z'=-624,\ z=115,\ u=-477,\ v=1403$
4451	$2.5^2.89$	10	$u'=1349,\ u=-686,\ v=1017$
4457	$2^3.557$	10	$f'=-711,\ f=880,\ u=-1709$
4463	$2.23.97$	10	$u=-706,\ v=-1844$
4481	$2^7.5.7$	3	$f^{V}=1937,\ f^{IV}=1372,\ f'''=364,\ f''=-1934,$ $f'=-1279,\ f=276,\ u=475,\ v=1591$
4483	$2.3^3.83$	2	$z''=-1592,\ z'=-817,\ z=505,\ u=1853$
4493	$2^2.1123$	2	$f=2280,\ u=16$
4507	$2.3.751$	2	$z=-792,\ u=64$
4513	$2^5.3.47$	7	f'' [illegible] 1972, f' [illegible] 1422, f [illegible] f [illegible] 95, z [illegible] 815, u [illegible]

p	$p-1$	g	Caractères
4517	$2^2.1129$	2	$f=1474,\ u=16$
4519	$2.3^2.251$	3	$z'=-862,\ z=1056,\ u=2100$
4523	$2.7.17.19$	-10	$u=1036,\ v=-164,\ w=-1708$
4547	2.2273	2	$u=4$
4549	$2^2.3.379$	6	$f=-1260,\ z=1744,\ u=-595$
4561	$2^4.3.5.19$	11	$f''=-1221,\ f'=-606,\ f=-2205,$ $z=-244,\ u=1439,\ v=-1947$
4567	$2.3.761$	10	$z=1112,\ u=-173$
4583	$2.29.79$	10	$u=-1626,\ v=-111$
4591	$2.3^3.5.17$	10	$z''=2117,\ z'=-2032,\ z=-311,$ $u=-2274.\ v=1678$
4597	$2^2.3.383$	5	$f=2129,\ z=377,\ u=-1448$
4603	$2.3.13.59$	2	$z=-180,\ u=2104,\ v=1538$
4621	$2^2.3.5.7.11$	2	$f=-152,\ z=-1764,\ u=1153,$ $v=1159,\ w=2132$
4637	$2^2.19.61$	2	$f=-2044,\ u=2107,\ v=314$
4639	$2.3.773$	-10	$z=1360,\ u=-2024$
4643	$2.11.211$	-10	$u=2162,\ v=2160$
4649	$2^3.7.83$	3	$f'=-2124,\ f=1846,\ u=1000,\ v=-1406$
4651	$2.3.5^2.31$	10	$z=-787,\ u'=-1109,\ u=-2045,\ v=1945$
4657	$2^4.3.97$	15	$f''=-2202,\ f'=867,\ f=1912,\ z=967,\ u=1458$
4663	$2.3^2.7.37$	3	$z'=-1971,\ z=2092,\ u=-591,\ v=-412$
4673	$2^6.73$	10	$f^{IV}=-668,\ f'''=2289,\ f''=1088$ $f'=1475,\ f=-1993,\ u=2057$
4679	2.2339	11	$u=121$
4691	$2.5.7.67$	10	$u=1740,\ v=59,\ w=676$
4703	2.2351	10	$u=100$
4721	$2^4.5.59$	6	$f''=-2244,\ f'=-1771,\ f=1697.$ $u=950,\ v=32$
4723	$2.3.787$	2	$z=717,\ u=64$
4729	$2^3.3.197$	17	$f'=58,\ f=-1365,\ z=2036,\ u=-422$
4733	$2^2.7.13^2$	5	$f=-897,\ u=343,\ v'=2480,\ v=-2185$
4751	$2.5^3.19$	10	$u''=-2110,\ u'=1913,\ u=-2323,\ v=2134$
4759	$2.3.13.61$	10	$z=-1526,\ u=1792,\ v=1649$
4783	$2.3.797$	10	$z=1745,\ u=353$
4787	2.2393	2	$u=4$

p	$p-1$	g	Caractères
4789	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 19$	2	$f = -1481$, $z' = -540$, $z = -1680$,
			$u = -317$, $v = -405$
4793	$2^3 \cdot 599$	10	$f' = -192$, $f = 1480$, $u = -1152$
4799	$2 \cdot 2399$	7	$u = 49$
4801	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$	7	$f^{IV} = -985$, $f''' = 423$, $f'' = 1292$, $f' = -1484$,
			$f = -1403$, $z = 2340$, $u' = -2038$, $u = -450$
4813	$2^2 \cdot 3 \cdot 401$	2	$f = -1868$, $z = 1888$, $u = -717$
4817	$2^4 \cdot 7 \cdot 43$	10	$f'' = 550$, $f' = -971$, $f = -1291$,
			$u = -1237$, $v = 1470$
4831	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23$	3	$z = -70$, $u = -703$, $v = 1975$, $w = -543$
4861	$2^2 \cdot 3^5 \cdot 5$	11	$f = -493$, $z^{IV} = 243$, $z''' = -765$, $z'' = 975$,
			$z' = -2078$, $z = -320$, $u = -1601$
4871	$2 \cdot 5 \cdot 487$	10	$u = -178$, $v = -2257$
4877	$2^2 \cdot 23 \cdot 53$	2	$f = -719$, $u = 1276$, $v = -373$
4889	$2^3 \cdot 13 \cdot 47$	3	$f' = -1616$, $f = 730$, $u = -1801$, $v = -2200$
4903	$2 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 43$	3	$z = -2417$, $u = -655$, $v = 57$
4909	$2^2 \cdot 3 \cdot 409$	6	$f = -1613$, $z = -574$, $u = -807$
4919	$2 \cdot 2459$	13	$u = 169$
4931	$2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 29$	10	$u = 1315$, $v = 906$, $w = -270$
4933	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 137$	2	$f = -1194$, $z' = 402$, $z = 2131$, $u = -409$
4937	$2^3 \cdot 617$	10	$f' = 95$, $f = -849$, $u = 1065$
4943	$2 \cdot 7 \cdot 353$	10	$u = 144$, $v = 2804$
4951	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$	6	$z' = -1703$, $z = 2261$, $u' = -468$
			$u = -2428$, $v = 1378$
4957	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 59$	2	$f = 359$, $z = -2283$, $u = -2262$, $v = -2380$
4967	$2 \cdot 13 \cdot 191$	10	$u = 1782$, $v = 1264$
4969	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 23$	11	$f' = 161$, $f = 1076$, $z'' = -1600$,
			$z' = 1359$, $z = -187$, $u = -2160$
4973	$2^2 \cdot 11 \cdot 113$	2	$f = 223$, $u = -1210$, $v = 2364$
4987	$2 \cdot 3^2 \cdot 277$	2	$z' = -2353$, $z = -1137$, $u = 2820$
4993	$2^7 \cdot 3 \cdot 13$	5	$f^{V} = -2201$, $f^{IV} = 1191$, $f''' = 469$, $f'' = 269$,
			f' [illegible] 2459, f [illegible] 158, z [illegible] 2059, u [illegible] 11[illegible]
4999	$2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 17$	3	$z = -2238$, u [illegible] 2203, u [illegible] 227, v [illegible] 2429

TABLE DES RACINES PRIMITIVES ET DES CARACTÈRES QUI S'Y RAPPORTENT POUR LES NOMBRES PREMIERS ENTRE 5000 ET 10000.[1]

Calculée par

C. POSSE

à S:t Petersbourg.

Pour les nombres premiers supérieurs à 5000 les racines primitives ont été calculées immédiatement. Elles ne coïncident pas toujours avec celles qu'on trouve dans la table de E. Desmarest («Traité d'analyse indéterminée». Paris 1852), 1) parce que nous donnons pour tous les nombres premiers supérieurs à 5000 la plus petite, en valeur absolue, racine primitive, ce qui n'est pas toujours le cas chez Desmarest; 2) parce que la table de Desmarest contient des erreurs qui se sont signalées elles-mêmes dans le calcul des caractères.

p	$p-1$	g	Caractères
5003	$2.41.61$	2	$u=410,\ v=462$
5009	$2^4.313$	3	$f''=-893,\ f'=1018,\ f=-539,\ u=-625$
5011	$2.3.5.167$	2	$z=-2104,\ u=273,\ v=-223$

[1] Reproduction de la table insérée dans la «Collection mathem. de Moscou» T. XXVII.

p	$p-1$	g	Caractères
5021	$2^2.5.251$	3	$f=-1363,\ u=-1318,\ v=1161$
5023	$2.3^4.31$	-2	$z'''=-1202,\ z''=-2388,\ z'=-600,$ $z=-954,\ u=-2137$
5039	$2.11.229$	-2	$u=-255,\ v=1856$
5051	$2.5^2.101$	2	$u'=2278,\ u=-106,\ v=-810$
5059	$2.3^2.281$	2	$z'=1615,\ z=-1913,\ u=-924$
5077	$2^2.3^3.47$	2	$f=-858, z''=1373, z'=2132, z=-1630, u=-734$
5081	$2^3.5.127$	3	$f'=1284,\ f=2412,\ u=-645,\ v=2349$
5087	2.2543	-2	$u=4$
5099	2.2549	2	$u=4$
5101	$2^2.3.5^2.17$	6	$f=-101,\ z=-1615,\ u'=1931,$ $u=-455,\ v=-1102$
5107	$2.3.23.37$	2	$z=-312,\ u=1869,\ v=34$
5113	$2^3.3^2.71$	19	$f'=909,\ f=-2025,\ z'=619,$ $z=-72,\ u=-96$
5119	$2.3.853$	-2	$z=-1683,\ u=64$
5147	$2.31.83$	2	$u=-1428,\ v=2252$
5153	$2^5.7.23$	5	$f'''=-2169,\ f''=-128,\ f'=925,$ $f=227,\ u=-1521,\ v=-1863$
5167	$2.3^2.7.41$	6	$z'=-5,\ z=-125,\ u=-600,\ v=458$
5171	$2.5.11.47$	2	$u=-787,\ v=646,\ w=1254$
5179	$2.3.863$	2	$z=1497,\ u=64$
5189	$2^2.1297$	2	$f=-2446,\ u=16$
5197	$2^2.3.433$	7	$f=-1969,\ z=1878,\ u=-2430$
5209	$2^3.3.7.31$	19	$f'=1767,\ f=2098,\ z=-1193,$ $u=-893,\ v=-2218$
5227	$2.3.13.67$	2	$z=451,\ u=-56,\ v=-2585$
5231	$2.5.523$	-2	$u=91,\ v=1024$
5233	$2^4.3.109$	10	$f''=-1262,\ f'=1812,\ f=2253,$ $z=-332,\ u=2053$
5237	$2^2.7.11.17$	3	$u=1500,\ v=1343,\ w=-135$
5261	$2^2.5.263$	2	$f=-827,\ u=-751,\ v=1637$
5273	$2^3.659$	3	$f'=1539,\ f=944,\ u=1288$
5279	$2.7.13.29$	-3	$u=2176,\ v=-1516,\ w=2216$
5281	$2^5.3.5.11$	7	$f'''=2319,\ f''=1703,\ f'=940,$ $f=1673,\ z=1403,\ u=2190,\ v=-125$

p	$p-1$	g	Caractères
5297	$2^4 . 331$	3	$f'' = -2044,\ f' = -1397,\ f = 2313,\ u = -1998$
5303	$2 . 11 . 241$	-2	$u = 2169,\ v = -369$
5309	$2^2 . 1327$	2	$f = 1804,\ u = 16$
5323	$2 . 3 . 887$	5	$z = 1282,\ u = -344$
5333	$2^2 . 31 . 43$	2	$f = 2630,\ u = -1663,\ v = 2454$
5347	$2 . 3^5 . 11$	3	$z^{IV} = -2161,\ z''' = -1402,\ z'' = 2828$
			$z' = -808,\ z = -480,\ u = 1393$
5351	$2 . 5^2 . 107$	-2	$u' = 17,\ u = 1842,\ v = 638$
5381	$2^2 . 5 . 269$	3	$f = -1739,\ u = -2047,\ v = -1360$
5387	$2 . 2693$	2	$u = 4$
5393	$2^4 . 337$	3	$f'' = 1476,\ f' = -196,\ f = 665,\ u = -205$
5399	$2 . 2699$	-2	$u = 4$
5407	$2 . 3 . 17 . 53$	-2	$z = -1043,\ u = 2232,\ v = 158$
5413	$2^2 . 3 . 11 . 41$	5	$f = -429,\ z = 1224,\ u = -77,\ v = -129$
5417	$2^3 . 677$	3	$f' = 979,\ f = -368,\ u = 1144$
5419	$2 . 3^2 . 7 . 43$	3	$z' = -1448,\ z = -128,\ u = 64,\ v = -1013$
5431	$2 . 3 . 5 . 181$	-2	$z = 1533,\ u = 2419,\ v = 538$
5437	$2^2 . 3^2 . 151$	5	$f = -630,\ z' = -431,\ z = 2271,\ u = -2907$
5441	$2^6 . 5 . 17$	3	$f^{IV} = -1638,\ f''' = 631,\ f''\ 968,$
			$f' = 1172,\ f = 2452,\ u = 1685,\ v = 2664$
5443	$2 . 3 . 907$	2	$z = 2588,\ u = 64$
5449	$2^3 . 3 . 227$	7	$f' = 78,\ f = 635,\ z = -1475,\ u = 960$
5471	$2 . 5 . 547$	-3	$u = -1868,\ v = -1132$
5477	$2^2 . 37^2$	2	$f = 74,\ u' = 16,\ u = -1286$
5479	$2 . 3 . 11 . 83$	-2	$z = -2703,\ u = 688,\ v = -1361$
5483	$2 . 2741$	2	$u = 4$
5501	$2^2 . 5^3 . 11$	2	$f = 1115,\ u'' = -1911,\ u' = -362,\ u = -1600,\ v = -720$
5503	$2 . 3 . 7 . 131$	3	$z = -930,\ u = -1038,\ v = -1248$
5507	$2 . 2753$	2	$u = 4$
5519	$2 . 31 . 89$	-2	$u = 967,\ v = -2684$
5521	$2^4 . 3 . 5 . 23$	11	$f'' = 1860,\ f' = -2067,\ f = -765,$
			$z = -341,\ u = 1374,\ v = 485$
5527	$2 . 3^2 . 307$	-2	$z' = 1162,\ z = 876,\ u = 2375$
5531	$2 . 5 . 7 . 79$	-5	$u = -239,\ v = -1055,\ w = -2594$
5557	$2^2 . 3 . 463$	2	$f = 2478,\ z = 1827,\ u = -1461$
5563	$2 . 3^3 . 103$	2	$z'' = 1139,\ z' = -1004,\ z = 711,\ u = 2288$

p	$p-1$	g	Caractères
5569	$2^6 . 87$	13	$f^{IV}=241,\ f'''=2391,\ f''=-2482,$ $f'=1010,\ f=973,\ u=448$
5573	$2^2 . 7 . 199$	2	$f=-2017,\ u=159,\ v=765$
5581	$2^2 . 3^2 . 5 . 31$	10	$f=-1437,\ z'=-1448,\ z=-2459,$ $u=-1810,\ v=-1575$
5591	$2 . 5 . 13 . 43$	-2	$u=1996,\ v=759,\ w=-516$
5623	$2 . 3 . 937$	-2	$z=2013,\ u=64$
5639	$2 . 2819$	-2	$u=4$
5641	$2^3 . 3 . 5 . 47$	14	$f'=-583,\ f=1429,\ z=-2045,$ $u=781,\ v=486$
5647	$2 . 3 . 941$	-2	$z=853,\ u=64$
5651	$2 . 5^2 . 113$	2	$u'=-1350,\ u=246,\ v=2129$
5653	$2^2 . 3^2 . 157$	5	$f=310,\ z'=289,\ z=-741,\ u=357$
5657	$2^3 . 7 . 101$	3	$f'=-617,\ f=1670,\ u=-1134,\ v=727$
5659	$2 . 3 . 23 . 41$	2	$z=-1465,\ u=-2651,\ v=-1177$
5669	$2^2 . 13 . 109$	3	$f=-1046,\ u=-2951,\ v=-674$
5683	$2 . 3 . 947$	2	$z=-1111,\ u=64$
5689	$2^3 . 3^2 . 79$	14	$f'=-1340,\ f=-2124,\ z'=1080$ $z=2419,\ u=2160$
5693	$2^2 . 1423$	2	$f=1193,\ u=16$
5701	$2^2 . 3 . 5^2 . 19$	2	$f=-385,\ z=75,\ u'=-2421,\ u=326,\ v=-2219$
5711	$2 . 5 . 571$	-3	$u=1402,\ v=1939$
5717	$2^2 . 1429$	2	$f=-2416,\ u=16$
5737	$2^3 . 3 . 239$	5	$f'=-395,\ f=1126,\ z=-2470,\ u=1547$
5741	$2^2 . 5 . 7 . 41$	2	$f=-2378,\ u=1229.\ v=457,\ w=371$
5743	$2 . 3^2 . 11 . 29$	-2	$z'=469,\ z=200,\ u=-1691,\ v=901$
5749	$2^2 . 3 . 479$	2	$f=-806,\ z=-331,\ u=-1653$
5779	$2 . 3^3 . 107$	2	$z''=2804.\ z'=-172,\ z=2851,\ u=-2835$
5783	$2 . 7^2 59$	-2	$u'=442,\ u=-647,\ v=1698$
5791	$2 . 3 . 5 . 193$	-2	$z=1572,\ u=576,\ v=-2232$
5801	$2^3 . 5^2 . 29$	3	$f'=-2605,\ f=-1145,\ u'=-2357,$ $u=-612,\ v=-1799$
5807	$2 . 2903$	-2	$u=4$
5813	$2^2 . 1453$	2	$f=796,\ u=16$
5821	$2^2 . 3 . 5 . 97$	6	$f=-1242,\ z=2148,\ u=226,\ v=2469$
5827	$2 . 3 . 971$	2	$z=1350,\ u=64$

p	$p-1$	g	Caractères
5839	$2.3.7.139$	-2	$z=1854,\ u=-2853,\ v=-644$
5843	$2.23.127$	2	$u=164,\ v=708$
5849	$2^3.17.43$	3	$f'=2014,\ f=-2839,\ u=-2771,\ v=-2110$
5851	$2.3^2.5^2.13$	2	$z'=2304,\ z=-578,\ u'=1506,$ $u=-2035,\ v=-2550$
5857	$2^5.3.61$	7	$f'''=1007,\ f''=788,\ f'=102,\ f=-1310,$ $z=-1265,\ u=1262$
5861	$2^2.5.293$	3	$f=-754,\ u=386,\ v=-692$
5867	$2.7.419$	-3	$u=-548,\ v=1364$
5869	$2^2.3^2.163$	2	$f=1042,\ z'=-1302,\ z=-778,\ u=1326$
5879	2.2939	-2	$u=4$
5881	$2^3.3.5.7^2$	31	$f'=-779,\ f=1098,\ z=-277,$ $u=-875,\ v'=-431,\ v=-1549$
5897	$2^3.11.67$	3	$f'=-661,\ f=543,\ u=227,\ v=2495$
5903	$2.13.227$	-2	$u=-2316,\ v=-2343$
5923	$2.3^2.7.47$	2	$z'=-2816,\ z=-429,\ u=2877,\ v=-2896$
5927	2.2963	-2	$u=4$
5939	2.2969	2	$u=4$
5953	$2^6.3.31$	7	$f^{\mathrm{IV}}=-2840,\ f'''=-715,\ f''=-733,\ f'=1519,$ $f=-2403,\ z=-870,\ u=2808$
5981	$2^2.5.13.23$	3	$f=1317,\ u=-2263,\ v=2796,\ w=-2799$
5987	$2.41.73$	2	$u=-1739,\ v=746$
6007	$2.3.7.11.13$	3	$z=-78,\ u=295,\ v=-1885,\ w=1756$
6011	$2.5.601$	2	$u=672,\ v=1024$
6029	$2^2.11.137$	2	$f=1801,\ u=1726,\ v=1406$
6037	$2^2.3.503$	5	$f=2652,\ z=-510,\ u=-1692$
6043	$2.3.19.53$	5	$z=1715,\ u=-503,\ v=-1026$
6047	2.3023	-2	$u=4$
6053	$2^2.17.89$	2	$f=2832,\ u=1207,\ v=137$
6067	$2.3^2.337$	2	$z'=-1664,\ z=665,\ u=1263$
6073	$2^3.3.11.23$	10	$f'=2570,\ f=-2524,\ z=1842,\ u=-1446,\ v=2685$
6079	$2.3.1013$	-7	$z=-1554,\ u=2148$
6089	$2^3.761$	3	$f'=-1798,\ f=-455,\ u=472$
6091	$2.3.5.7.29$	7	$z=-745,\ u=-699,\ v=2500,\ w=1624$
6101	$2^2.5^2.61$	2	$f=247,\ u'=2598,\ u=1774,\ v=2058$
6113	$2^5.191$	3	$f'''=140,\ f''=1261,\ f'=741,\ f=1089,\ u=-811$

p	$p-1$	g	Caractères
6121	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17$	7	$f' = -2087,\ f = -2583,\ z' = 1114,$ $z = -1153,\ u = 2234,\ v = 110$
6131	$2 \cdot 5 \cdot 613$	2	$u = -1020,\ v = 1024$
6133	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 73$	5	$f = 865,\ z = -950,\ u = 1690,\ v = -1642$
6143	$2 \cdot 37 \cdot 83$	-2	$u = -2805,\ v = 2739$
6151	$2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 41$	3	$z = 207,\ u' = -1053,\ u = -1542,\ v = 1074$
6163	$2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 79$	3	$z = -79,\ u = 1319,\ v = -697$
6173	$2^2 \cdot 1543$	2	$f = -2447,\ u = 16$
6197	$2^2 \cdot 1549$	2	$f = 2007,\ u = 16$
6199	$2 \cdot 3 \cdot 1033$	2	$z = -2646,\ u = 64$
6203	$2 \cdot 7 \cdot 443$	2	$u = 168,\ v = -2225$
6211	$2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 23$	2	$z'' = 313,\ z' = 590,\ z = -137,\ u = -2226,\ v = 680$
6217	$2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 37$	5	$f' = -1649,\ f = 2372,\ z = -2460,$ $u = 580,\ v = 2654$
6221	$2^2 \cdot 5 \cdot 311$	3	$f = 1121,\ u = -1240,\ v = 995$
6229	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 173$	2	$f = 1451,\ z' = 1262,\ z = -931,\ u = 2600$
6247	$2 \cdot 3^2 \cdot 347$	-2	$z' = -1551,\ z = 2316,\ u = -230$
6257	$2^4 \cdot 17 \cdot 23$	3	$f'' = 1695,\ f' = 1062,\ f = 1584,$ $u = -1502,\ v = 232$
6263	$2 \cdot 31 \cdot 101$	-2	$u = -2346,\ v = 2317$
6269	$2^2 \cdot 1567$	2	$f = 1523,\ u = 16$
6271	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19$	11	$z = 2020,\ u = 692,\ v = -1884,\ w = 1194$
6277	$2^2 \cdot 3 \cdot 523$	2	$f = 1033,\ z = 2308,\ u = -2181$
6287	$2 \cdot 7 \cdot 449$	-2	$u = 2397,\ v = -2477$
6299	$2 \cdot 47 \cdot 67$	2	$u = 1577,\ v = -2046$
6301	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$	10	$f = -2184,\ z' = 2224,\ z = -2978$ $u' = 2304,\ u = 93,\ v = -1714$
6311	$2 \cdot 5 \cdot 631$	2	$u = -1654,\ v = 1024$
6317	$2^2 \cdot 1579$	2	$f = 1963,\ u = 16$
6323	$2 \cdot 29 \cdot 109$	2	$u = -2099,\ v = -1086$
6329	$2^3 \cdot 7 \cdot 113$	3	$f' = -2918,\ f = 2219,\ u = 2578,\ v = 2177$
6337	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 11$	10	$f^{IV} = -2521,\ f''' = -570,\ f'' = 1713,\ f' = 338,$ $f = 178,\ z' = 2176,\ z = -1513,\ u = 44$
6343	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 151$	2	$z = 557,\ u = 2674,\ v = -1481$
6353	$2^4 \cdot 397$	3	$f'' = -161,\ f' = 509,\ f = -1392,\ u = -1207$
6359	$2 \cdot 11 \cdot 17^2$	2	$u = 399,\ v' = -2636,\ v = 133$

p	$p-1$	g	Caractères
6361	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 53$	19	$f' = -3279,\ f = 1751,\ z = 1858,\ u = 399,\ v = 611$
6367	$2 \cdot 3 \cdot 1061$	-2	$z = -770,\ u = 64$
6373	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 59$	2	$f = -1879,\ z'' = -1159,\ z' = -2509,$ $z = 623,\ u = 372$
6379	$2 \cdot 3 \cdot 1063$	2	$z = -3007,\ u = 64$
6389	$2^2 \cdot 1597$	2	$f = -2092,\ u = 16$
6397	$2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 41$	2	$f = 1302,\ z = 2294,\ u = -1708,\ v = -1067$
6421	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 107$	6	$f = 825,\ z = 3104,\ u = 681,\ v = 603$
6427	$2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 17$	3	$z'' = 1264,\ z' = 2231,\ z = -1085,$ $u = -2944,\ v = 2712$
6449	$2^4 \cdot 13 \cdot 31$	3	$f'' = 2225,\ f' = -2207,\ f = 1854,$ $u = -2986,\ v = 501$
6451	$2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 43$	3	$z = 212,\ u' = 1301,\ u = 1968,\ v = -760$
6469	$2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11$	2	$f = 2977,\ z = -1477,\ u' = -2549,$ $u = 1833,\ v = 3015$
6473	$2^3 \cdot 809$	3	$f' = 91,\ f = 1808,\ u = 88$
6481	$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$	7	$f'' = 483,\ f' = -27,\ f = 729,\ z''' = -2964,$ $z'' = -2785,\ z' = 2122,\ z = 80,\ u = -601$
6491	$2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 59$	2	$u = -700,\ v = -1550,\ w = -2761$
6521	$2^3 \cdot 5 \cdot 163$	6	$f' = -187,\ f = 2364,\ u = 1420,\ v = 50$
6529	$2^7 \cdot 51$	7	$f^{\mathrm{V}} = 2338,\ f^{\mathrm{IV}} = 1471,\ f''' = 2742,\ f'' = -2844,$ $f' = -1095,\ f = -2311,\ u = 246$
6547	$2 \cdot 3 \cdot 1091$	2	$z = -2333,\ u = 64$
6551	$2 \cdot 5^2 \cdot 131$	-2	$u' = 902,\ u = 3261,\ v = -1757$
6553	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 91$	10	$f' = -2672,\ f = -3186,\ z' = -2183,$ $z = 1944,\ u = -2678$
6563	$2 \cdot 17 \cdot 193$	5	$u = 1950,\ v = -698$
6569	$2^3 \cdot 821$	3	$f' = 736,\ f = 3038,\ u = -8$
6571	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 73$	3	$z' = 1450,\ z = 2979,\ u = 155,\ v = -1766$
6577	$2^4 \cdot 3 \cdot 137$	5	$f'' = -541,\ f' = -3284,\ f = 1624,$ $z = -354,\ u = -1686$
6581	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 47$	14	$f = 2727,\ u = 1928,\ v = -514,\ w = 2159$
6599	$2 \cdot 3299$	-2	$u = 4$
6607	$2 \cdot 3^2 \cdot 367$	-2	$z' = 2120,\ z = 1518,\ u = -2136$
6619	$2 \cdot 3 \cdot 1103$	2	$z = -570,\ u = 64$
6637	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 79$	2	$f = 2828,\ z = -1371,\ u = -704,\ v = -2834$

p	$p-1$	g	Caractères
6653	$2^2 . 1663$	2	$f = 752,\ u = 16$
6659	$2 . 3329$	2	$u = 4$
6661	$2^2 . 3^2 . 5 . 37$	6	$f = 658,\ z' = 3157,\ z = -1349,$ $u = -2327,\ v = -3073$
6673	$2^4 . 3 . 139$	5	$f'' = -1142,\ f'\ 2929,\ f = -2437,$ $z = -1394,\ u = -69$
6679	$2 . 3^2 . 7 . 59$	-5	$z' = 3099,\ z = 942,\ u = 2422,\ v = 2619$
6689	$2^5 . 11 . 19$	3	$f''' = 3236,\ f'' = -3278,\ f' = 2750,$ $f = -2759,\ u = 717,\ v = -793$
6691	$2 . 3 . 5 . 223$	2	$z = -2919,\ u = 1542,\ v = 3092$
6701	$2^2 . 5^2 . 67$	2	$f = 1721,\ u' = -2842,\ u = -2005,\ v = -644$
6703	$2 . 3 . 1117$	-2	$z = 1480,\ u = 64$
6709	$2^2 . 3 . 13 . 43$	2	$f = -2150,\ z = 1239,\ u = 1208,\ v = -511$
6719	$2 . 3359$	-2	$u = 4$
6733	$2^2 . 3^2 . 11 . 17$	2	$f = 2217,\ z' = -2094,\ z = -620,$ $u = 736,\ v = -912$
6737	$2^4 . 421$	3	$f'' = -2022,\ f' = 875,\ f = -2393,\ u = -2709$
6761	$2^3 . 5 . 13^2$	3	$f' = -1784,\ f = -1775,\ u = -3247,$ $v' = 2797,\ v = -1108$
6763	$2 . 3 . 7^2 . 23$	2	$z = -2156,\ u' = -3243,\ u = 839,\ v = -1935$
6779	$2 . 3389$	2	$u = 4$
6781	$2^2 . 3 . 5 . 113$	2	$f = -995,\ z = 2926,\ u = -2072,\ v = -1027$
6791	$2 . 5 . 7 . 97$	-3	$u = 3062,\ v = 2672,\ w = -933$
6793	$2^3 . 3 . 283$	10	$f' = -958,\ f = 709,\ z = 1168,\ u = 2349$
6803	$2 . 19 . 179$	2	$u = -720,\ v = -2044$
6823	$2 . 3^2 . 379$	-2	$z' = 1853,\ z = 2685,\ u = 2870$
6827	$2 . 3413$	2	$u = 4$
6829	$2^2 . 3 . 569$	2	$f = 1596,\ z = 734,\ u = -2733$
6833	$2^4 . 7 . 61$	3	$f'' = 352,\ f' = 910,\ f = 1307,\ u = -1552,\ v = 1917$
6841	$2^3 . 3^2 . 5 . 19$	22	$f' = 3095,\ f = 1625,\ z' = -2091,$ $z = 2808,\ u = -2735,\ v = -1009$
6857	$2^3 . 857$	3	$f' = -596,\ f = -1348,\ u = -296$
6863	$2 . 47 . 73$	5	$u = 2642,\ v = -2968$
6869	$2^2 . 17 . 101$	2	$f = -998,\ u = -2749,\ v = -2992$
6871	$2 . 3 . 5 . 229$	3	$z = 1466,\ u = -2522,\ v = -2072$
6883	$2 . 3 . 31 . 37$	2	$z = -220,\ u = -2187,\ v = -1588$

p	$p-1$	g	Caractères
6899	$2 . 3449$	2	$u = 4$
6907	$2 . 3 . 1151$	2	$z = -1857,\ u = 64$
6911	$2 . 5 . 691$	-2	$u = -761,\ v = 1024$
6917	$2^2 . 7 . 13 . 19$	2	$f = -263,\ u = -2885,\ v = 1747,\ w = -2853$
6947	$2 . 23 . 151$	2	$u = 1035,\ v = -1027$
6949	$2^2 . 3^2 . 193$	2	$f = 932,\ z' = -2234,\ z = 1942,\ u = -2703$
6959	$2 . 7^2 . 71$	-3	$u' = -3475,\ u = -2158,\ v = 1228$
6961	$2^4 . 3 . 5 . 29$	13	$f'' = 3069,\ f' = 528,\ f = 344,\ z = 507,$ $u = -880,\ v = -2817$
6967	$2 . 3^4 . 43$	5	$z''' = -1559,\ z'' = 1510,\ z' = -1060,$ $z = -383,\ u = 1933$
6971	$2 . 5 . 17 . 41$	2	$u = 3439,\ v = 226,\ w = 1156$
6977	$2^6 . 109$	3	$f^{IV} = -3055,\ f''' = -2201,\ f'' = 2363,$ $f' = 2169,\ f = 2063,\ u = 288$
6983	$2 . 3491$	-2	$u = 4$
6991	$2 . 3 . 5 . 233$	-2	$z = -1382,\ u = 1530,\ v = 1125$
6997	$2^2 . 3 . 11 . 53$	5	$f = 1796,\ z = -2909,\ u = -2197,\ v = -2932$
7001	$2^3 . 5^3 . 7$	3	$f' = 3477,\ f = -1198,\ u'' = -2748$ $u' = -878,\ u = 3403,\ v = -1347$
7013	$2^2 . 1753$	2	$f = 2480,\ u = 16$
7019	$2 . 11^2 . 29$	2	$u' = 1323,\ u = 3100,\ v = -766$
7027	$2 . 3 . 1171$	2	$z = -524,\ u = 64$
7039	$2 . 3^2 . 17 . 23$	-2	$z' = 2577,\ z = -302,\ u = 1762,\ v = -2558$
7043	$2 . 7 . 503$	2	$u = -153,\ v = 2298$
7057	$2^4 . 3^2 . 7^2$	5	$f'' = -517,\ f' = -877,\ f = -84,\ z'$ [illegible] $2715,$ $z = 145,\ u' = 2756,\ u = -1290$
7069	$2^2 . 3 . 19 . 31$	2	$f = -188,\ z = -2041,\ u = -2169,\ v = 822$
7079	$2 . 3539$	-2	$u = 4$
7103	$2 . 53 . 67$	-2	u [illegible] $2531,\ v$ [illegible] 1030
7109	$2^2 . 1777$	2	$f = 304,\ u = 16$
7121	$2^4 . 5 . 89$	3	$f'' = -1899,\ f' = -2975,\ f = -778,$ $u = -2617,\ v = -616$
7127	$2 . 7 . 509$	-2	$u = -2872,\ v = 2130$
7129	$2^3 . 3^4 . 11$	7	$f' = -86,\ f = 267,\ z''' = 470,\ z'' = 3373,$ $z' = -1562,\ z = -1250,\ u = -1230$
7151	$2 . 5^2 . 11 . 13$	-3	$u' = 2422,\ u = -630,\ v = 337,\ w = 2174$

p	$p-1$	g	Caractères
7159	$2\cdot3\cdot1193$	-2	$z=-2881,\ u=64$
7177	$2^3\cdot3\cdot13\cdot23$	10	$f'=1581,\ f=1965,\ z=-2039,$
			$u=3569,\ v=-3355$
7187	$2\cdot3593$	2	$u=4$
7193	$2^3\cdot29\cdot31$	3	$f'=2324,\ f=-967,\ u=158,\ v=1067$
7207	$2\cdot3\cdot1201$	-2	$z=-1839,\ u=64$
7211	$2\cdot5\cdot7\cdot103$	2	$u=-2676,\ v=-2941,\ w=2604$
7213	$2^2\cdot3\cdot601$	5	$f=1999,\ z=-2603,\ u=2214$
7219	$2\cdot3^2\cdot401$	2	$z'=-584,\ z=2725,\ u=2260$
7229	$2^2\,13\cdot139$	2	$f=3572,\ u=2256,\ v=2284$
7237	$2^2\cdot3^3\cdot67$	5	$f=2502,\ z''=1463,\ z'=-3209,$
			$z=-1831,\ u=3164$
7243	$2\cdot3\cdot17\cdot71$	2	$z=3426,\ u=900,\ v=-1989$
7247	$2\cdot3623$	-2	$u=4$
7253	$2^2\cdot7^2\cdot37$	3	$f=2211,\ u'=311,\ u=3268,\ v=2636$
7283	$2\cdot11\cdot331$	2	$u=1687,\ v=-704$
7297	$2^7\cdot3\cdot19$	5	$f^{\mathrm{V}}=383,\ f^{\mathrm{IV}}=749,\ f'''=-868,\ f''=1833,$
			$f'=3269,\ f=3553,\ z=3535,\ u=1691$
7307	$2\cdot13\cdot281$	2	$u=1573,\ v=1376$
7309	$2^2\cdot3^2\ 7\cdot29$	6	$f=2717,\ z'=2025,\ z=3416,\ u=-457,\ v=1244$
7321	$2^3\cdot3\cdot5\cdot61$	7	$f'=11,\ f=121,\ z=308,\ u=-1925,\ v=-2076$
7331	$2\cdot5\cdot733$	2	$u=-458,\ v=1024$
7333	$2^2\cdot3\cdot13\cdot47$	6	$f=2909,\ z=-3063,\ u=1219,\ v=-2651$
7349	$2^2\cdot11\cdot167$	2	$f=2061,\ u=-874,\ v=-1694$
7351	$2\cdot3\cdot5^2\cdot7^2$	5	$z=-149,\ u'=-1694,\ u=119$
			$v'=247,\ v=-680$
7369	$2^3\cdot3\cdot307$	7	$f'=1171,\ f=607,\ z=-2560,\ u=-516$
7393	$2^5\cdot3\cdot7\cdot11$	5	$f'''=-1507,\ f''=1398,\ f'=2652,$
			$f=2361,\ z=1717,\ u=1711,\ v=-3244$
7411	$2\cdot3\cdot5\cdot13\cdot19$	2	$z=394,\ u=1542,\ v=-3444,\ w=417$
7417	$2^3\cdot3^2\cdot103$	5	$f'=2198,\ f=2737,\ z'=2587,\ z=2312,\ u=2138$
7433	$2^3\cdot929$	3	$f'=146,\ f=-983,\ u=-872$
7451	$2\cdot5^2\cdot149$	2	$u'=-2380,\ u=2963,\ v=-2502$
7457	$2^5\cdot233$	3	$f'''=2542,\ f''=-3455,\ f'=-1632,$
			$f=1275,\ u=1295$
7459	$2\cdot3\cdot11\cdot113$	2	$z=-229,\ u=2958,\ v=2261$

p	$p-1$	g	Caractères
7477	$2^2.3.7.89$	2	$f=1652,\ z=3468,\ u=716,\ v=1515$
7481	$2^3.5.11.17$	6	$f'=-348,\ f=1408,\ u=1270,\ v=-1364,\ w=3668$
7487	$2.19.197$	-3	$u=634,\ v=1584$
7489	$2^6.3^2.13$	7	$f^{IV}=-1384,\ f'''=-1728,\ f''=-2127,\ f'=773,$ $f=-1591,\ z'=-3151,\ z=-2468,\ u=1709$
7499	$2.23.163$	2	$u=-211,\ v=3054$
7507	$2.3^3.139$	2	$z''=-1950,\ z'=904,\ z=-606\ \ u=-1882$
7517	$2^2.1879$	2	$f=-3409,\ u=16$
7523	2.3761	2	$u=4$
7529	$2^3.941$	3	$f'=292,\ f=2445,\ u=-968$
7537	$2^4.3.157$	7	$f''=-3103,\ f'=-3677,\ f=-1049$ $z=1962,\ u=418$
7541	$2^2.5.13.29$	2	$f=2867,\ u=-318,\ v=1961,\ w=-2552$
7547	$2.7^3.11$	2	$u''=-1828,\ u'=1860,\ u=-402,\ v=-556$
7549	$2^2.3.17.37$	2	$f=2931,\ z=528,\ u=798,\ v=-1678$
7559	2.3779	-2	$u=4$
7561	$2^3.3^3.5.7$	13	$f'=3109,\ f=2923,\ z''=2478,\ z'=24,$ $z=-1298,\ u=-2474,\ v=-3702$
7573	$2^2.3.631$	2	$f=3743,\ z=-2058,\ u=-3477$
7577	$2^3.947$	3	$f'=-2474,\ f=-1540,\ u=-1016$
7583	$2.17.223$	-2	$u=1885,\ v=-1207$
7589	$2^2.7.271$	2	$f=3270,\ u=-3172,\ v=-2652$
7591	$2.3.5.11.23$	-2	$z=-2454,\ u=2708,\ v=-412,\ w=2465$
7603	$2.3.7.181$	2	$z=-2095,\ u=1034,\ v=1134$
7607	2.3803	-2	$u=4$
7621	$2^2.3.5.127$	2	$f=2038,\ z=3124,\ u=383,\ v=2884$
7639	$2.3.19.67$	-5	$z=2975,\ u=1577,\ v=-901$
7643	2.3821	2	$u=4$
7649	$2^5.329$	3	$f'''=-3252,\ f''=-3063,\ f'=-3354,$ $f=-2363,\ u=-551$
7669	$2^2.3^3.71$	2	$f=-2292,\ z''=-477,\ z'=355,$ $z=-2071,\ u=808$
7673	$2^3.7.137$	3	$f'=-86,\ f=-277,\ u=1693,\ v=-2323$
7681	$2^9.3.5$	17	$f^{VII}=535,\ f^{VI}=2028,\ f^{V}=3449,\ f^{IV}=-2268,$ $f'''=-2446,\ f''=-583,\ f'=1925,$ $f=3383,\ z=684,\ u=-2580$

p	$p-1$	g	Caractères
7687	$2.3^2.7.61$	-2	$z'=1143,\ z=2274,\ u=-3568,\ v=84$
7691	$2.5.769$	2	$u=-1512,\ v=1024$
7699	$2.3.1283$	3	$z=2269,\ u=729$
7703	2.3851	-2	$u=4$
7717	$2^2.3.643$	2	$f=-2953,\ z=-3440,\ u=-3621$
7723	$2.3^3.11.13$	3	$z''=479,\ z'=-3774,\ z=917,\ u=2429,\ v=2829$
7727	2.3863	-2	$u=4$
7741	$2^2.3^2.5.43$	7	$f=3199,\ z'=2281,\ z=2452,\ u=-2508,\ v=-2764$
7753	$2^3.3.17.19$	10	$f'=-3560,\ f=-2555,\ z=-404,$ $u=946,\ v=310$
7757	$2^2.7.277$	2	$f=-812,\ u=2302,\ v=-3286$
7759	$2.3^2.431$	-2	$z'=2191,\ z=1759,\ u=-1662$
7789	$2^2.3.11.59$	2	$f=-3378,\ z=233,\ u=-582,\ v=-1634$
7793	$2^4.487$	3	$f''=-3609,\ f'=2778,\ f=2214,\ u=-1811$
7817	$2^3.977$	3	$f'=-955,\ f=-2564,\ u=-2256$
7823	2.3911	-2	$u=4$
7829	$2^2.19.103$	2	$f=2037,\ u=2039,\ v=3450$
7841	$2^5.5.7^2$	13	$f'''=-710,\ f''=2276,\ f'=-2725,$ $f=198,\ u=3308,\ v'=-508,\ v=3727$
7853	$2^2.13.151$	2	$f=1759,\ u=1873,\ v=-1480$
7867	$2.3^2.19.23$	3	$z'=2407,\ z=1465,\ u=-2712,\ v=-2374$
7873	$2^6.3.41$	5	$f^{IV}=2000,\ f'''=516,\ f''=-1426,\ f'=2242,$ $f=3590,\ z=-1395,\ u=-137$
7877	$2^2.11.179$	2	$f=-320,\ u=774,\ v=-1952$
7879	$2.3.13.101$	-2	$z=-1367,\ u=-3867,\ v=-3516$
7883	$2.7.563$	2	$u=-3720,\ v=618$
7901	$2^2.5^2.79$	2	$f=-3346,\ u'=-3249,\ u=-3848,\ v=-2146$
7907	$2.59.67$	2	$u=503,\ v=1703$
7919	$2.37.107$	-2	$u=-2096,\ v=-1468$
7927	$2.3.1321$	3	$z=-3760,\ u=729$
7933	$2^2.3.611$	2	$f=2950,\ z=-2006,\ u=-3837$
7937	$2^8.31$	3	$f^{VI}=2805,\ f^{V}=2458,\ f^{IV}=1707,\ f'''=970,$ $f''=-3603,\ f'=-3323,\ f=1962,\ u=-1304$
7949	$2^2.1987$	2	$f=679,\ u=16$
7951	$2.3.5^2.53$	-2	$z=-322,\ u'=3524,\ u=-1918,\ v=-1957$
7963	$2.3.1327$	5	$z=1623,\ u=-301$

p	$p-1$	g	Caractères
7993	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 37$	5	$f' = 1654,\ f = 2110,\ z'' = -187,$
			$z' = -929,\ z = -3245,\ u = -1683$
8009	$2^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	3	$f' = -2017,\ f = 283,\ u = -811,$
			$v = 3933,\ w = -2500$
8011	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 89$	-7	$z' = 2019,\ z = -90,\ u = -3477,\ v = -2361$
8017	$2^4 \cdot 3 \cdot 167$	5	$f'' = -1160.\ f' = -1256,\ f = -1813,$
			$z = -2643,\ u = -3910$
8039	$2 \cdot 4019$	-2	$u = 4$
8053	$2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61$	2	$f = 370,\ z = 3497,\ u = 2180,\ v = -1359$
8059	$2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 79$	3	$z = -2766,\ u = 2571,\ v = 913$
8069	$2^2 \cdot 2017$	2	$f = -2732,\ u = 16$
8081	$2^4 \cdot 5 \cdot 101$	3	$f'' = 1977,\ f' = -2675,\ f = 3940,$
			$u = -3732,\ v = -1113$
8087	$2 \cdot 13 \cdot 311$	-2	$u = 1699,\ v = 2938$
8089	$2^3 \cdot 3 \cdot 337$	17	$f' = -1455,\ f = -2293.\ z = -1414,\ u = 2401$
8093	$2^2 \cdot 7 \cdot 17^2$	2	$f = -3060,\ u = -1895,\ v' = -1261\ \ v = 2474$
8101	$2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$	6	$f = -90,\ z''' = -44,\ z'' = 3927,\ z' = -1183,$
			$z = -2218,\ u' = 16,\ u = 3547$
8111	$2 \cdot 5 \cdot 811$	-2	$u = -2568,\ v = 1024$
8117	$2^2 \cdot 2029$	2	$f = -1733,\ u = 16$
8123	$2 \cdot 31 \cdot 131$	2	$u = -1661,\ v = 570$
8147	$2 \cdot 4073$	2	$u = 4$
8161	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$	7	$f''' = -2993,\ f'' = -2729,\ f' = -3552,$
			$f = -202,\ z = -2904,\ u = -1828,\ v = 3813$
8167	$2 \cdot 3 \cdot 1361$	3	$z = 3092,\ u = 729$
8171	$2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 43$	2	$u = -3311,\ v = -63,\ w\, 2478$
8149	$2 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 47$	2	$z = 1096,\ u = -4066,\ v = 1715$
8191	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	-11	$z' = 2723,\ z = -91,\ u = -3397,$
			$v = -1428,\ w = 64$
8209	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 57$	7	$f'' = 1201,\ f' = -2383,\ f = -1039,$
			$z' = -2144,\ z = 3265,\ u = 1957$
8219	$2 \cdot 7 \cdot 587$	2	$u = -3274,\ v = -54$
8221	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 137$	2	$f = 3745,\ z = 415,\ u = 2822,\ v = -3589$
8231	$2 \cdot 5 \cdot 823$	-2	$u - 3032,\ v \quad 1024$
8233	$2^3 \cdot 3 \cdot 7^3$	10	$f' = 2752,\ f = -856,\ z = 2612,\ u'' = -1699,$
			$u' = -1672,\ u = 2187$

p	$p-1$	g	Caractères
8237	$2^2 \cdot 29 \cdot 71$	3	$f = 287,\ u = 2142,\ v = 992$
8243	$2 \cdot 13 \cdot 317$	2	$u = -3293,\ v = 2601$
8263	$2 \cdot 3^5 \cdot 17$	-2	$z^{IV} = 1468,\ z''' = 3052,\ z'' = -3057,$ $z' = 3903,\ z = 240,\ u = -3108$
8269	$2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 53$	2	$f = 643,\ z = -158,\ u = 3266,\ v = 2042$
8273	$2^4 \cdot 11 \cdot 47$	3	$f'' = -528,\ f' = -2498,\ f = 2162,$ $u = -485,\ v = 2557$
8287	$2 \cdot 3 \cdot 1381$	3	$z = 568,\ u = 729$
8291	$2 \cdot 5 \cdot 829$	2	$u = 3333,\ v = 1024$
8293	$2^2 \cdot 3 \cdot 691$	2	$f = 531,\ z = -2051,\ u = 4096$
8297	$2^3 \cdot 17 \cdot 61$	3	$f' = -3899,\ f = 2097,\ u = 1813,\ v = 463$
8311	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 277$	-2	$z = 1266,\ u = 3963,\ v = 2179$
8317	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$	6	$f = -1371,\ z'' = -2490,\ z' = -724,$ $z = 1286,\ u = 1538,\ v = -3563$
8329	$2^3 \cdot 3 \cdot 347$	7	$f' = -2825,\ f = 1443,\ z = -1053,\ u = 1328$
8353	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 29$	5	$f''' = 1516,\ f'' = 1181,\ f' = -190,$ $f = 2688,\ z' = 1952,\ z = 1736,\ u' = -2024$
8363	$2 \cdot 37 \cdot 113$	2	$u = -805,\ v = 3165$
8369	$2^4 \cdot 523$	3	$f'' = -1257,\ f' = -1692,\ f = 666,\ u = -3415$
8377	$2^3 \cdot 3 \cdot 349$	5	$f' = 290,\ f = 330,\ z = 813,\ u = 3268$
8387	$2 \cdot 7 \cdot 599$	2	$u = -1011,\ v = -390$
8389	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 233$	6	$f = 3449,\ z' = 3314,\ z = 691,\ u = 1688$
8419	$2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 61$	3	$z = 1961,\ u = 407,\ v = 2354$
8423	$2 \cdot 4211$	-2	$u = 4$
8429	$2^2 \cdot 7^2 \cdot 43$	2	$f = 2190\ \ u' = -1717,\ u = -2180,\ v = -1496$
8431	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 281$	2	$z = 2147,\ u = 1145,\ v = 3388$
8443	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 67$	2	$z' = -2027,\ z = 1035,\ u = 1017,\ v = 2484$
8447	$2 \cdot 41 \cdot 103$	2	$u = -3920,\ v = 78$
8461	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 47$	6	$z' = 2883,\ z = -1777,\ u = 2455,\ v = 3177$
8467	$2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 83$	2	$z = -4188,\ u = -3893,\ v = -2604$
8501	$2^2 \cdot 5^3 \cdot 17$	7	$f = -4020,\ u'' = -3432,\ u' = 458,$ $u = 3215,\ v = -1766$
8513	$2^6 \cdot 7 \cdot 19$	5	$f^{IV} = -3398,\ f''' = 2776,\ f'' = 1911,\ f' = 156,$ $f = -1203,\ u = -3985,\ v = 2522$
8521	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 71$	13	$f' = 774,\ f = 2606,\ z = 2024,\ u = 2302,\ v = -1332$
8527	$2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 29$	-2	$z = 2976,\ u' = -1604,\ u = 3767,\ v = -149$

p	$p-1$	g	Caractères
8537	$2^3 . 11 . 97$	3	$f' = -3053,\ f = -1595,\ u = 3375,\ v = -518$
8539	$2 . 3 . 1423$	2	$z = 2552,\ u = 64$
8543	$2 . 4271$	-2	$u = 4$
8563	$2 . 3 . 1427$	2	$z = 2823,\ u = 64$
8573	$2^2 . 2143$	2	$f = -2195,\ u = 16$
8581	$2^2 . 3 . 5 . 11 . 13$	7	$f = 131,\ z = 424,\ u = 314,\ v = 2008,\ w = 1046$
8597	$2^2 . 7 . 307$	2	$f = -2318,\ u = 368,\ v = 2728$
8599	$2 . 3 . 1433$	2	$z = -1206,\ u = 64$
8609	$2^5 . 269$	3	$f''' = -1522,\ f'' = 663,\ f' = 510,\ f = 1830,\ u = 345$
8623	$2 . 3^2 . 479$	2	$z' = 3374,\ z = 1545,\ u = 3454$
8627	$2 . 19 . 227$	2	$u = -1055,\ v = -1334$
8629	$2^2 . 3 . 719$	6	$f = -4123,\ z = 3306,\ u = -3720$
8641	$2^6 . 3^3 . 5$	17	$f^{IV} = 3356,\ f''' = 3513,\ f'' = 1821,\ f' = -2103,$ $f = -1583,\ z'' = 783,\ z' = -2068,$ $z = -3573,\ u = -997$
8647	$2 . 3 . 11 . 131$	2	$z = 794,\ u = -2241,\ v = -3168$
8663	$2 . 61 . 71$	2	$u = 2735,\ v = 1652$
8669	$2^2 . 11 . 197$	2	$f = -3876,\ u = -2046,\ v = -1869$
8677	$2^2 . 3^2 . 241$	2	$f = 3963,\ z' = -569,\ z = 1378,\ u = -3120$
8681	$2^3 . 5 . 7 . 31$	15	$f' = 2072,\ f = -3911,\ u = -2715,$ $v = -4067,\ w = -4096$
8689	$2^4 . 3 . 181$	13	$f'' = -2753,\ f' = 2201,\ f = -4061,$ $z = 1903,\ u = -426$
8693	$2^2 . 41 . 53$	2	$f = 4048,\ u = 2427,\ v = 618$
8699	$2 . 4349$	2	$u = 4$
8707	$2 . 3 . 1451$	5	$z = -2414,\ u = -1789$
8713	$2^3 . 3^2 . 11^2$	5	$f' = -1345,\ f = -3279,\ z' = -2551,$ $z = -2538,\ u' = -58,\ u = 1626$
8719	$2 . 3 . 1453$	3	$z = 2281,\ u = 729$
8731	$2 . 3^2 . 5 . 97$	2	$z' = 4079,\ z = 3658,\ u = -1732,\ v = -3509$
8737	$2^5 . 3 . 7 . 13$	5	$f''' = -1658,\ f'' = -3191,\ f' = 3876,\ f = -4264,$ $z = 2268,\ u = -852,\ v = -3007$
8741	$2^2 . 5 . 19 . 23$	2	$f = 3320,\ u = -4115,\ v = -1445,\ w = 1092$
8747	$2 . 4373$	2	$u = 4$
8753	$2^4 . 547$	3	$f'' = -4288,\ f' = -3109,\ f = 2569,\ u = -533$
8761	$2^3 . 3 . 5 . 73$	23	$f' = 1900,\ f = 468,\ z = 1733,\ u = -3727,\ v = -4282$

p	$p-1$	g	Caractères
8779	$2.3.7.11.19$	11	$z=-1268,\ u=-4352,\ v=-1589,\ w=-104$
8783	2.4391	-2	$u=4$
8803	$2.3^3.163$	2	$z''=2726,\ z'=1696,\ z=-989,\ u=-3919$
8807	$2.7.17.37$	-2	$u=-631,\ v=-4238,\ w=3412$
8819	2.4409	2	$u=4$
8821	$2^2.3^2.5.7^2$	2	$f=297,\ z'=-3509,\ z=-2437,$
			$u=-3909,\ v'=-4314,\ v=3694$
8831	$2.5.883$	-5	$u=920,\ v=-1461$
8837	$2^2.47^2$	2	$f=94,\ u'=16,\ u=3360$
8839	$2.3^2.491$	-2	$z'=2685,\ z=4372,\ u=-3026$
8849	$2^4.7.79$	3	$f''=2231,\ f'=4223,\ f=2994,$
			$u=-2466,\ v=-3759$
8861	$2^2.5.443$	2	$f=-1791,\ u=-1662,\ v=2978$
8863	$2.3.7.211$	3	$z=-1462,\ u=-245,\ v=2371$
8867	$2.11.13.31$	2	$u=2286,\ v=4032,\ w=-1177$
8887	$2.3.1481$	-2	$z=-4228,\ u=64$
8893	$2^2.3^2.13.19$	5	$f=-2851,\ z'=-2451,\ z=249,$
			$u=1997,\ v=3142$
8923	$2.3.1487$	2	$z=-3848,\ u=64$
8929	$2^5.3^2.31$	11	$f'''=-308,\ f''=-3355,\ f'=3444,\ f=3424,$
			$z'=-4129,\ z=4339,\ u=-3817$
8933	$2^2.7.11.29$	2	$f=762,\ u=3868,\ v=-135,\ w=-4280$
8941	$2^2.3.5.149$	6	$f=-3080.\ z=1640,\ u=-1017,\ v=1428$
8951	$2.5^2.179$	-2	$u'=3135,\ u=2910,\ v=2671$
8963	2.4481	2	$u=4$
8969	$2^3.19.59$	3	$f'=591,\ f=510,\ u=-3205,\ v=539$
8977	$2.3.5.13.23$	2	$z=-342,\ u=-3888,\ v=999,\ w=-1794$
8999	$2.11.409$	-2	$u=870,\ v=770$
9001	$2^3.3^2.5^3$	7	$f'=2614,\ f=1237,\ z'=2542,\ z=-3799,$
			$u''=-2820,\ u'=-2660,\ u=-1548$
9007	$2.3.19.79$	-2	$z=1094,\ u=-726,\ v=4338$
9011	$2.5.17.53$	2	$u=-2625,\ v=-3953,\ w=1401$
9013	$2^2.3.751$	5	$f=-1658,\ z=-3326,\ u=-3519$
9029	$2^2.37.61$	2	$f=4467,\ u=-828,\ v=2167$
9041	$2^4.5.113$	3	$f''=1778,\ f'=-3066,\ f=-2884,$
			$u=-3516,\ v=-4398$

p	$p-1$	g	Caractères
9043	$2\cdot 3\cdot 11\cdot 137$	3	$z=-3153,\ u=-1534,\ v=2001$
9049	$2^3\cdot 3\cdot 377$	7	$f'=-1468,\ f=1362,\ z=845,\ u=2638$
9059	$2\cdot 7\cdot 647$	2	$u=2118,\ v=-1734$
9067	$2\cdot 3\cdot 1511$	3	$z=1081,\ u=729$
9091	$2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 101$	3	$z'=-1238,\ z=-3389,\ u=100,\ v=4329$
9103	$2\cdot 3\cdot 37\cdot 41$	-2	$z=4379,\ u=-3772,\ v=790$
9109	$2^2\cdot 3^2\cdot 11\cdot 23$	10	$f=1986,\ z'=1647,\ z=3120,\ u=197,\ v=-2699$
9127	$2\cdot 3^3\cdot 13^2$	-2	$z''=2922,\ z'=1155,\ z=-3011,$ $u'=-3036,\ u=-1068$
9133	$2^2\cdot 3\cdot 761$	6	$f=-3732,\ z=-3798,\ u=-4283$
9137	$2^4\cdot 571$	3	$f''=1434,\ f'=531,\ f=-1286,\ u=-2314$
9151	$2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 61$	-2	$z=1175,\ u'=549,\ u=2005,\ v=1525$
9157	$2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 109$	6	$f=2203,\ z=-1294,\ u=387,\ v=-1746$
9161	$2^3\cdot 5\cdot 229$	3	$f'=4084,\ f=-3125,\ u=625,\ v=-2695$
9173	$2^2\cdot 2293$	2	$f=-2514,\ u=16$
9181	$2^2\ 3^3\cdot 5\cdot 17$	2	$f=303,\ z''=-1244,\ z'=1563,$ $z=1009,\ u=-1764,\ v=2528$
9187	$2\cdot 3\cdot 1531$	3	$z=4121,\ u=729$
9199	$2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 73$	-2	$z'=2241,\ z=3767,\ u=-393,\ v=-491$
9203	$2\cdot 43\cdot 107$	2	$u=2271,\ v=645$
9209	$2^3\cdot 1151$	3	$f'=-3382,\ f=346,\ u=-2648$
9221	$2^2\cdot 5\cdot 761$	2	$f=3300,\ u=-2698,\ v=-2618$
9227	$2\cdot 7\cdot 659$	2	$u=3739,\ v=-2070$
9239	$2\cdot 31\cdot 149$	-2	$u=3035,\ v=2386$
9241	$2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$	13	$f'=4442,\ f=1829,\ z=-167,\ u=3564,$ $v=-570,\ w=-4583$
9257	$2^3\cdot 13\cdot 89$	3	$f'=2883,\ f=-1097,\ u=-4352,\ v=3912$
9277	$2^2\cdot 3\cdot 773$	5	$f=-888,\ z=-602,\ u=-2184$
9281	$2^6\cdot 5\cdot 29$	3	$f^{\mathrm{IV}}=3159,\ f'''=2206,\ f''=3192,\ f'=-1674,$ $f=-586,\ u=-4189,\ v=1614$
9283	$2\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 17$	2	$z=-2844,\ u=2961,\ v=-3490,\ w=-1132$
9293	$2^2\cdot 23\cdot 101$	2	$f=-482,\ u=-1845,\ v=296$
9311	$2\cdot 5\cdot 7^2\cdot 19$	-2	$u=2405,\ v'=3219,\ v=764,\ w=4230$
9319	$2\cdot 3\cdot 1553$	-2	$z=-3139,\ u=64$
9323	$2\cdot 59\cdot 79$	2	$u=4606,\ v=1769$
9337	$2^3\cdot 3\cdot 389$	5	$f'=-1847,\ f=3404,\ z=-4400,\ u=-483$

p	$p-1$	g	Caractères
9341	$2^2.5.467$	2	$f=-2638,\ u=3695,\ v=2384$
9343	$2.3^3.173$	-2	$z''=-384,\ z'=-4524,\ z=3230,\ u=-2922$
9349	$2^2.3.19.41$	2	$f=3641,\ z=4020,\ u=4423,\ v=1995$
9371	$2.5.937$	2	$u=-3576,\ v=1024$
9377	$2^5.293$	3	$f'''=1587,\ f''=-3844,\ f'=-1816,$ $f=-2848,\ u=-3636$
9391	$2.3.5.313$	-2	$z=983,\ u=-1882,\ v=3057$
9397	$2^2.3^3.87$	2	$f=1852,\ z''=3918,\ z'=697,\ z=-2625,\ u=-3083$
9403	$2.3.1567$	3	$z=3410,\ u=729$
9413	$2^2.13.181$	3	$f=-4658,\ u=-3083,\ v=2843$
9419	$2.17.277$	2	$u=-4250,\ v=-637$
9421	$2^2.3.5.157$	2	$f=2301,\ z=-2379,\ u=-4685,\ v=-4229$
9431	$2.5.23.41$	-3	$u=-1908,\ v=3849,\ w=4124$
9433	$2^3.3^2.131$	5	$f'=-4086,\ f=-1014,\ z'=1075,$ $z=926,\ u=1891$
9437	$2^2.7.337$	2	$f=-830,\ u=-1756,\ v=-9$
9439	$2.3.11^2.13$	-7	$z=733,\ u'=-1590,\ u=2641,\ v=-4425$
9461	$2^2.5.11.43$	3	$f=1510,\ u=-4233,\ v=-4401,\ w=-1573$
9463	$2.3.19.83$	3	$z=607,\ u=682,\ v=-731$
9467	2.4733	2	$u=4$
9473	$2^8.37$	3	$f^{\mathrm{VI}}=1285,\ f^{\mathrm{V}}=2923,\ f^{\mathrm{IV}}=-717,\ f'''=2547,$ $f''=-1796,\ f'=-4677,\ f=1172,\ u=1300$
9479	$2.7.677$	-2	$u=3415,\ v=-2574$
9491	$2.5.13.73$	2	$u=3089,\ v=3155,\ w=-1726$
9497	$2^3.1187$	3	$f'=2799,\ f=-624,\ u=-2936$
9511	$2.3.5.317$	3	$z=3491,\ u=-2407,\ v=2583$
9521	$2^4.5.7.17$	3	$f''=-2812,\ f'=-4607,\ f=2140,$ $u=-1349,\ v=1653,\ w=-2189$
9533	$2^2.2383$	2	$f=-1977,\ u=16$
9539	$2.19.251$	2	$u=-2260,\ v=3442$
9547	$2.3.37.43$	2	$z=3268,\ u=3057,\ v=1468$
9551	$2.5^2.191$	-2	$u'=-305,\ u=4024,\ v=-3367$
9587	2.4793	2	$u=4$
9601	$2^7.3.5^2$	13	$f^{\mathrm{V}}=988,\ f^{\mathrm{IV}}=-3158,\ f'''=-2475,$ $f''=187,\ f'=-3435,\ f=-404,$ $z=-4207,\ u'=937,\ u=-4588$

p	$p-1$	g	Caractères
9613	$2^2.3^3.89$	2	$f=-3237,\ z''=-2387,\ z'=3540,$ $z=3086,\ u=-3739$
9619	$2.3.7.229$	2	$z=-4427,\ u=4289,\ v=-3995$
9623	$2.17.283$	-3	$u=-2067,\ v=-3189$
9629	$2^2.29.83$	2	$f=-3832,\ u=581,\ v=-4110$
9631	$2.3^2.5.107$	3	$z'=-1482,\ z=-1622,\ u=3947,\ v=-38$
9643	$2.3.1607$	2	$z=4596,\ u=64$
9649	$2^4.3^2.67$	7	$f''=3462,\ f'=1386,\ f=845,$ $z'=-1246,\ z=-3416,\ u=3042$
9661	$2^2.3.5.7.23$	2	$f=139,\ z=1653,\ u=-4360,\ v=-1387,\ w=4420$
9677	$2^2.41.59$	2	$f=-1338,\ u=4319,\ v=-758$
9679	$2.3.1613$	-2	$z=-2914,\ u=64$
9689	$2^3.7.173$	3	$f'=-3007,\ f=2212,\ u=2347,\ v=100$
9697	$2^5.3.101$	10	$f'''=2741,\ f''=-2094,\ f'=1792,$ $f=1557,\ z=-1992,\ u=2543$
9719	$2.43.113$	-3	$u=-1662,\ v=169$
9721	$2^3.3^5.5$	7	$f'=-3997,\ f=4406,\ z^{\text{IV}}=-949,\ z'''=-29,$ $z''=4774,\ z'=447,\ z=-1925,\ u=4264$
9733	$2^2.3.811$	2	$f=2709,\ z=-1551,\ u=4096$
9739	$2.3^2.541$	3	$z'=2761,\ z=-2769,\ u=3069$
9743	2.4871	-2	$u=4$
9749	$2^2.2437$	2	$f=-356,\ u=16$
9767	$2.19.257$	-2	$u=2534,\ v=599$
9769	$2^3.3.11.37$	13	$f'=1673,\ f=-4774,\ z=-262,$ $u=-1966,\ v=-729$
9781	$2^2.3.5.163$	6	$f=-1195,\ z=4307,\ u=2779,\ v=3057$
9787	$2.3.7.233$	3	$z=-3032,\ u=-2829,\ v=3587$
9791	$2.5.11.89$	-2	$u=3607,\ v=4227,\ w=3124$
9803	$2.13.377$	2	$u=2774,\ v=-2474$
9811	$2.3^2.5.109$	3	$z'=1536,\ z=-603,\ u=-2772,\ v=-4155$
9817	$2^3.3.409$	5	$f'=-1837,\ f=-2479,\ z=-956,\ u=-22$
9829	$2^2.3^3.7.13$	10	$f=-1304,\ z''=74,\ z'=2235,$ $z=-749,\ u=3981,\ v=3654$
9833	$2^3.1229$	3	$f'=-2008,\ f=534,\ u=-3272$
9839	2.4919	-2	$u=4$
9851	$2.5^2.197$	2	$u'=169,\ u=2234,\ v=-4351$

p	$p-1$	g	Caractères
9857	$2^7 . 7 . 11$	5	$f^V = 4745$, $f^{IV} = 1637$, $f''' = -1335$, $f'' = -1892$, $f' = 1573$, $f = 222$, $u = 2595$, $v = -2200$
9859	$2 . 3 . 31 . 53$	2	$z = -4751$, $u = -1250$, $v = 4192$
9871	$2 . 3 . 5 . 7 . 47$	-2	$z = 651$, $u = -3743$, $v = 1809$, $w = 760$
9883	$2 . 3^4 . 61$	2	$z''' = -180$, $z'' = -1030$, $z' = -3222$, $z = 2536$, $u = 4623$
9887	$2 . 4943$	-2	$u = 4$
9901	$2^2 . 3^2 . 5^2 . 11$	2	$f = -1000$, $z' = -4651$, $z = 99$, $u' = 4692$, $u = -2290$, $v = -443$
9907	$2 . 3 . 13 . 127$	2	$z = 3335$, $u = 4856$, $v = 3297$
9923	$2 . 11^2 . 41$	2	$u' = -1155$, $u = 1807$, $v = -1556$
9929	$2^3 . 17 . 73$	3	$f' = 1273$, $f = 2102$, $u = -3642$, $v = -1086$
9931	$2 . 3 . 5 . 331$	-5	$z = 4231$, $u = -1657$, $v = -4451$
9941	$2^2 . 5 . 7 . 71$	2	$f = 141$, $u = -3851$, $v = 116$, $w = -1792$
9949	$2^2 . 3 . 829$	2	$f = 2543$, $z = 3633$, $u = 4096$
9967	$2 . 3 . 11 . 151$	-2	$z = -458$, $u = -2286$, $v = -4640$
9973	$2^2 . 3^2 . 277$	11	$f = -2798$, $z' = 1783$, $z = 1569$, $u = -3536$

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES FONCTIONS DÉFINIES PAR DES SÉRIES DE DIRICHLET.

Par

MARCEL RIESZ

à Stockholm.

(Lettre à M. Mittag-Leffler.)

Je me permets de vous adresser un résumé sommaire des recherches que je vous avais communiquées dans mes lettres du 28 décembre 1909 et du 12 juin 1910.

Considérons une série de Dirichlet

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{1}$$

$$(0 \leq \lambda_n < \lambda_{n+1}; \ \lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty) \tag{2}$$

qui ait la droite de convergence $R(s) = d$, d désignant une quantité réelle, finie. Désignons par $f(s)$ la fonction analytique, représentée par la série dans le demi-plan $R(s) > d$. Comme nous apprend la théorie des séries entières, la droite $R(s) = d$, étant la droite de convergence de la série

$$f_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns},$$

il y a nécessairement des points singuliers de la fonction $f_1(s)$ sur cette droite. On sait que cela n'est plus vrai en général, quand les λ_n désignent des nombres quelconques (satisfaisant toujours à la condition (2)). P. e. la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} \tag{3}$$

a la droite de convergence $R(s) = 0$. Néanmoins, la fonction qu'elle représente dans le demi-plan $R(s) > 0$, est une fonction entière.

Nous sommes forcément conduits à conclure que dans ce cas et dans des cas pareils, c'est une singularité située à l'infini qui détruit la convergence au-delà de la droite de convergence.

Dans deux Notes des »Comptes Rendus» j'ai introduit une méthode de sommation (généralisation de la méthode des moyennes arithmétiques) que j'ai appelée méthode des *moyennes typiques* (5 juillet et 22 novembre 1909). Les expressions fournies par cette méthode convergent aussi ou dans le plan tout entier, ou dans un demi-plan, ou enfin elles divergent partout. C'est le second cas qui nous intéresse surtout. Le demi-plan de sommabilité peut être beaucoup plus étendu que le demi-plan de convergence, mais, pour la droite de sommabilité se présente le même fait qui se présentait pour la droite de convergence. *Elle ne contient pas nécessairement de point singulier sur sa partie finie.*[1]

Je vais montrer que par une généralisation convenable des méthodes fondées sur l'emploi de l'intégrale de Laplace-Abel, on arrive à des expressions limites qui n'ont aucun inconvénient à cet égard. Lorsque la fonction est entière, nos expressions limites la représentent dans tout le plan. Au cas contraire, *la frontière du domaine de convergence contient au moins un point singulier fini.* De plus, par votre artifice d'introduire dans les expressions un certain paramètre tendant vers zéro, *on obtient des expressions limites multiples qui convergent à l'intérieur de l'étoile principale de la fonction et divergent à son extérieur.* Du reste, *la notion d'étoile que vous avez introduite en Analyse, joue ici le même rôle fondamental que dans la théorie des séries entières.*

La recherche des singularités d'une fonction définie par une série de Taylor, commence par la détermination du rayon de convergence. Il y correspondrait, pour les séries de Dirichlet, la détermination de leur abscisse de convergence. Or, comme nous avons dit, la connaissance de cette abscisse et même celle des abscisses de sommabilité, ne nous apprend en général rien sur les singularités situées dans la partie finie du plan. Par contre, les résultats que je viens d'indiquer, nous fourniront immédiatement une méthode générale pour la recherche de ces singularités. Il me semble donc que les méthodes fondées sur l'intégrale de Laplace-Abel ont même une plus grande importance dans le cas général que dans le cas particulier des séries entières.

*

[1] Ce fait a été déjà signalé (à un autre point de vue) par M. Bohr qui appliquait les moyennes arithmétiques entre autres à la série (3).

Permettez-moi de rappeler brièvement les résultats sur les séries entières que je vais généraliser dans la suite.

Envisageons la série entière

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4}$$

qui ait le rayon de convergence fini $R \neq 0$, et formons la fonction

$$\Phi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lfloor n} x^n, \tag{5}$$

qui, en vertu de notre supposition $R \neq 0$, est une fonction entière en x. Du reste, cette fonction et l'intégrale qui va suivre, interviennent déjà dans des recherches de Laplace et dans celles d'Abel.

M. Borel a démontré que l'on a

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \Phi_1(\omega x)\, d\omega \tag{6}$$

dans un domaine qu'il appelait »*polygone de sommabilité*», *l'intégrale convergeant uniformément dans tout domaine fini, intérieur à celui-ci.*

M. Phragmén a établi à son tour que *l'intégrale ne peut converger à l'extérieur du domaine de* M. Borel, *ce domaine est* donc bien une »*étoile de convergence*» de l'expression (6) dans le sens que vous avez prêté à ce mot.

Le domaine, fixé par M. Borel, se définit de la manière suivante: Menons par chaque point singulier ξ de la fonction une droite, perpendiculaire au segment $(0, \xi)$. Les points du plan qui sont du même côté de chacune de ces droites que l'origine, constituent l'intérieur du domaine Borel.

On voit que ces points intérieurs x sont aussi caractérisés par le fait qu'on peut décrire autour de $\frac{x}{2}$ un cercle avec un rayon supérieur à $\left|\frac{x}{2}\right|$, tel que la fonction $F(x)$ soit régulière à son intérieur et sur sa périphérie.

Vous avez repris la question dans vos quatrième et cinquième Notes, et aussi dans votre conférence de Rome, *en démontrant que la généralisation de l'intégrale ci-dessus permet de représenter la fonction $F(x)$ dans toute son étoile principale.*

Formons la fonction entière

$$\Phi_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lfloor \alpha n} x^n; \qquad (0 < \alpha;\ \lfloor \alpha n = \Gamma(\alpha n + 1)). \tag{7}$$

Vous avez établi l'égalité

$$(8)\qquad F(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \Phi_\alpha(\omega x)\, d\,\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^\infty e^{-\omega}\, \Phi(\omega^\alpha x)\, d\,\omega,$$

les intégrales du second membre possédant une certaine étoile de convergence $B^{(\alpha)}$ et la convergence étant uniforme dans tout domaine fini, intérieur à cette étoile. Les étoiles $B^{(\alpha)}$ ont en outre la double propriété extrêmement remarquable qu'elles s'approchent indéfiniment de l'étoile principale de la fonction, quand α tend vers zéro, et du cercle de convergence de la série, quand α croît indéfiniment.

Enfin dans *votre conférence,* vous avez donné le résultat à la fois simple et élégant que voici:

On a uniformément, dans tout domaine fini, intérieur à l'étoile principale de la fonction, l'égalité:[1]

$$(9)\qquad F(x) = \lim_{\alpha=0}\left(a_0 + \frac{a_1}{\underline{|\alpha\,.\,1}}\,x + \frac{a_2}{\underline{|\alpha\,.\,2}}\,x^2 + \cdots + \frac{a_n}{\underline{|\alpha\,.\,n}}\,x^n + \cdots\right) = \lim_{\alpha=0} \Phi_\alpha(x).$$

Cela posé, revenons maintenant à l'étude des séries de Dirichlet. Posons

$$(10)\qquad e^{-s} = x,$$

$$(11)\qquad f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n s} = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{\lambda_n}.$$

Nous supposons de nouveau que notre série de Dirichlet converge dans un certain demi-plan.

Quant à la fonction $F(x)$, selon les formules (10) et (11), elle doit être étudiée (en général), sur *la surface de* Riemann de la fonction $\log x$. Dans un certain voisinage de l'origine, $F(x)$ est définie sur tous les feuillets par le développement ci-dessus. On forme ensuite votre étoile principale à l'aide des points singuliers qu'on rencontre, en formant le prolongement analytique de la fonction ainsi définie, le long des demi-droites issues de l'origine.

Envisageons maintenant le plan de la variable s. *Excluons de ce plan les demi-droites parallèles à l'axe réel négatif, allant des points singuliers de la fonction $f(s)$ à l'infini. Le domaine a, qui reste, est la transformée de votre étoile principale par la substitution $s = -\log x$*

La définition de l'étoile $B^{(\alpha)}$ sur la surface de Riemann est essentiellement

[1] En vertu d'un théorème de M. Borel, généralisé par M. Phragmén, l'étoile principale n'est pas nécessairement le domaine total de convergence de l'expressionlimite (9).

la même que celle que vous avez donnée pour le plan. Faisons parcourir à x_0 tous les points à l'intérieur de l'étoile A, pour lesquels la courbe

$$(12)\qquad \begin{gathered} R\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = 1 \\ -\alpha\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}\left(\frac{x_0}{x}\right) < \alpha\frac{\pi}{2} \end{gathered}$$

est située à l'intérieur de l'étoile A, et appelons $B^{(\alpha)}$ l'étoile auxiliaire, obtenue de cette manière.

En ce qui concerne le plan de la variable $s = \sigma + it$, considérons le contour défini par les relations

$$(13)\qquad \sigma = \alpha \log\left(\cos\frac{t}{\alpha}\right), \qquad \left(-\alpha\frac{\pi}{2} < t < \alpha\frac{\pi}{2}\right)$$

et le domaine qu'il renferme

$$(13')\qquad \sigma < \alpha \log\left(\cos\frac{t}{\alpha}\right), \qquad \left(-\alpha\frac{\pi}{2} < t < \alpha\frac{\pi}{2}\right).$$

Le contour passe par l'origine, il est symétrique par rapport à l'axe réel négatif et il a deux arcs allant à l'infini. Il s'approche indéfiniment de l'axe réel négatif, lorsque α tend vers zéro.

Soit ξ un point singulier quelconque de la fonction $f(s)$, et excluons du plan tous les points s tels que le point ayant pour affixe la différence $s - \xi$, tombe à l'intérieur du domaine (13'). Le contour limitant le domaine exclu est évidemment congruent au contour (13) et passe par le point ξ. En reprenant cette opération pour tous les points singuliers de la fonction $f(s)$, désignons par $b^{(\alpha)}$ le domaine restant. Nos formules (12) et (13) montrent que le domaine $b^{(\alpha)}$ dérive de l'étoile $B^{(\alpha)}$ au moyen de la substitution $s = -\log x$. Lorsque α tend vers zéro, le domaine $b^{(\alpha)}$ s'approche indéfiniment du domaine a.

Écrivons encore

$$(14)\qquad \Phi_\alpha(x) = \frac{a_0}{\underline{|\alpha\lambda_0}}x^{\lambda_0} + \frac{a_1}{\underline{|\alpha\lambda_1}}x^{\lambda_1} + \cdots + \frac{a_n}{\underline{|\alpha\lambda_n}}x^{\lambda_n} + \cdots;\quad \underline{|\alpha\lambda_n} = \Gamma(\alpha\lambda_n + 1)$$

et

$$(15)\qquad \varphi_\alpha(s) = \frac{a_0}{\underline{|\alpha\lambda_0}}e^{-\lambda_0 s} + \frac{a_1}{\underline{|\alpha\lambda_1}}e^{-\lambda_1 s} + \cdots + \frac{a_n}{\underline{|\alpha\lambda_n}}e^{-\lambda_n s} + \cdots$$

On peut facilement établir que *la série $\varphi_\alpha(s)$ converge partout* et qu'elle *représente* par conséquent une *fonction entière,* lorsque la série $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ a un domaine de convergence (plan entier ou demi-plan).

Ces préliminaires posés, je vais démontrer les théorèmes suivants:

I. *Le point s étant intérieur au domaine $b^{(\alpha)}$ appartenant à notre fonction f, on a l'égalité*

$$(16) \qquad f(s) = F(x) = \int_0^\infty e^{-\omega} \Phi_\alpha(\omega^\alpha x)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^v} \varphi_\alpha(s - \alpha v)\, e^v\, dv,$$

la seconde intégrale convergeant uniformément pour les points s d'un domaine fini[1] *quelconque, intérieur à $b^{(\alpha)}$ et divergeant à l'extérieur de $b^{(\alpha)}$. La première intégrale a les mêmes propriétés par rapport à l'étoile $B^{(\alpha)}$.*

II. *On a uniformément dans toute région finie*[1] *intérieure à l'étoile principale A, respectivement dans la région correspondante du domaine a*

$$(17) \qquad F(x) = \lim_{\alpha=0}\left(\frac{a_0}{\underline{|\alpha\lambda_0}} x^{\lambda_0} + \frac{a_1}{\underline{|\alpha\lambda_1}} x^{\lambda_1} + \cdots + \frac{a_n}{\underline{|\alpha\lambda_n}} x^{\lambda_n} + \cdots\right) = \lim_{\alpha=0} \Phi_\alpha(x),$$

$$(18) \qquad f(s) = \lim_{\alpha=0}\left(\frac{a_0}{\underline{|\alpha\lambda_0}} e^{-\lambda_0 s} + \frac{a_1}{\underline{|\alpha\lambda_1}} e^{-\lambda_1 s} + \cdots + \frac{a_n}{\underline{|\alpha\lambda_n}} e^{-\lambda_n s} + \cdots\right) = \lim_{\alpha=0} \varphi_\alpha(s).$$

Démonstration. La démonstration de nos énoncés se fonde essentiellement sur un corollaire immédiat du théorème connu que voici:

Supposons que *la série de* DIRICHLET

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

converge au point s_0. Il en résulte qu'elle *converge uniformément dans le domaine infini*

$$-\vartheta < \operatorname{Arg}(s - s_0) \leq \vartheta; \quad 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Nous n'avons besoin de ce théorème que dans la forme plus restreinte qui suit.

Sous la condition indiquée, *la série converge uniformément dans toute demi-bande infinie, définie par les inégalités:*

$$R(s - s_0) \geq \delta > 0$$

et

$$|I(s)| < r$$

r désignant un nombre fini, positif quelconque.

[1] La marche de notre démonstration va montrer qu'on peut aussi admettre certains domaines infinis.

Pour simplifier la démonstration de (16), supposons d'abord $a = 1$ et considérons l'intégrale

$$\int_0^{\omega} e^{-\omega}\, \Phi_1(\omega x)\, d\omega.$$

Les raisonnements qu'on trouve dans les travaux de M. Borel et dans votre quatrième Note, reposent sur le fait que la différence

$$F(x) - \int_0^{\omega} e^{-\omega}\, \Phi_1(\omega x)\, d\omega \tag{20}$$

est égale à une intégrale complexe curviligne (dépendant de ω), dans laquelle intervient la fonction $F(z)$, le chemin d'intégration entourant l'origine et le point x.

Or, dans notre cas actuel, *l'origine est en général un point très singulier de la fonction*

$$F(z) = \sum_{n=0}' a_n z^{\lambda_n}$$

et les théorèmes de Cauchy n'étant plus valables à son voisinage, la différence ci-dessus ne peut se mettre sous la forme mentionnée.

Toutefois, la difficulté n'est qu'apparente. En effet, grâce au théorème cité sur la convergence uniforme des séries de Dirichlet, nous pouvons montrer facilement que la différence ci-dessus s'exprime par la même intégrale curviligne que dans le cas des séries entières, si l'on applique un chemin d'intégration convenable qui passe par l'origine, au lieu de l'entourer.

Décrivons en effet autour de l'origine comme centre un cercle quelconque et traçons deux rayons de ce cercle qui forment avec l'axe réel positif les angles $(1 + \varepsilon)\frac{\pi}{2}$ et $-(1 + \varepsilon)\frac{\pi}{2}$; $(0 < \varepsilon \leq 1)$. Désignons par U la courbe fermée, composée de ces deux rayons et du plus grand des arcs qu'ils interceptent sur la circonférence. On obtient de la formule de Hankel par un simple changement de variable la formule suivante:

$$\frac{1}{\underline{|\gamma}} = \frac{1}{2\pi i}\int_U e^{u}\, u^{-\gamma}\, \frac{du}{u} \tag{21}$$

l'intégrale étant prise dans le sens positif.

Cette formule que vous avez déjà utilisée dans la théorie du prolongement analytique, me sert aussi de point de départ.

En effet, x étant un point donné quelconque, on peut choisir le rayon r du cercle considéré assez petit, pour que rx soit intérieur au cercle de convergence du développement

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}.$$

Dans cette hypothèse, la série

$$F(xu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (xu)^{\lambda_n} \tag{22}$$

est d'après le théorème cité[1] sur les séries de Dirichlet, uniformément convergente pour les points u de la courbe U. On peut par conséquent intégrer cette série terme à terme le long de cette courbe et écrire

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_U e^{\frac{1}{u}} F(xu)\frac{du}{u} \tag{23}$$

ou par un changement de variable

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{U_x} e^{\frac{x}{z}} F(z)\frac{dz}{z}. \tag{24}$$

U_x désignant la courbe qu'on obtient en multipliant la courbe U par x. Les deux demi-droites dont les segments font partie de la courbe U_x, forment avec le segment $(0, x)$ les angles $\pm(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$. $(0 < \varepsilon \leq 1)$.

Soit maintenant s un point intérieur au domaine $b^{(1)}$ correspondant à la fonction $f(s)$ et posons de nouveau

$$x = e^{-s}.$$

Dans notre condition, x sera intérieur à l'étoile $B^{(1)}$, on pourrait par conséquent, dans le cas des séries entières, remplacer la courbe U_x par un cercle de centre $\frac{x}{2}$ et de rayon supérieur à $\frac{|x|}{2}$, dans lequel la fonction $F(z)$ serait encore régulière. Nous avons déjà dit que ce cercle ne peut nous servir dans le cas général (le

[1] En effet, si l'on écrit (22) sous la forme $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$, les points s qui correspondent aux points xu, sont tous situés dans une demi-bande (de largeur $(1+\varepsilon)\pi \leq 2\pi$).

point $z = 0$ étant aussi singulier) que dans une forme modifiée. Reprenons à cet effet les deux vecteurs, issus de l'origine, formant avec le segment $(0, x)$ les angles $\pm(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$, et désignons par D et D' leurs points d'intersection avec la circonférence ci-dessus, décrite autour de $\frac{x}{2}$. La courbe H qui va nous servir, sera composée des segments entre l'origine et les points D et D' et du plus grand arc de la circonférence. Comme nous avons supposé que le point x était à l'intérieur de l'étoile $B^{(1)}$, nous pouvons choisir le rayon de la circonférence assez rapproché de $\frac{|x|}{2}$ pour qu'il n'y ait de points singuliers ni sur la courbe H, ni à son intérieur (sauf peut-être le point $z = 0$). On peut par conséquent appliquer le théorème de CAUCHY au domaine entre les courbes U_x et H et écrire

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_H e^{\frac{x}{z}} F(z)\frac{dz}{z} \tag{25}$$

aussi bien que

$$\Phi_1(\omega x) = \frac{1}{2\pi i}\int_H e^{\frac{\omega x}{z}} F(z)\frac{dz}{z}. \tag{26}$$

Il s'ensuit en intervertissant l'ordre des intégrations:

$$\int_0^\omega e^{-\omega}\Phi_1(\omega x)\,d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_H e^{\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)}\frac{F(z)}{\frac{x}{z}-1}\frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi i}\int_H \frac{F(z)}{\frac{x}{z}-1}\frac{dz}{z}$$

c'est à dire

$$F(x) - \int_0^\omega e^{-\omega}\Phi_1(\omega x)\,d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_H e^{\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)}\frac{F(z)}{z-x}dz. \tag{27}$$

D'autre part, on a sur la courbe H

$$R\left(\frac{x}{z}-1\right) < \mu < 0 \tag{28}$$

μ désignant une quantité facile à calculer. Par suite

$$\left|e^{\left(\frac{x}{z}-1\right)}\right| < e^{\mu} < 1 \tag{29}$$

d'où il résulte immédiatement que la dernière intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{\omega}$, c'est à dire

$$(30) \qquad F(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega}\, \Phi_1(\omega x)\, d\omega$$

et

$$(31) \qquad f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^{v}}\, \varphi_1(s - v)\, e^{v}\, dv.$$

On voit aussi que la première intégrale converge uniformément dans tout domaine fini, intérieur à l'étoile $B^{(1)}$ et situé sur un nombre fini de feuillets de notre surface de Riemann. Nos remarques préliminaires montrent suffisamment que la convergence est uniforme même dans des domaines tels que les points à l'infini du domaine correspondant du plan des s tombent dans un angle

$$(32) \qquad -\vartheta \leq \operatorname{Arg} s \leq \vartheta; \left[0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}\right].$$

Le même raisonnement que M. Phragmén appliquait aux séries entières, prouve aussi dans notre cas général que les expressions (30) et (31) divergent nécessairement à l'extérieur des domaines correspondants $B^{(1)}$ et $b^{(1)}$.

Soit maintenant a un nombre positif quelconque. La démonstration que vous avez donnée pour vos théorèmes, repose sur les propriétés fondamentales de vos fonctions $E_a(x)$ dont la découverte a inauguré tant de recherches nouvelles.

Ici, je vais suivre une voie directe qui peut avoir un certain intérêt aussi au point de vue des séries entières.

La formule de Hankel nous donne de nouveau la relation

$$(33) \qquad \Phi_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lfloor a\lambda_n} x^{\lambda_n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma}^{1} e^{u} F(x u^{a}) \frac{du}{u}.$$

qu'on trouve dans votre cinquième Note (pour les séries entières.)

Supposons maintenant que le point s soit intérieur au domaine $b^{(a)}$. On peut alors trouver un contour $H^{(a)}$ passant par l'origine, renfermant le point $x = e^{-s}$ tel que $F(z)$ n'ait de point singulier ni sur ce contour, ni à son intérieur, et de plus que l'on ait

$$(34) \qquad R\left(\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{a}} - 1\right) \leq 0,$$

pour tous les points z du contour $H^{(a)}$.[1]

Puis, on a par un simple changement de variable

$$(35) \qquad \Phi_a(\omega^a x) = \frac{1}{2\alpha\pi i}\int_{H^{(a)}} e^{\omega\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{a}}} F(z)\,\frac{dz}{z}$$

et

$$(36) \qquad \int_0^\omega e^{-\omega}\Phi(\omega^a x)\,d\omega = \frac{1}{\alpha 2\pi i}\int_{H^{(a)}} e^{\omega\left(\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{a}}-1\right)} \frac{F(z)}{\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{a}}-1}\,\frac{dz}{z} - \frac{1}{\alpha 2\pi i}\int_{H^{(a)}} \frac{F(z)}{\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{a}}-1}\,\frac{dz}{z}.$$

Le point $z = x$ étant un pôle simple, avec le résidu $-\alpha x$, de la fonction

$$\frac{1}{\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{a}}-1}$$

la dernière intégrale est égale à $F(x)$. On peut donc écrire

$$(37) \qquad F(x) - \int_0^\omega e^{-\omega}\Phi_a(\omega^a x)\,d\omega = -\frac{1}{\alpha 2\pi i}\int_{H^{(a)}} e^{\omega\left(\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{a}}-1\right)} \frac{F(z)}{\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{a}}-1}\,\frac{dz}{z}.$$

L'inégalité (34) montre très nettement que le second membre tend vers zéro avec α, de sorte que l'on a

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-\omega}\Phi(\omega^a x)\,d\omega.$$

Les remarques que nous avons faites dans le cas $\alpha = 1$, s'appliquent sans difficulté à la convergence uniforme (dans les domaines caractérisés, intérieurs à $B^{(a)}$), et à la divergence (aux points extérieurs à $B^{(a)}$) de notre expression limite.

On voit que l'intégrale

$$(38) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega}\left|\Phi_a(\omega^a x)\right|d\omega$$

[1] Cette inégalité montre qu'on peut choisir la courbe $H^{(a)}$ de plus en plus aplatie et la faire tendre vers le segment $(0, x)$ lorsque a tend vers zéro.

converge aussi uniformément dans les domaines caractérisés, fait déjà observé par M. Borel pour le cas des séries entières et $\alpha = 1$.

Ces résultats nous permettent de *déterminer* par un calcul simple *les sommets de votre étoile principale* appartenant à la fonction $F(x)$.

Considérons une demi-droite issue de l'origine, formant avec l'axe réel positif l'angle t (cet angle pouvant varier entre $-\infty$ et $+\infty$). Déterminons le point d'intersection x_α de cette demi-droite et de la frontière de $B^{(\alpha)}$. Posons

$$x = r e^{it}, \quad x_\alpha = r_\alpha e^{it}$$

et

$$(39) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega} \left| \Phi_\alpha(\omega^\alpha x) \right| d\omega = \int_0^\infty e^{-\omega} \left| \Phi_\alpha(\omega^\alpha r e^{it}) \right| d\omega = \frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^\infty e^{-\frac{\omega}{r^{\frac{1}{\alpha}}}} \left| \Phi_\alpha(\omega^\alpha e^{it}) \right| d\omega.$$

La valeur $\dfrac{1}{r_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}$ est égale à l'abscisse de convergence de la dernière intégrale. Cette abscisse se calcule moyennant une formule de M. Landau, analogue à la formule de M. Cahen pour l'abscisse de convergence d'une série de Dirichlet. On a

$$(40) \qquad \frac{1}{r_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} = \overline{\lim_{\omega=\infty}} \frac{\log \int_0^\omega \left| \Phi_\alpha(v^\alpha e^{it}) \right| dv}{\omega}$$

$$(41) \qquad \frac{1}{r_\alpha} = \overline{\lim_{\omega=\infty}} \left(\frac{\log \int_0^\omega \left| \Phi_\alpha(v^\alpha e^{it}) \right| dv}{\omega} \right)^\alpha$$

Le sommet $x_0 = R e^{it}$ de l'étoile principale, situé sur la demi-droite considérée, est évidemment donné par la formule

$$(42) \qquad \frac{1}{R} = \lim_{\alpha=0} \overline{\lim_{\omega=\infty}} \left(\frac{\log \int_0^\omega \left| \Phi_\alpha(v^\alpha e^{it}) \right| dv}{\omega} \right)^\alpha.$$

En reprenant un raisonnement de M. Borel,[1] donné au sujet des séries entières (dans le cas $\alpha = 1$), on arrive à une formule plus simple.

En effet les formules (34) et (35) montrent très nettement que pour tout point $x = r e^{it}$ intérieur à l'étoile $B^{(\alpha)}$, on a

[1] Borel: Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1901 (pp. 138—141).

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\omega}|\Phi_a(\omega^a x)| = \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega}|\Phi(\omega^a r e^{it})| = 0$$

donc on a aussi

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\left(\frac{\omega}{r}\right)^{\frac{1}{a}}}|\Phi_a(\omega e^{it})| = 0$$

et par conséquent à partir d'une certaine valeur de ω, on peut écrire

$$|\Phi_a(\omega e^{it})| < e^{\left(\frac{\omega}{r}\right)^{\frac{1}{a}}}.$$

Il en résulte

$$(43) \qquad \frac{\log|\Phi_a(\omega e^{it})|}{\omega^{\frac{1}{a}}} < \frac{1}{r^{\frac{1}{a}}}.$$

D'autre part, si le point $x = re^{it}$ est extérieur à l'étoile $B^{(a)}$, l'expression

$$e^{-\omega}|\Phi_a(\omega^a r e^{it})|$$

ne reste pas bornée, car en cas contraire, l'intégrale (16) convergerait en tout point

$$x = r' e^{it}$$

tel que

$$r' < r,$$

c'est à dire $x = re^{it}$ ne serait pas un point *extérieur* à l'étoile $B^{(a)}$.

La quantité r_a a donc la double propriété que pour $r < r_a$, on a à partir d'une certaine valeur de ω l'inégalité (43) et que pour $r > r_a$, on peut trouver des valeurs de ω croissant indéfiniment, pour lesquelles l'inégalité n'est pas remplie. Cela s'exprime par la formule

$$(44) \qquad \frac{1}{r_a^{\frac{1}{a}}} = \lim_{\omega=\infty} \frac{\log|\Phi_a(\omega e^{it})|}{\omega^{\frac{1}{a}}},$$

ou

$$\frac{1}{r_a} = \lim_{\omega=\infty} \frac{\log^a|\Phi_a(\omega e^{it})|}{\omega}.$$

On en conclut

$$(45) \qquad \frac{1}{R} = \lim_{a=0}\lim_{\omega=\infty} \frac{\log^a|\Phi_a(\omega e^{it})|}{\omega}.$$

Une transformation simple permet de déterminer les points singuliers correspondants de la fonction $f(s)$. Envisageons en effet la droite, parallèle à l'axe réel, avec l'ordonnée t. L'abscisse σ du premier point singulier qu'on rencontre, en prolongeant la fonction $f(s)$ à gauche, le long de cette droite, est donnée par la formule

$$\sigma = \lim_{a=0} \lim_{\omega=\infty} (a \log \log |\varphi_a(-\omega + it)| - \omega). \tag{46}$$

Remarquons que (44) et par conséquent les formules qui en découlent, peuvent être en défaut, quand r_a est infini. Dans ce cas en effet, la formule (44) peut donner au lieu de la valeur zéro, une valeur négative. Mais quand x_a est finie, elle fournit une valeur positive bien déterminée et inversement, si elle fournit une valeur positive, cette valeur est égale à $\frac{1}{r_a^{\frac{1}{a}}}$.

Ayant fini la démonstration et l'application du théorème I, il ne me reste qu'à démontrer le théorème II, c. à d. la relation

$$f(s) = \lim_{a=0} \left(\frac{a_0}{\underline{|a\lambda_0}} e^{-\lambda_0 s} + \frac{a_1}{\underline{|a\lambda_1}} e^{-\lambda_1 s} + \cdots + \frac{a_n}{\underline{|a\lambda_n}} e^{-\lambda_n s} + \cdots \right) = \lim_{a=0} \varphi_a(s), \tag{18}$$

ou la relation équivalente

$$F(x) = \lim_{a=0} \Phi_a(x) \tag{17}$$

$x = e^{-s}$ désignant un point intérieur[1] à l'étoile principale de la fonction F.

Considérons un contour fermé Γ quelconque, passant par l'origine et composé au voisinage de ce point de deux segments de droites, formant de nouveau avec l'axe réel positif les angles $\pm(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$, $(0 < \varepsilon \leq 1)$. Le point x étant supposé intérieur à l'étoile principale, on peut choisir a assez petit pour que les points xu^a soient aussi tous intérieurs à l'étoile, u désignant un point quelconque de la courbe Γ. De cette façon, la fonction $F(xu^a)$ sera régulière en u sur la courbe Γ et à son intérieur (excepté évidemment $u = 0$). On a par conséquent

$$\Phi_a(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{u^{1}} F(xu^a) \frac{du}{u}, \tag{47}$$

[1] Pendant l'impression de cette lettre, M. Mittag-Leffler m'apprit que la démonstration qui suit, est essentiellement la même que celle qu'il avait donnée pour les séries entières, dans ses cours de 1905—06. Il avait aussi montré que le théorème reste valable en tout sommet ξ de l'étoile pour lequel il existe un angle de sommet ξ, renfermant le vecteur $(0, \xi)$ où la fonction est continue. Le lecteur verra sans difficulté que cette extension subsiste aussi dans notre cas général. (M. R.)

d'ailleurs, il est évident que

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\frac{1}{u}} F(x)\frac{du}{u},$$

par suite

$$(48) \qquad F(x) - \Phi_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}[F(x) - F(x u^\alpha)]\, e^{\frac{1}{u}}\frac{du}{u}.$$

Désignons par P et P' deux points de la courbe Γ, tous les deux étant situés au voisinage de l'origine, le premier au-dessus de l'axe réel et le second au-dessous de cet axe. L'égalité ci-dessus peut s'écrire

$$(49) \quad F(x) - \Phi_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{P}^{P'}[F(x) - F(x u^\alpha)]\, e^{\frac{1}{u}}\frac{du}{u} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{P'}^{P}[F(x) - F(x u^\alpha)]\, e^{\frac{1}{u}}\frac{du}{u}.$$

Le premier chemin d'intégration, au voisinage de l'origine, devient arbitrairement petit, lorsque P et P' s'approchent suffisamment de l'origine, donc la valeur absolue de la première intégrale peut devenir $< \eta$, indépendamment de α, quelque petite que soit la quantité positive η. Quant aux points u qui forment le second chemin d'intégration, on pourra, après avoir fixé P et P', choisir α assez petit afin qu'on ait pour tous ces points:

$$|x - x u^\alpha| < \delta$$

et

$$|F(x) - F(x u^\alpha)| < \delta',$$

les quantités positives δ et δ' étant arbitrairement petites. Donc pour α assez petit, on aura aussi

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{P'}^{P}[F(x) - F(x u^\alpha)]\, e^{\frac{1}{u}}\frac{du}{u}\right| < \eta,$$

c'est à dire

$$|F(x) - \Phi_\alpha(x)| < 2\eta,$$

ou

$$\lim_{\alpha=0}\Phi_\alpha(x) = F(x).$$

Notre raisonnement montre aussi que la convergence est uniforme dans tout domaine fini, intérieur à l'étoile principale et situé sur un nombre fini de feuillets

de notre surface de RIEMANN. On peut, aussi pour cette expression limite, admettre des domaines tels que les points à l'infini du domaine correspondant du plan des s tombent dans un angle tel que (32).

Notons encore la formule intéressante:

$$\Phi_a(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{u^{\frac{1}{a}}} F(xu^a)\frac{du}{u} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{u^{\frac{1}{a}}}\frac{du}{u}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{F(z)}{z-xu^a}dz =$$

$$(50)\qquad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} F(z)\,dz\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{u^{\frac{1}{a}}}\frac{1}{z-xu^a}\frac{du}{u} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} F(z)\frac{dz}{z}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{u^{\frac{1}{a}}}\frac{1}{1-\frac{x}{z}u^a}\frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} F(z)\,E_a\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z},$$

où E_a désigne votre fonction entière bien connue, et Γ' désigne une courbe intérieure à l'étoile principale qui passe par l'origine et renferme la courbe Γ'', décrite par xu^a, lorsque u décrit la courbe Γ. On peut tirer facilement de cette formule une démonstration indirecte du théorème que je viens de démontrer.

* * *

J'ai terminé l'indication de mes recherches sur la représentation du prolongement analytique des séries de DIRICHLET. Permettez-moi encore de reprendre quelques remarques, publiées déjà en partie, qui rentrent plutôt dans l'ordre d'idées du problème d'ABEL.

Ces remarques, concernant la théorie des séries entières, se rattachent à votre conférence de Rome, où vous avez le premier étudié le problème. Elles nous fourniront des indications utiles aussi pour les séries de DIRICHLET.

Parmi les expressions limites diverses que vous avez étudiées dans vos travaux, *les séries de polynomes de votre troisième Note sont les plus efficaces au point de vue du problème* d'ABEL.[1]

D'abord j'ai étudié le problème opposé. J'ai examiné, si l'on peut trouver des fonctions telles que votre série de polynomes diverge dans un sommet de l'étoile correspondante quoique la fonction satisfasse en ce sommet à certaines conditions de continuité et de régularité.

Ainsi, j'ai construit *une fonction, continue dans la figure génératrice* $V^{(a)}$ *(contour y compris) appartenant au point x qui, de plus, était régulière dans toute cette*

[1] M. RIESZ: Sur un problème d'ABEL. (Extrait d'une lettre à M. MITTAG-LEFFLER, 24 mai 1910) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. T. XXX. 1910 (Séance de 10 juillet 1910).

figure, sauf au point x et pourtant la série de polynomes correspondante

$$G_0(x/a) + G_1(x/a) + \cdots + G_n(x/a) + \cdots$$

était divergente.

Je suis arrivé à construire cet exemple et d'autres exemples de divergence, concernant d'autres expressions-limites, en développant un *principe très fécond, dû à* M. Fejér qu'il vient d'appliquer dans une série de travaux fort remarquables.

Toutefois, j'ai pu vous communiquer dans ma lettre du 28 décembre 1909 qu'il est facile de transformer votre série de polynomes en une autre qui a la même étoile de convergence, mais qui converge aussi aux sommets de la nature indiquée ci-dessus. Ce sont les moyennes arithmétiques des sommes partielles de votre série de polynomes que j'avais en vue. En effet, en appliquant un théorème bien connu de M. Fejér, on montre immédiatement que ces expressions convergent même dans des conditions plus générales.[1] Cependant, j'ai trouvé aussitôt que, *grâce à une propriété heureuse de votre figure génératrice, on peut résoudre la question complètement sans former les moyennes arithmétiques, mais en faisant diminuer le paramètre a* dont dépend l'expression limite. C'est le résultat que j'avais publié dans la lettre que je vous avais adressée, sans faire aucune allusion aux moyennes arithmétiques de vos séries de polynomes.

Dans la même lettre j'avais aussi remarqué que les expressions limites fondées sur l'intégrale de Laplace-Abel ne sont pas aussi efficaces que vos séries de polynomes, quand il s'agit de déterminer la valeur limite de la fonction aux sommets, où elle est continue, la continuité étant toujours définie à l'aide de la figure génératrice correspondante. Néanmoins, on peut (comme je vous avais communiqué dans ma lettre du 28 décembre 1909) déduire aussi dans ce cas des expressions limites nouvelles, bien utilisables en ces points qui se forment d'une manière analogue aux moyennes arithmétiques. Le procédé consiste dans la formule:

$$\lim_{\Omega=\infty} \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} d\omega \int_0^{\omega} e^{-v}\, \Phi_a(v^a x)\, dv. \tag{51}$$

D'ailleurs, les avantages qu'on peut tirer pour les séries entières de l'application des figures génératrices, formant au point $x = 1$ un angle qui diminue

[1] Ce résultat a été aussi trouvé par M. Dienes qui l'avait publié avec d'autres résultats concernant les moyennes arithmétiques de vos séries de polynomes, ces autres résultats étant aussi des conséquences immédiates de vos théorèmes et de ceux de M. Fejér. (Comptes rendus, 25 juillet 1910.) Je dois observer que le raisonnement de ma lettre insérée aux Rendiconti fait voir que dans les énoncés de M. Dienes, l'introduction des moyennes arithmétiques pourrait être évitée.

avec α, suggèrent l'idée d'appliquer de telles figures aussi pour les séries de la forme $\Sigma a_n x^{\lambda_n}$. Pourtant, cette figure devant passer par l'origine à cause du caractère singulier de ce point, les expressions limites ainsi obtenues seront nécessairement, comme l'expression (16), des expressions limites doubles.

* * *

Tous les résultats que je viens d'indiquer dans cet exposé rapide, s'étendent facilement aux intégrales de la forme

$$F(x) = \int_0^\infty a(t)\, x^t\, dt = f(s) = \int_0^\infty a(t)\, e^{-ts}\, dt \tag{52}$$

en posant

$$\Phi_\alpha(x) = \int_0^\infty \frac{a(t)}{\lfloor \alpha t} x^t\, dt = \varphi_\alpha(s) = \int_0^\infty \frac{a(t)}{\lfloor \alpha t} e^{-ts}\, dt. \tag{53}$$

D'ailleurs, les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$ et les intégrales $\int_0^\infty a(t)\, x^t\, dt$ se ramènent facilement à la forme commune

$$\log x \int_0^\infty A(t)\, x^t\, dt.$$

Grâce à cette circonstance, les résultats ci-dessus sont bien utilisables pour la représentation d'une fonction analytique quelconque, au voisinage d'une classe étendue de points de non-uniformité.

Évidemment, l'expression (16) peut converger aussi dans des cas où la série de Dirichlet, ou l'intégrale $\int_0^\infty a(t)\, e^{-ts}\, dt$ correspondante ne converge nulle part.

Györ (Hongrie), 6 octobre 1910.

Marcel Riesz.

ÜBER EINIGE SUMMEN, DIE VON DEN NULLSTELLEN DER RIEMANN'SCHEN ZETAFUNKTION ABHÄNGEN.

VON

EDMUND LANDAU

IN GÖTTINGEN.

Einleitung.

Es bezeichne $\psi(x)$ die bekannte[1] TSCHEBYSCHEF'sche Funktion

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p,$$

wo p^m alle Primzahlpotenzen bis x durchläuft, und es sei, wie üblich,

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p.$$

Dann ist die Relation

$$\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x})$$

unmittelbar aus TSCHEBYSCHEF's Ergebnissen abzulesen, so dass alle Abschätzungen von $\psi(x)$, deren Restglied schlechter als $O(\sqrt{x})$ ist, auch für $\vartheta(x)$ gelten. Es werde

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{für solche } x > 1, \text{ die keine Primzahlpotenz sind,} \\ \psi(x) - \frac{1}{2}\log p_0 & \text{für } x = p_0^{m_0} \end{cases}$$

gesetzt; Herr VON MANGOLDT[2] hat als erster bewiesen, dass für alle $x > 1$

[1] Über Bezeichnungen sowie Beweise des Bekannten und historische Angaben vergl. mein *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* [Leipzig und Berlin (Teubner), 1909

[2] 2 im Literaturverzeichnis des Handbuchs. Vergl. z. B. Handbuch, S. 365.

$$\Psi(x) = x - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho} \tag{1}$$

ist, wo ϱ die nicht reellen (d. h. dem Streifen $0 \leq \Re(s) \leq 1$ angehörigen) Nullstellen $\varrho = \alpha + \beta i$ von $\zeta(s)$, nach wachsenden $|\beta|$ geordnet, durchläuft. Wegen der Unstetigkeit von $\Psi(x)$ an den Stellen p^m kann die Reihe

$$\sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho} \qquad (x > 1) \tag{2}$$

in keinem ein p^m enthaltenden Intervall gleichmässig konvergieren. Herr VON KOCH[1] warf nun die Frage auf, ob nicht trotzdem $\Psi(x)$ mit angebbarer nicht trivialer Annäherung durch einen Ausdruck dargestellt werden könne, der von ähnlicher Bauart ist als die rechte Seite von (1), aber nur endlich viele ϱ (nämlich alle, deren Ordinate absolut kleiner ist wie eine passend zu wählende Funktion von x) enthält. Er beantwortete diese Frage bejahend, indem er dem allgemeinen Glied $\frac{x^\varrho}{\varrho}$ als approximationserzeugenden Faktor einen Ausdruck $\Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{z}\right)$ hinzufügte, in dem z eine Funktion von x ist. Der springende Punkt ist, dass die Reihe

$$\sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{z}\right),$$

wo $x > 0$ und $z > 0$ ist, absolut konvergiert.[2] Herrn von KOCH's prägnantestes Resultat[3] lautet: Wenn k irgend eine Konstante ist, die dem Intervall $1 < k < \frac{\pi}{2}$ angehört, und wenn μ eine Konstante ist, die dem Intervall $0 < \mu < 1$ angehört, so ist[4]

[1] *Contribution à la théorie des nombres premiers* [Acta Mathematica, Bd. XXXIII (1910), S. 293—320]. Diese vom 31. 8. 1908 datierte Arbeit wurde, wie auf den Bogen vermerkt ist, am 9. 11. 1909 gedruckt, und mein Buch konnte daher keinen Einfluss mehr ausüben. In diesem Buch (S. 364—368) habe ich u. a. zum ersten Mal bewiesen, dass die Reihe (2) in jedem von den p^m freien Intervall $x_0 < x < x_1$, wo $x_0 > 1$ ist, gleichmässig konvergiert.

[2] Dies ist ein Analogon zu der Tatsache, dass in Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN's berühmten Primzahlarbeiten statt der schwer zu behandelnden Reihe (2) die absolut konvergente Reihe $\sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho(\varrho - 1)}$ eine ausschlaggebende Rolle spielt.

[3] Wenn auch dies das Hauptergebnis seiner interessanten Arbeit ist, so möchte ich doch nicht unerwähnt lassen, dass er mit denselben Methoden auch andere ältere und neue Resultate beweist, von denen in meiner vorliegenden Abhandlung nicht die Rede ist.

[4] Es sei hierbei erwähnt, dass Herr VON KOCH bei der Herleitung von (3) ganz am Schluss ein Versehen macht, welches sich, wie er mir auf meine Anfrage hin freundlichst mitteilt, durch etwas veränderte Fassung der früheren Rechnungen beseitigen lässt. Herr VON KOCH

$$\psi(x) = x - \sum_{|\beta| < x^\mu} \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\mu \varrho \log x}{k x^\mu}\right) + O(x^{1-\mu} \log^2 x). \tag{3}$$

Also Herr VON KOCH hat die von ihm gestellte Frage durch den Beweis der Relation (3) beantwortet; speziell für $\mu = \frac{1}{2}$ besagt (3)

$$\psi(x) = x - \sum_{|\beta| < \sqrt{x}} \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho \log x}{2k\sqrt{x}}\right) + O(\sqrt{x} \log^2 x). \tag{4}$$

Meine im Handbuch ausführlich dargestellten Methoden gestatten, auf anderem als dem von Herrn VON KOCH eingeschlagenen Wege seine Frage zu bejahen und zwar — das ist das Neue, welches ich (nachdem in den §§ 1—2 Hilfssätze vorangeschickt sind) im § 3 der vorliegenden Arbeit auseinandersetzen will — ohne Einführung eines approximationserzeugenden Faktors. Ich werde ganz glatt in der VON KOCH'schen Formel (3) den Γ-Faktor weglassen können und für $0 < \mu < 1$, auch für $\mu = 1$

$$\psi(x) = x - \sum_{|\beta| < x^\mu} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O(x^{1-\mu} \log^2 x) \tag{5}$$

beweisen. Speziell für $\mu = \frac{1}{2}$ besagt dies

$$\psi(x) = x - \sum_{|\beta| < \sqrt{x}} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O(\sqrt{x} \log^2 x). \tag{6}$$

Die auf die ϱ mit reellem Teil $\alpha = \frac{1}{2}$ bezügliche Summe

hatte nämlich (3) zunächst (S. 319) nur bei wachsendem x der Form »ganze Zahl $+ \frac{1}{2}$« bewiesen. Um dies Ergebnis auf stetig wachsendes x auszudehnen, weist er darauf hin, dass der Sprung von $\psi(x)$ bei den Unstetigkeitsstellen x nur $O(\log x)$ ist; daraus allein folgt es aber nicht, da auch die Änderung der rechten Seite beim Übergang von x zu $[x] + \frac{1}{2}$ diskutiert werden müsste. Diese Diskussion würde allerdings im Falle $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ (nicht aber im Falle $\frac{1}{2} < \mu < 1$) leicht zu dem Ergebnis führen, dass der Fehler gegen das Schlussglied $O(x^{1-\mu} \log^2 x)$ vernachlässigt werden kann. Herr VON KOCH hat mir nun freundlichst mitgeteilt, dass man durch folgende kleine Modifikation seines Weges für alle erforderlichen μ (d. h. für $0 < \mu < 1$) sofort zu (3) bei stetig wachsenden x gelangt: »Man füge den Formeln (36), (37) und (41) rechts das Glied $O(\log x)$ hinzu; dann ist aus der Definition (1) auf S. 296 und der in N° 8 (S. 315—320) angewandten Methode ersichtlich, dass diese drei Formeln für stetig wachsendes x giltig bleiben«.

Der Leser meiner vorliegenden Abhandlung braucht die Arbeit von Herrn VON KOCH übrigens nicht zu kennen.

$$\sum_{\substack{|\beta| < x^\mu \\ \alpha = \frac{1}{2}}} \frac{x^\varrho}{\varrho}$$

ist

$$O\left(\sum_{0<\beta<x^\mu} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\beta}\right) = O\left(x^{\frac{1}{2}} \sum_{0<\beta<x^\mu} \frac{\mathrm{I}}{\beta}\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x\right),$$

da ja bekanntlich[1]

$$\sum_{0<\beta<y} \frac{\mathrm{I}}{\beta} = O(\log^2 y)$$

ist. (6) lässt sich also — parallel zu einer von Herrn VON KOCH angegebenen Transformation seiner Formel (4) — auch so schreiben:

$$(7) \qquad \psi(x) = x - \sum_{\substack{|\beta| < \sqrt{x} \\ \alpha \gtrless \frac{1}{2}}} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O\left(\sqrt{x} \log^2 x\right).$$

(7) (gleichwie die von Herrn VON KOCH aus (4) abgeleitete entsprechende Formel) setzt die zuerst von Herrn VON KOCH vor 10 Jahren[2] bewiesene Tatsache in Evidenz, dass unter der Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung $\alpha = \frac{\mathrm{I}}{2}$ die Relation

$$\psi(x) = x + O\left(\sqrt{x} \log^2 x\right)$$

besteht.

Mein Resultat (5) lässt sich wegen

$$\sum_{p^m \leq x-1} \log p = \psi(x) + O(\log x)$$

auch so schreiben:

$$(8) \qquad \sum_{p^m \leq x-1} \log p = x - \sum_{|\beta| < x^\mu} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O\left(x^{1-\mu} \log^2 x\right)$$

für $0 < \mu < \mathrm{I}$. In den §§ 4—5 werde ich nun folgende Verallgemeinerung von (8) beweisen. ϱ^ν bedeute für $0 < \nu < \mathrm{I}$ den in der von 0 bis $-\infty$ aufgeschnittenen

[1] Vergl. z. B. S. 388 des Handbuchs.

[2] 6.

ϱ-Ebene eindeutigen Wert, der für $\varrho > 0$ positiv ist; mit anderen Worten: es sei $\varrho^\nu = e^{\nu \log \varrho}$, wo der Koeffizient von i in $\log \varrho$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Dann ist für $0 < \nu \leqq 1$, $0 < \mu \leqq 1$

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{p^m \leqq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) = x - \sum_{|\beta| < x^\mu} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} + O(x^{1-\mu\nu} \log^2 x).$$

Dies enthält offenbar (8) als Spezialfall $\nu = 1$; in den §§ 4—5 darf ich mich also auf $0 < \nu < 1$ beschränken.

Erster Teil.

§ 1.

Hilfssatz 1: *Es sei* $\eta > 0$, $T > 0$. *Dann ist bei gerader Bahn*

$$\left| \int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{y^s}{s}\, ds - 2\pi i \right| \leqq \frac{2}{T} \frac{y^\eta}{\log y} \quad \textit{für} \qquad y > 1,$$

$$\left| \int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{y^s}{s}\, ds \right| \leqq \frac{2}{T} \frac{y^\eta}{-\log y} \qquad \textit{für}\ 0 < y < 1.$$

Beweis: Vergl. z. B. S. 342—346 des Handbuchs.

Hilfssatz 2: *Es sei* $1 < \eta < 2$, $T > 0$, $0 < y < 2$. *Dann ist bei gerader Bahn*

$$\left| \int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{y^s}{s}\, ds \right| < 10\,\eta.$$

Beweis:[1] 1) Es sei $0 < y < 1$. Die Anwendung des Cauchy'schen Satzes auf die Strecke $\eta - Ti$ bis $\eta + Ti$ und den über ihr als Sehne nach rechts beschriebenen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt 0, also dem Radius $\sqrt{\eta^2 + T^2} = R$ ergibt

[1] Natürlich ist der Hilfssatz 2 nicht neu. Auch der obige Beweis ist nichts als genau die Anwendung des Cauchy'schen Satzes, welche Herrn Schnee zu einem weitergehenden Hilfssatz auf S. 12—13 seiner Abhandlung geführt hat: *Über die Koeffizientendarstellungsformel in der Theorie der Dirichletschen Reihen* [Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1910, S. 1—42]. Mir genügt der obige Wortlaut, und ich habe kein Interesse daran, die absolute Konstante rechts möglichst klein herauszubekommen.

$$\left|\int\limits_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{y^s}{s}\,ds\right|<\pi R\frac{y^\eta}{R}$$
$$\leqq\pi.$$

2) Es sei $y>1$. Dann ergibt die Anwendung des CAUCHY'schen Satzes auf die Strecke $\eta-Ti$ bis $\eta+Ti$ und den nach links über ihr beschriebenen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt 0

$$\left|\int\limits_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{y^s}{s}\,ds-2\pi i\right|<2\pi R\frac{y^\eta}{R}$$
$$<8\pi,$$

$$\left|\int\limits_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{y^s}{s}\,ds\right|<10\pi.$$

Hilfssatz 3: *Es sei für alle ganzen* $n\geqq 2$

(9) $$|a_n|<c\log n,$$

also — was auch a_1 *sei —*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

für $\sigma>1$ *konvergent. Es sei ferner für* $1<\eta<2$

$$(\eta-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^\eta}$$

beschränkt.[1] *Dann ist für* $1<\eta<2$, $T>0$, $x>2$

$$\left|\int\limits_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{x^s}{s}f(s)\,ds-2\pi i\sum_{n=1}^{x}a_n\right|<c_1\left(\frac{x^\eta}{T(\eta-1)}+\frac{x\log^2 x}{T}+\log x\right),$$

wo c_1 *von* η, T *und* x *unabhängig*[2] *ist.*

[1] Aus der vorangegangenen Voraussetzung (9) folgt nur die Beschränktheit von $(\eta-1)^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^\eta}$.

[2] c_1 darf also nur von den a_n abhängen. Dasselbe gilt in der Folge von $c_2, c_3, \cdots$

Beweis: Es ist für $1 < \eta < 2$, $T > 0$, $x > 2$

$$\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} f(s)\,ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{x} a_n = \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\,ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{x-1} a_n - 2\pi i\, a_{[x]}$$

$$= \sum_{n=1}^{x-1} a_n \left(\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}\,ds - 2\pi i \right) + \sum_{n=x}^{x+1} a_n \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}\,ds + \sum_{n=x+2}^{\infty} a_n \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}\,ds - 2\pi i\, a_{[x]}.$$

Nun werde in der ersten und dritten Summe, d. h. für $n \leq [x] - 1$ und $n \geq [x] + 2$ der Hilfssatz 1 angewendet, dagegen in der zweiten Summe, d. h. für $n = [x]$ und $n = [x] + 1$ der Hilfssatz 2; letzterer gilt gerade, da $\frac{x}{[x]} < \frac{3}{2} < 2$ und $\frac{x}{[x]+1} < 1 < 2$ ist. Dadurch erhält man, alsbald für $n = [x]$ und $n = [x] + 1$ die Voraussetzung (9) benutzend,

$$\left| \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} f(s)\,ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{x} a_n \right| \leq \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{x-1} |a_n| \frac{x^\eta}{n^\eta \log \frac{x}{n}} + 10\pi \left(|a_{[x]}| + |a_{[x]+1}| \right)$$

$$+ \frac{2}{T} \sum_{n=x+2}^{\infty} |a_n| \frac{x^\eta}{n^\eta \log \frac{n}{x}} + 2\pi |a_{[x]}|$$

$$(10) \qquad < \frac{2 x^\eta}{T} \left(\sum_{n=1}^{x-1} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{x}{n}} + \sum_{n=x+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{n}{x}} \right) + c_2 \log x.$$

Hierin ist nach den gemachten Voraussetzungen

$$\sum_{n=1}^{x-1} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{x}{n}} = \sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{x}{n}} + \sum_{n=\left[\frac{x}{2}\right]+1}^{[x]-1} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{x}{n}}$$

$$< \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]} \frac{|a_n|}{n^\eta} + \sum_{n=\left[\frac{x}{2}\right]+1}^{[x]-1} \frac{c \log n}{n^\eta \log \frac{x}{n}}$$

$$\frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta} + \frac{c \log x}{\left(\frac{x}{2}\right)^\eta} \sum_{n=\left[\frac{x}{2}\right]+1}^{[x]-1} \frac{1}{\log \frac{[x]}{n}}$$

$$< \frac{c_3}{\eta - 1} + \frac{c_4 \log x}{x^\eta} \sum_{v=1}^{[x]-\left[\frac{x}{2}\right]-1} \frac{1}{\log \frac{[x]}{[x]-v}}$$

$$\leq \frac{c_3}{\eta - 1} + \frac{c_4 \log x}{x^\eta} \sum_{v=1}^{[x]-1} \frac{1}{-\log\left(1 - \frac{v}{[x]}\right)},$$

also (wegen der für $0 < z < 1$ giltigen Ungleichung $-\log(1-z) > z$)

$$\leq \frac{c_3}{\eta - 1} + \frac{c_4 \log x}{x^\eta} \sum_{v=1}^{[x]-1} \frac{1}{\frac{v}{[x]}}$$

$$\frac{c_3}{\eta - 1} + \frac{c_4 \log x}{x^\eta} [x] \sum_{v=1}^{[x]-1} \frac{1}{v}$$

(11) $$< \frac{c_3}{\eta - 1} + c_5 \frac{\log^2 x}{x^{\eta-1}};$$

ferner ist

$$\sum_{n=x+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{n}{x}} = \sum_{n=[x]+2}^{[2x]} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{n}{x}} + \sum_{n=[2x]+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{n}{x}}$$

$$< \sum_{n=[x]+2}^{[2x]} \frac{c \log n}{n^\eta \log \frac{n}{x}} + \frac{1}{\log 2} \sum_{n=[2x]+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta}$$

$$< \frac{c \log (2x)}{x^\eta} \sum_{n=[x]+2}^{[2x]} \frac{1}{\log \frac{n}{[x]+1}} + \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta}$$

$$< \frac{c_6 \log x}{x^\eta} \sum_{v=1}^{[2x]-[x]-1} \frac{1}{\log \frac{[x]+1+v}{[x]+1}} + \frac{c_3}{\eta - 1}$$

$$< \frac{c_6 \log x}{x^\eta} \sum_{v=1}^{[x]} \frac{1}{\log\left(1 + \frac{v}{[x]+1}\right)} + \frac{c_3}{\eta - 1},$$

also $\left(\text{wegen der für } 0 < z < 1 \text{ giltigen Ungleichung } \log(1+z) > \frac{z}{2}\right)$

$$< \frac{2 c_6 \log x}{x^\eta} \sum_{v=1}^{[x]} \frac{1}{\frac{v}{[x]+1}} + \frac{c_3}{\eta - 1}$$

$$= \frac{2 c_6 \log x}{x^\eta} ([x]+1) \sum_{v=1}^{[x]} \frac{1}{v} + \frac{c_3}{\eta - 1}$$

$$(12) \qquad < c_7 \frac{\log^2 x}{x^{\eta-1}} + \frac{c_3}{\eta - 1}.$$

(11) und (12) geben, in (10) eingesetzt,

$$\left| \int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{x^s}{s} f(s)\, ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{x} a_n \right| < \frac{2 x^\eta}{T} \left(\frac{c_8}{\eta - 1} + \frac{c_9 \log^2 x}{x^{\eta-1}} \right) + c_2 \log x,$$

also, wie behauptet,

$$< c_1 \left(\frac{x^\eta}{T(\eta - 1)} + \frac{x \log^2 x}{T} + \log x \right).$$

§ 2.

Es durchlaufe ϱ in beliebiger Reihenfolge die nicht reellen, d. h. dem Streifen $0 \leq \alpha \leq 1$ angehörigen[1] Nullstellen $\alpha + \beta i$ der Riemann'schen Zetafunktion. Dann ist bekanntlich[2]

$$(13) \qquad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho} \right),$$

wo b eine Konstante ist. Ferner ist bekanntlich[3] für jedes $T > 2$, dem keine Nullstelle mit T als Ordinate entspricht, falls $x > 1$ und $\eta > 1$ ist,

[1] Übrigens ist bekanntlich $0 < \alpha < 1$.

[2] Vergl. z. B. Handbuch, S. 316.

[3] Die Formel (14) ergibt sich nämlich sofort durch Anwendung des Cauchy'schen Satzes auf das Rechteck mit den Ecken $\eta \pm Ti$, $z \pm Ti$, wo z eine negative ungerade Zahl ist, und Grenzübergang $z = -\infty$ auf Grund des Hilfssatzes der S. 336. Dies ist in dem auf S. 349—351 Durchgeführten als Spezialfall $r = 0$ enthalten; denn, dass die Zahl T gerade eine der dort mit T_g bezeichneten Zahlen ist, war bis zu jener Stelle noch nicht benutzt.

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \dfrac{x^s}{s}\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = -x + \dfrac{1}{2}\log\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) + \log(2\pi) + \displaystyle\sum_{|\gamma|<T}\dfrac{x^\varrho}{\varrho} \\ \qquad\qquad -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty-Ti}^{\eta-Ti}\dfrac{x^s}{s}\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty+Ti}^{\eta+Ti}\dfrac{x^s}{s}\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds. \end{cases}$$

Zur weiteren Ausbeutung dieser Identität setze ich folgende vier Ungleichungen als bekannt voraus:

Erstens[1] ist für $\sigma \leq -1$, $t \geq 2$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < C_1 \log|s|,$$

also[2]

$$\left|\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < C_1\frac{\log|s|}{|s|}$$

$$(15)\qquad < C_2\frac{\log t}{t}.$$

Zweitens[3] ist für $-1 \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 2$

$$(16)\qquad \left|\sum_{|\gamma-t|\geq 1}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)\right| < C_3 \log t;$$

die Summe bedeutet, dass ϱ alle komplexen Nullstellen durchläuft, die nicht innerhalb des Streifens $t-1 < \gamma < t+1$ gelegen sind.

Drittens[4] genügt die Anzahl der ϱ in $t-1 < \gamma < t+1$ für $t \geq 2$ der Ungleichung

$$(17)\qquad \text{Anzahl} < C_4 \log t.$$

Viertens[5] ist für $-1 < \sigma < 2$, $t \geq 2$

$$(18)\qquad \left|\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\right| < C_5 \log t.$$

[1] Vergl. z. B. Handbuch, S. 336. Jetzt bezeichnen im Text $C_1, C_2, \ldots$ absolute Konstanten.

[2] In der Tat nimmt für $y \geq e$ die Funktion $\frac{\log y}{y}$ mit wachsendem y ab, und für $\sigma < -1$, $t > e$ ist $|s| > t > e$; für $\sigma < -1$, $2 \leq t < e$ ist $\frac{\log|s|}{|s|}$ und $1 : \frac{\log t}{t}$ beschränkt.

[3] Vergl. z. B. Handbuch, S. 339.

[4] Vergl. z. B. Handbuch, S. 337.

[5] Vergl. z. B. Handbuch, S. 334.

§ 3.

Satz 1: *Es gibt eine absolute Konstante K derart, dass für $x \geqq 3, T \geqq 3$*

$$\left|\psi(x) - x + \sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho}\right| \leqq K\left(x \log^2 x \frac{1}{T} + x \frac{\log T}{T} + \log x\right)$$

ist.

Beweis: Nach (15) ist für $x > 1$, $T \geqq 2$

$$\left|\int_{-\infty+Ti}^{-1+Ti} \frac{x^s}{s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds\right| < C_2 \frac{\log T}{T} \int_{-\infty}^{-1} x^\sigma d\sigma$$

(19)
$$= \frac{C_2 \log T}{T x \log x}.$$

Nach (13), (16), (17) und (18) ist für wurzelfreies $t \geqq 2$ und $-1 \leqq \sigma \leqq 2$

(20)
$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_{|\beta - t| < 1} \frac{1}{s - \varrho}\right| < C_6 \log t;$$

für wurzelfreies $T \geqq 2$, $x > 1$, $1 < \eta < 2$ ist daher

$$\left|\int_{-1+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds\right| < \left|\int_{-1+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} \sum_{|\beta - T| < 1} \frac{1}{s - \varrho} ds\right| + \frac{C_6 \log T}{T} \int_{-1}^{\eta} x^\sigma d\sigma$$

$$< \sum_{|\beta - T| < 1} \left|\int_{-1+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} \frac{ds}{s - \varrho}\right| + \frac{C_6 \log T}{T} \int_{-\infty}^{\eta} x^\sigma d\sigma$$

(21)
$$= \sum_{|\beta - T| < 1} \left|\int_{-1+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} \frac{ds}{s - \varrho}\right| + \frac{C_6 \log T}{T} \frac{x^\eta}{\log x}.$$

Es werde nun von $-1 + Ti$ bis $\eta + Ti$ in jedem einzelnen Summengliede der Weg nach folgender Vorschrift deformiert. Wenn β dem Intervall $T - 1 < \beta < T$ angehört, werde um $\alpha + Ti$ (d. h. die senkrechte Projektion von ϱ auf den Integrationsweg) die halbkreisförmige Ausbuchtung $\alpha - (\eta - 1) + Ti$ bis $\alpha + (\eta - 1) + Ti$ nach oben gemacht; wenn $T < \beta < T + 1$ ist, werde diese halbkreisförmige Ausbuchtung nach unten gemacht. Dann ist unterwegs durchweg $|s - \varrho| > \eta - 1$, also der Beitrag des Halbkreises

$$< \pi(\eta - 1)\frac{x^{a+(\eta-1)}}{T-1}\frac{1}{\eta-1}$$

$$\leq \pi\frac{x^{1+(\eta-1)}}{T-1}$$

$$< 2\pi\frac{x^\eta}{T},$$

der Beitrag der horizontalen Wegteile

$$< \frac{1}{T(\eta-1)}\int_{-1}^{\eta} x^\sigma\, d\sigma$$

$$< \frac{x^\eta}{T(\eta-1)\log x}.$$

Nach (21) ist also, da die Anzahl der Glieder in der Summe rechts wegen (17) kleiner als $C_4 \log T$ ist,

$$\left|\int_{-1+Ti}^{\eta+Ti}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds\right| < C_4\log T\left(2\pi\frac{x^\eta}{T} + \frac{x^\eta}{T(\eta-1)\log x}\right) + \frac{C_6\log T}{T}\frac{x^\eta}{\log x}$$

$$< C_7\frac{x^\eta\log T}{T}\left(1+\frac{1}{(\eta-1)\log x}\right).$$

Dies und (19) ergeben zusammen für wurzelfreies $T \geq 2$, $x > 1$, $1 < \eta < 2$

(22) $$\left|\int_{-\infty+Ti}^{\eta+Ti}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds\right| < C_8\frac{x^\eta\log T}{T}\left(1+\frac{1}{(\eta-1)\log x}\right).$$

Das ist eine Abschätzung des letzten Integrals in (14) und gilt aus Symmetriegründen auch für das vorletzte Integral ebenda. (14) und (22) liefern also für wurzelfreies $T \geq 2$, $x > 1$, $1 < \eta < 2$

(23) $$\begin{cases}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds + x - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) - \log(2\pi) - \sum_{|\beta|<T}\frac{x^\varrho}{\varrho}\right| \\ \qquad < \frac{1}{\pi}C_8\frac{x^\eta\log T}{T}\left(1+\frac{1}{(\eta-1)\log x}\right).\end{cases}$$

Nach dem Hilfssatz 3, wenn er auf

$$f(s) = -\sum_{p,\,m} \frac{\log p}{p^{ms}} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

angewendet[1] wird, ist nun für $T > 0$, $x > 2$, $1 < \eta < 2$

$$(24) \qquad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{x^s}{s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds + \psi(x) \right| < C_9 \left(\frac{x^\eta}{T(\eta - 1)} + \frac{x \log^2 x}{T} + \log x \right).$$

Aus (23) und (24) folgt für $x > 2$, wurzelfreies $T \geqq 2$, $1 < \eta < 2$

$$(25) \qquad \begin{cases} \left| \psi(x) - x + \sum\limits_{|\beta| < T} \dfrac{x^\varrho}{\varrho} \right| \\ \qquad < C_{10} \left(x^\eta \dfrac{\log T}{T} + \dfrac{x^\eta}{(\eta - 1)\log x} \dfrac{\log T}{T} + \dfrac{x^\eta}{\eta - 1} \dfrac{1}{T} + x \log^2 x \dfrac{1}{T} + \log x \right). \end{cases}$$

Die linke Seite von (25) hängt von η gar nicht ab. Ich verfüge zur Erzielung einer möglichst günstigen Abschätzung über η so, dass ich $x \geqq 3$ annehme und $\eta = 1 + \frac{1}{\log x}$ setze, was wirklich zwischen 1 und 2 liegt. Dadurch erhalte ich für $x \geqq 3$ nebst wurzelfreiem $T > 2$

$$(26) \qquad \left| \psi(x) - x + \sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho} \right| \leqq C_{11} \left(x \log^2 x \frac{1}{T} + x \frac{\log T}{T} + \log x \right).$$

Jetzt lasse ich auch zu, dass die Ordinate T Nullstellen enthält. Wegen

$$\sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho} = \lim_{\delta = 0} \sum_{|\beta| < T - \delta} \frac{x^\varrho}{\varrho}$$

(wo das positive δ zu Null abnimmt) ist klar, dass (26) für $x > 3$ und alle $T > 2$ bestehen bleibt.

Damit ist der Satz 1 bewiesen.

Folgerung: Bisher waren x und T ganz unabhängig. Es bezeichne nun $T = T(x)$ irgend eine Funktion von x, die von einem x an > 3 ist. Dann besagt der Satz 1

$$\psi(x) = x - \sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T} \right) + O\left(\frac{x \log T}{T} \right) + O(\log x).$$

[1] Der Hilfssatz 3 ist anwendbar, weil $|a_n| \leqq \log n$ und $\lim\limits_{\eta = 1} (\eta - 1) \sum\limits_{p,\,m} \frac{\log p}{p^{m\eta}} = 1$ ist.

Speziell für $T = x^{\mu}$, wo $0 < \mu \leq 1$ ist, ergibt sich

$$\psi(x) = x - \sum_{|\beta| < x^{\mu}} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} + O(x^{1-\mu} \log^2 x),$$

womit (5), das Hauptziel dieser Abhandlung, erreicht ist und damit auch die in der Einleitung angegebenen Konsequenzen (6) und (7) daraus.

Zweiter Teil.

§ 4.

Jetzt sei durchweg $0 < \nu < 1$, und es bedeute s^{ν} den in der von 0 bis $-\infty$ aufgeschnittenen Ebene eindeutigen Zweig, der für $s > 0$ positiv ist.

Hilfssatz 4: *Es sei* $\eta > 0$, $T > 0$. *Dann ist bei gerader Bahn*

$$\left| \int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{y^s}{s^{\nu}} ds - 2\pi i \frac{\log^{\nu-1} y}{\Gamma(\nu)} \right| \leq \frac{2}{T^{\nu}} \frac{y^{\eta}}{\log y} \qquad \textit{für} \qquad y > 1,$$

$$\left| \int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{y^s}{s^{\nu}} ds \right| \leq \frac{2}{T^{\nu}} \frac{y^{\eta}}{-\log y} \qquad \textit{für}\ 0 < y < 1.$$

Beweis: Es ist für alle $s \neq 0$, auch auf beiden Ufern des Schnittes

$$\left| \frac{y^s}{s^{\nu}} \right| = \frac{y^{\sigma}}{e^{\nu \Re \log s}}$$

$$= \frac{y^{\sigma}}{e^{\nu \log |s|}}$$

(27) $$= \frac{y^{\sigma}}{|s|^{\nu}},$$

also für $\sigma < -1$ und $\sigma > 1$

(28) $$\left| \frac{y^s}{s^{\nu}} \right| \leq y^{\sigma}.$$

1) Es sei $y > 1$. Dann wähle ich ein $z < 0$ und wende den Cauchy'schen Satz auf das Rechteck mit den Ecken $\eta \pm Ti$, $z \pm Ti$ an, welches von z bis 0 aufgeschnitten ist, so dass beide Ufer dieses Schnittes in den Integrationsweg eingeschaltet werden. Dann ergiebt sich

$$-\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} = \int_{\eta+Ti}^{z+Ti} + \int_{z+Ti}^{z} + \int_{z}^{0} + \int_{0}^{z} + \int_{z}^{z-Ti} + \int_{z-Ti}^{\eta-Ti}$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6,$$

wo alle Wege geradlinig sind und in I_3 am oberen, in I_4 am unteren Ufer des Schnittes integriert wird. Natürlich darf in $s = 0$ hinein integriert werden.

Aus (28) folgt, dass jedes dieser 6 Integrale für $z = -\infty$ einen Limes hat, davon I_2 und I_5 den Limes 0. Das liefert

$$-\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} = \int_{\eta+Ti}^{-\infty+Ti} + \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{-\infty} + \int_{-\infty-Ti}^{\eta-Ti}$$
$$= I_7 + I_8 + I_9 + I_{10}.$$

Hierin ist nach (27)

$$|I_7| \leq \frac{1}{T^\nu} \int_{-\infty}^{\eta} y^\sigma \, d\sigma$$
$$= \frac{1}{T^\nu} \frac{y^\eta}{\log y},$$

ebenso aus Symmetriegründen

$$|I_{10}| \leq \frac{1}{T^\nu} \frac{y^\eta}{\log y}.$$

Ferner ist am oberen Ufer des Schnittes

$$\frac{1}{s^\nu} = e^{-\nu(\log(-\sigma) + \pi i)}$$
$$= (-\sigma)^{-\nu} e^{-\nu \pi i},$$

am unteren Ufer

$$\frac{1}{s^\nu} = (-\sigma)^{-\nu} e^{\nu \pi i};$$

daher ist

$$I_8 + I_9 = \int_{-\infty}^{0} y^\sigma (-\sigma)^{-\nu} (e^{-\nu \pi i} - e^{\nu \pi i}) \, d\sigma$$

$$= -2 i \sin(\pi \nu) \int_{0}^{\infty} y^{-u} u^{-\nu} \, du$$

$$= -2i\sin(\pi\nu)\int_0^\infty e^{-u\log y}\,u^{-\nu}\,du$$

$$= -2i\sin(\pi\nu)\log^{\nu-1}y\int_0^\infty e^{-v}\,v^{-\nu}\,dv$$

$$= -2i\log^{\nu-1}y\,\sin(\pi\nu)\,\Gamma(1-\nu)$$

$$= -2\pi i\,\frac{\log^{\nu-1}y}{\Gamma(\nu)}.$$

Daher kommt heraus

$$\left|\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{y^s}{s^\nu}\,ds-2\pi i\,\frac{\log^{\nu-1}y}{\Gamma(\nu)}\right|\leq\frac{2}{T^\nu}\,\frac{y^\eta}{\log y},$$

wie behauptet.

2) Es sei $0 < y < 1$. Dann ist in der für $z > 0$ giltigen Gleichung

$$-\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}=\int_{\eta+Ti}^{z+Ti}+\int_{z+Ti}^{z-Ti}+\int_{z-Ti}^{\eta-Ti}$$

nach (28) der Limes jedes der drei Integrale rechts für $z=\infty$ vorhanden und 0 beim zweiten. Daher ist

$$-\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}=\int_{\eta+Ti}^{\infty+Ti}+\int_{\infty-Ti}^{\eta-Ti},$$

also nach (27)

$$\left|\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{y^s}{s^\nu}\,ds\right|\leq\frac{1}{T^\nu}\int_\eta^\infty y^\sigma\,d\sigma+\frac{1}{T^\nu}\int_\eta^\infty y^\sigma\,d\sigma$$

$$=\frac{2}{T^\nu}\,\frac{y^\eta}{-\log y}.$$

Hilfssatz 5: *Für* $1 < \eta < 2$, $T > 0$, $0 < y < 2$ *ist*

$$\left|\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{y^s}{s^\nu}\,ds\right|<\frac{8}{1-\nu}\,T^{1-\nu}.$$

Beweis: Es ist auf dem Wege

$$|y^s| \quad y^\eta$$
$$< 4,$$

also

$$\left| \int\limits_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{y^s}{s^\nu} ds \right| < 4 \int\limits_{-T}^{T} \frac{dt}{|t|^\nu}$$
$$= 8 \int\limits_{0}^{T} \frac{dt}{t^\nu}$$
$$= \frac{8}{1 - \nu} T^{1-\nu}.$$

Hilfssatz 6: *Es sei für alle ganzen* $n \geqq 2$

(9) $$|a_n| < c \log n,$$

also — was auch a_1 *sei —*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für $\sigma > 1$ *konvergent. Es sei ferner für* $1 < \eta < 2$

$$(\eta - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta}$$

beschränkt. Dann ist für $1 < \eta < 2$, $T > 0$, $x > 2$

$$\left| \int\limits_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{x^s}{s^\nu} f(s) ds - \frac{2\pi i}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=1}^{x-1} a_n \log^{\nu-1} \left(\frac{x}{n}\right) \right| < b_1 \left(\frac{x^\eta}{T^\nu (\eta - 1)} + \frac{x \log^2 x}{T^\nu} + T^{1-\nu} \log x \right),$$

wo b_1 *von* η, T *und* x *unabhängig ist (aber von den* a_n *und* ν *abhängt).*

Beweis: Es ist für $1 < \eta < 2$, $T > 0$, $x > 2$

$$\int\limits_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{x^s}{s^\nu} f(s) ds - \frac{2\pi i}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=1}^{x-1} a_n \log^{\nu-1} \left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{x-1} a_n \left(\int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^\nu} ds - \frac{2\pi i}{\Gamma(\nu)} \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right) \right) + \sum_{n=x}^{x+1} a_n \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^\nu} ds + \sum_{n=x+2}^{\infty} a_n \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^\nu} ds.$$

Es werde für $n \leqq [x] - 1$ und $n \geqq [x] + 2$ der Hilfssatz 4 angewendet, für $n = [x]$ und $n = [x] + 1$ der Hilfssatz 5. Dadurch kommt heraus:

$$(29) \begin{cases} \left| \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s^\nu} f(s)\, ds - \frac{2\pi i}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=1}^{x-1} a_n \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leqq \frac{2}{T^\nu} \sum_{n=1}^{x-1} |a_n| \frac{x^\eta}{n^\eta \log \frac{x}{n}} \\ \qquad + \frac{8\, T^{1-\nu}}{1-\nu} \left(|a_{[x]}| + |a_{[x]+1}| \right) + \frac{2}{T^\nu} \sum_{n=x+2}^{\infty} |a_n| \frac{x^\eta}{n^\eta \log \frac{n}{x}}. \end{cases}$$

Nun war beim Beweise des Hilfssatzes 3 festgestellt, dass

$$\sum_{n=1}^{x-1} |a_n| \frac{x^\eta}{n^\eta \log \frac{x}{n}} + \sum_{n=x+2}^{\infty} |a_n| \frac{x^\eta}{n^\eta \log \frac{n}{x}} < b_2 \left(\frac{x^\eta}{\eta - 1} + x \log^2 x \right)$$

ist. Also ist die rechte Seite von (29)

$$< \frac{b_1}{T^\nu} \left(\frac{x^\eta}{\eta - 1} + x \log^2 x + T \log x \right),$$

womit der Hilfssatz 6 bewiesen ist.

Hilfssatz[1] **7:** *Es sei q irgend eine feste positive Konstante. Dann ist für $\sigma \leqq -1$, $t \geqq q$*

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < D_1 \log |s|.$$

Beweis: Bekanntlich[2] ist

$$\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = \log(2\pi) + \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{s\pi}{2} - \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

[1] Ich beweise dies wörtlich so, wie man die in § 2 benutzte Relation

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < C_1 \log |s|$$

für $\sigma \leqq -1$, $t > 2$ zu beweisen pflegt.

[2] Vergl. z. B. Handbuch, S. 336.

Hierin ist für $t \leq -q$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{s\pi}{2}\right| = \left|-i\,\frac{e^{s\pi i}-1}{e^{s\pi i}+1}\right|$$

$$\leq \frac{e^{-\pi t}+1}{e^{-\pi t}-1}$$

$$\leq \frac{e^{\pi q}+1}{e^{\pi q}-1}$$

$$= D_2$$

und für $\sigma \geq 2$ bekanntlich[1]

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| < D_3 \log|s|;$$

also ist für $\sigma \geq 2$, $t \leq -q$

$$\left|\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}\right| < \log(2\pi) + \frac{\pi}{2} D_2 + D_3 \log|s| - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}$$

$$< D_4 \log|s|,$$

folglich für $\sigma < -1$, $t > q$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < D_4 \log|1-s|$$

$$< D_4 \log(D_5|s|)$$

$$< D_6 + D_4 \log|s|$$

$$< D_7 \log|s|.$$

§ 5.

Satz 2: *Es gibt eine nur von r abhängige Konstante b derart, dass für [illegible] T [illegible];*

$$\left|\frac{1}{\Gamma(r)}\sum_{p^m \leq x-1} \log p \log^{r-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) - x + \sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho^r}\right| < b\left(x\log^2 x\,\frac{1}{T^r} + x\,\frac{\log T}{T^r} + T^{1-r}\log x\right)$$

ist.

[1] Vergl. z. B. Handbuch, S. 331

Beweis: Ich wähle eine absolute Konstante[1] q derart, dass $0 < q < 2$ und q kleiner als die kleinste positive Ordinate β eines ϱ ist. Da ich mir ν und q fest denke, dürfen alle in der Folge fortlaufend numerierten Konstanten von ν und q abhängen.

Es sei $T \geq 2$ und T von allen β verschieden. Es sei $x > 0$. Ich wende den Cauchy'schen Satz bei beliebigem $z < 0$ auf

$$\int \frac{x^s}{s^\nu} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} d s$$

und den Integrationsweg an, der durch sukzessive geradlinige Verbindung folgender Punkte entsteht:

$$2 - Ti,\ 2 + Ti,\ z + Ti,\ z + qi,\ qi,\ -qi,\ z - qi,\ z - Ti,\ 2 - Ti.$$

Der Integrand ist auf dem Wege bis auf den nicht störenden Punkt $s = 0$ regulär; er ist in dem umlaufenen Gebiet regulär bis auf die Pole erster Ordnung $s = 1$ und die $s = \varrho$, für welche $|\beta| < T$ ist. Da eine Nullstelle k-ter Ordnung $s = \varrho$ als Pol des Integranden das Residuum $k \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu}$ liefert, kommt heraus:

$$\int_{2-Ti}^{2+Ti} = \int_{2-Ti}^{z-Ti} + \int_{z-Ti}^{z-qi} + \int_{z-qi}^{-qi} + \int_{-qi}^{qi} + \int_{qi}^{z+qi} + \int_{z+qi}^{z+Ti} + \int_{z+Ti}^{2+Ti} - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu}$$

$$= I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14} + I_{15} + I_{16} + I_{17} - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu}.$$

Nun sei $x > 1$. Dann behaupte ich, dass die sechs von z abhängigen Integrale rechts für $z = -\infty$ einen Limes haben, davon I_{12} und I_{16} den Limes 0. In der Tat ist nach dem Hilfssatz 7 in der Viertelebene $\sigma \leq -1$, $t \geq q$, also auch in der Viertelebene $\sigma \leq -1$, $t \leq -q$

$$\left| \frac{1}{s^\nu} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < D_1 \frac{\log |s|}{|s|^\nu}$$

$$< b_3,$$

[1] Es wäre leicht, ein q numerisch anzugeben; doch brauche ich dies für meine Zwecke nicht.

$$\left|\frac{x^s}{s^\nu}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < b_4 x^\sigma;$$

daraus folgt es unmittelbar. Somit erhalte ich

$$\int\limits_{2-Ti}^{2+Ti} = \int\limits_{2-Ti}^{-\infty-Ti} + \int\limits_{-\infty-qi}^{-qi} + \int\limits_{-qi}^{qi} + \int\limits_{qi}^{-\infty+qi} + \int\limits_{-\infty+Ti}^{2+Ti} - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu}$$

$$(30) \qquad = I_{18} + I_{19} + I_{20} + I_{21} + I_{22} - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu}.$$

Hierin hängen I_{19}, I_{20} und I_{21} nicht von T ab; ich behaupte, dass der absolute Betrag ihrer Summe für $x \geqq 2$ unterhalb einer festen Schranke liegt. In der Tat ist nach Hilfssatz 7 für $\sigma \leqq -1$, also auch für $\sigma \leqq 0$ der Ausdruck $\frac{1}{(\sigma+qi)^\nu}\frac{\zeta'(\sigma+qi)}{\zeta(\sigma+qi)}$ beschränkt; folglich ist für $x \geqq 2$

$$\left|\int\limits_{qi}^{-\infty+qi} \frac{x^s}{s^\nu}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\right| \leqq \int\limits_{-\infty}^{0} x^\sigma b_4\,d\sigma$$

$$= \frac{b_4}{\log x}$$

$$< b_5,$$

also auch

$$\left|\int\limits_{-\infty-qi}^{-qi} \frac{x^s}{s^\nu}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\right| < b_5;$$

schliesslich ist auf der Strecke $-qi$ bis qi die Funktion $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ beschränkt, also

$$\left|\int\limits_{-qi}^{qi} \frac{x^s}{s^\nu}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\right| \leqq b_6 \int\limits_{-q}^{q} \frac{dt}{|t|^\nu}$$

$$= b_7.$$

(30) lässt sich also folgendermassen schreiben:

$$(31) \qquad \int\limits_{2-Ti}^{2+Ti} = \int\limits_{2-Ti}^{-\infty-Ti} + \int\limits_{-\infty+Ti}^{2+Ti} - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} + J(x),$$

wo $J(x)$ nicht von T abhängt und für $x \geqq 2$ die Bedingung

$$|J(x)| < b_8 \tag{32}$$

erfüllt.

Es sei nun $\eta > 1$. Dann ist nach (31), wenn noch der CAUCHY'sche Satz auf das Rechteck mit den Ecken $2 \pm Ti$, $\eta \pm Ti$ angewendet wird,

$$\int\limits_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} = \int\limits_{\eta - Ti}^{-\infty - Ti} + \int\limits_{-\infty + Ti}^{\eta + Ti} - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} + J(x). \tag{33}$$

Damit ist die Relation entwickelt, welche der im ersten Teil als bekannt vorausgesetzten Identität (14) entspricht.

Nach Hilfssatz 6 ist für $1 < \eta < 2$, $T > 0$, $x > 2$

$$\left| -\int\limits_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{x^s}{s^\nu} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds - \frac{2\pi i}{\Gamma(\nu)} \sum_{p^m \leqq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) \right| < \frac{b_1}{T^\nu}\left(\frac{x^\eta}{\eta - 1} + x \log^2 x + T \log x\right). \tag{34}$$

Aus (32), (33) und (34) folgt für $1 < \eta < 2$, wurzelfreies $T \geqq 2$, $x > 2$

$$\left\{\begin{aligned} &\left| \frac{2\pi i}{\Gamma(\nu)} \sum_{p^m \leqq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} \right| \\ &\qquad < \left| \int\limits_{\eta - Ti}^{-\infty - Ti} \right| + \left| \int\limits_{-\infty + Ti}^{\eta + Ti} \right| + \frac{b_1}{T^\nu}\left(\frac{x^\eta}{\eta - 1} + x \log^2 x + T \log x\right) + b_8. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Nun will ich die beiden Integrale rechts in (35) abschätzen. Aus Symmetriegründen brauche ich nur

$$\int\limits_{-\infty + Ti}^{\eta + Ti} = \int\limits_{-\infty + Ti}^{-1 + Ti} + \int\limits_{-1 + Ti}^{\eta + Ti} \tag{36}$$

zu untersuchen. Nach Hilfssatz 7 ist für $s = \sigma + Ti$, $\sigma \leqq -1$ (weil $T > q$ ist)

$$\left| \frac{1}{s^\nu} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < D_1 \frac{\log |s|}{|s|^\nu}.$$

also (weil $T \geq 2$ ist)[1]

$$< b_9 \frac{\log T}{T^\nu}.$$

Daher ist

$$\left| \int\limits_{-\infty+Ti}^{-1+Ti} \right| < b_9 \frac{\log T}{T^\nu} \int\limits_{-\infty}^{-1} x^\sigma \, d\sigma$$

(37)
$$= b_9 \frac{\log T}{T^\nu \, x \log x}.$$

Ferner ergibt sich genau nach der in § 3 angewandten Methode (Anwendung von (20) und Ausbuchtungen durch Halbkreise mit dem Radius $\eta - 1$)

$$\left| \int\limits_{-1+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s^\nu} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \, ds \right| < \sum_{|\beta - T| < 1} \left| \int\limits_{-1+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s^\nu} \frac{ds}{s - \varrho} \right| + \frac{C_6 \log T}{T^\nu} \int\limits_{-1}^{\eta} x^\sigma \, d\sigma$$

$$< C_4 \log T \left(\pi (\eta - 1) \frac{x^\eta}{(T-1)^\nu} \frac{1}{\eta - 1} + \frac{1}{T^\nu (\eta - 1)} \int\limits_{-1}^{\eta} x^\sigma \, d\sigma \right) + \frac{C_6 \log T}{T^\nu} \int\limits_{-1}^{\eta} x^\sigma \, d\sigma$$

$$< C_4 \log T \left(\pi \frac{x^\eta}{(T-1)^\nu} + \frac{1}{T^\nu (\eta - 1)} \frac{x^\eta}{\log x} \right) + \frac{C_6 \log T}{T^\nu} \frac{x^\eta}{\log x}$$

(38)
$$< b_{10} \frac{x^\eta \log T}{T^\nu} \left(1 + \frac{1}{(\eta - 1) \log x} \right).$$

Aus (36), (37) und (38) ergibt sich

$$\left| \int\limits_{-\infty+Ti}^{\eta+Ti} \right| < b_{11} \frac{x^\eta \log T}{T^\nu} \left(1 + \frac{1}{(\eta - 1) \log x} \right)$$

und für das zweite Integral rechts in (35) dasselbe. (35) verwandelt sich dadurch in

[1] In der Tat nimmt $\frac{\log y}{y^\nu}$ von $y = e^{\frac{1}{\nu}}$ an ab; für $\sigma \leq -1$, $T \geq e^{\frac{1}{\nu}}$ ist daher wegen $|s| > T$

$$\frac{\log |s|}{|s|^\nu} < \frac{\log T}{T^\nu},$$

und für $\sigma < -1$, $2 \leq T < e^{\frac{1}{\nu}}$ ist $\frac{\log |s|}{|s|^\nu}$ und $1 : \frac{\log T}{T^\nu}$ beschränkt

$$(39)\quad \begin{cases} \left| \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} \sum\limits_{p^m \leq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\dfrac{x}{p^m}\right) - x + \sum\limits_{|\beta|<T} \dfrac{x^\varrho}{\varrho^\nu} \right| \\ \quad < b_{12}\left(x^\eta \dfrac{\log T}{T^\nu} + \dfrac{x^\eta}{(\eta-1)\log x}\dfrac{\log T}{T^\nu} + \dfrac{x^\eta}{\eta-1}\dfrac{1}{T^\nu} + x\log^2 x\,\dfrac{1}{T^\nu} + \log x\,.\,T^{1-\nu}\right). \end{cases}$$

In (39) war $T \geq 2$ und wurzelfrei, $x > 2$, $1 < \eta < 2$. Jetzt sei $x \geq 3$, $T > 2$ und wurzelfrei. Wenn ich $\eta = 1 + \dfrac{1}{\log x}$ setze, erhalte ich

$$(40)\quad \begin{cases} \left| \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} \sum\limits_{p^m \leq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\dfrac{x}{p^m}\right) - x + \sum\limits_{|\beta|<T} \dfrac{x^\varrho}{\varrho^\nu} \right| \\ \qquad\qquad \leq b\left(x\dfrac{\log^2 x}{T^\nu} + x\dfrac{\log T}{T^\nu} + \log x\,.\,T^{1-\nu}\right); \end{cases}$$

wegen der Stetigkeit von

$$\sum_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu}$$

nach links gilt (40) für $x \geq 3$ und alle $T > 2$ (auch, wenn es Wurzelordinaten sind).

Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Folgerung: Es sei $T = T(x)$ irgend eine Funktion von x, die von einem x an ≥ 3 ist. Dann besagt das Gefundene:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{p^m \leq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) = x - \sum_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} + O\left(\frac{x\log^2 x}{T^\nu}\right) + O\left(\frac{x\log T}{T^\nu}\right) + O(T^{1-\nu}\log x).$$

Speziell für $T = x^\mu$, wo $0 < \mu \leq 1$ ist, ergibt sich daher

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{p^m \leq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) = x - \sum_{|\beta|<x^\mu} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} + O(x^{1-\mu\nu}\log^2 x).$$

Berlin, den 13. Juni 1911.

SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES ET LEURS APPLICATIONS.

Par

VITO VOLTERRA

à ROME.

Introduction.

Dans beaucoup de questions de Physique mathématique, de Mécanique et d'analyse il est nécessaire de considérer des relations analytiques qui ont en même temps le caractère des équations intégrales et celui des équations différentielles. Je les ai appelées *équations intégro-différentielles.* Leur résolution constitue en général un problème nouveau de l'analyse, car on ne peut l'aborder qu'en employant des méthodes nouvelles. Nous montrerons en effet qu'il faut appliquer une analyse qui n'est pas celle des équations différentielles ni celle des équations intégrales, mais qui ressort de l'union des conceptions fondamentales qui dominent ces classes de questions. C'est ainsi que dans ce mémoire nous ferons usage en même temps de l'idée de GREEN des *solutions fondamentales* et de celle que j'ai introduite depuis mon premier travail sur l'*inversion des intégrales définies,* c'est à dire de regarder les équations intégrales comme un ensemble infini d'équations algébriques.

Dans ce mémoire j'envisagerai quelques classes d'équations intégro-différentielles en les mettant en rapport avec des problèmes de physique-mathématique d'où elles ressortent. Ces questions physiques se rapportent aux problèmes de l'hérédité qui avaient été abordés depuis longtemps sous plusieurs dénominations, mais qui, faute de méthodes analytiques générales, n'avaient pas pu amener à une étude systématique au point de vue mathématique.

Comme M. PICARD a montré dans son intéressant article sur la Mécanique classique et ses approximations successives,[1] il faut distinguer la mécanique en deux branches, celle de l'hérédité et celle de la non hérédité. Celle-ci se rapporte

[1] Rivista di Scienza, vol. 1°. Bologna 1907.

aux cas où l'avenir d'un système ne dépend à un instant donné que de son état actuel, ou, d'une manière plus générale (si l'on regarde les forces comme pouvant dépendre aussi des vitesses) de l'état actuel et de l'état infiniment voisin qui précède. La mécanique de l'hérédité correspond au cas où chaque action laisse un héritage dans le système, et l'état actuel dépend de toute l'histoire précédente. C'est ainsi que le problème fondamental de l'astronomie appartient à la mécanique de la non-hérédité, tandis que les questions d'*hystéresis*, de l'*elastische nachwirkung*, du *traînage* rentrent dans la mécanique de l'hérédité, ou, plus général, dans la physique d'hérédité.

M. Painlevé dans le chapitre de l'ouvrage *de la méthode dans les sciences*[1] consacré à la mécanique affirme qu'il n'y a pas de vrais problèmes de nature héréditaire. Ceux qui se présentent sous cet aspect ne seraient, à son avis, que des problèmes destinés à disparaître dès que nos connaisances sur la constitution des corps deviendront plus complètes. Je ne discute pas cette opinion, mais je me limite à remarquer qu'à l'état actuel de nos connaissances scientifiques ces problèmes se présentent effectivement et il est nécessaire de les résoudre.

Dans quelques cas, comme ceux de l'élasticité, les équations dont ils dépendent avaient été posées depuis longtemps, mais comme je viens de dire, l'analyse n'était pas assez avancée pour permettre de les traiter d'une manière générale. On peut se rendre compte facilement de cela. Remarquons en effet que, par leur nature, les problèmes de la physique mathématique et de la mécanique non héréditaire dépendent des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles. Les données initiales constituent les constantes arbitraires ou les fonctions arbitraires qui paraissent dans l'intégration. Pour les problèmes de la physique mathématique de l'hérédité, au contraire, l'analyse des équations différentielles n'est plus suffisante. En effet l'état actuel du système dépend de son histoire, et celle-ci est individualisée par toutes les valeurs prises par des paramètres pendant une certaine période de temps, c'est pourquoi il est nécessaire d'envisager des quantités qui dépendent de toutes les valeurs de ces paramètres regardés comme des fonctions du temps. On est amené ainsi aux éléments de l'analyse que j'ai étudiés dans plusieurs travaux et que j'ai appelés des quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions (fonctions des lignes et des hyperespaces). Les méthodes qu'il faudra suivre seront par suite celles qu'on applique à ces éléments.

Toutes ces méthodes ont pour point de départ une conception analogue à la conception fondamentale du calcul intégral c'est à dire au passage à la limite qui amène d'une somme à une intégrale. C'est ainsi que dans mon travail de

[1] Paris, Alcan, 1909.

1887[1] j'ai obtenu un développement en série analogue à celui de Taylor pour une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction donnée. En effet si l'on part de la série des puissances relative à une fonction de plusieurs variables et l'on fait croître indéfiniment leur nombre, on trouve, sous certaines conditions, que les termes de premier degré amènent à une intégrale simple, ceux de second degré à une intégrale double ceux de troisième degré à une intégrale triple, et ainsi de suite. On arrive par là au développement que j'ai rappelé tout-à-l'heure.[2]

Ce développement conduit à une classification analogue à celle des fonctions des différents degrés et à beaucoup de questions dont la résolution des équations intégrales linéaires est en première ligne. Cette question se présente de cette manière comme une extension tout-à-fait naturelle de la résolution des systèmes des équations algébriques de premier degré lorsque le nombre des équations et des inconnues croît indéfiniment. C'est pourquoi je me suis servi de cette idée dès le premier abord pour la résolution des équations intégrales que j'ai envisagées. Les auteurs qui ont approfondi après des équations intégrales de plus en plus compliquées l'ont aussi appliquée.[3] Je l'emploierai aussi pour étudier les problèmes de physique mathématique héréditaire où les équations intégrales ne suffisent plus et il faut passer aux équations intégro-différentielles dont j'ai parlé ci-dessus.

Le présent Mémoire est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre j'envisage l'équation intégro-differentielle

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} + \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial y^2} \varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial z^2} \psi(t,\tau) \right\} d\tau = 0$$

qu'on peut écrire pour simplifier

$$\text{(A)} \qquad \Delta^2 u(t) + \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t,\tau) \right\} d\tau = 0.$$

Je la regarde comme l'équation typique du genre elliptique de la même manière que l'équation de Laplace est le type des équations différentielles elliptiques aux dérivées partielles.

[1] Rend. Acc. dei Lincei, Vol. III, 1887. Voir aussi Acta Mathematica, Vol. XII. 1889.
[2] Voir Chap. II, Art. 1er.
[3] Comptes rendus des séances de l'Ac. des Sciences. Vol. 142, page 691. 1er Sémestre 1906.

Dans le second chapitre j'étudie les problèmes de l'élasticité au point de vue héréditaire et je montre qu'on peut en donner une théorie analytique générale. Le troisième chapitre est consacré à donner un premier aperçu de l'hérédité dans l'électromagnétisme.

Je n'ai abordé dans ce mémoire que l'étude analytique des équations intégro-différentielles de type elliptique. Je consacrerai d'autres travaux à l'étude des équations des autres types. Je me suis limité aussi dans ce premier travail à considérer des cas généraux en laissant de côté toutes les questions de détail et les applications particulières. J'ajouterai enfin que je n'ai envisagé que les équations qui ont des rapports avec l'hérédité et par suite des équations intégro-différentielles ayant les deux limites variables ou une limite variable. Cependant on peut étendre les résultats à des équations ayant les limites constantes.

Je crois que le caractère essentiel et l'utilité des méthodes qui se rattachent à la conception des fonctions qui dépendent d'autres fonctions résultent d'une manière claire et frappante des développements que je vais donner. Ils prouvent en effet que, par la théorie des équations intégro-différentielles qui découle de cette conception, on peut faire l'étude analytique des phénomènes d'hérédité sans particulariser les fonctions qui la caractérisent, c'est à dire les coefficients d'hérédité.

Comme dans les questions ordinaires de physique mathématique il est utile de laisser indéterminées les constantes, autant qu'il est possible, et de ne les fixer numériquement que lorsqu'on applique les formules à des questions concrètes, de même il est utile de laisser indéterminées les susdites fonctions (coefficients d'hérédité) lorsqu'on traite des questions d'hérédité en général et de résoudre les problèmes qui se présentent avec la plus grande généralité possible. On pourra aussi déterminer ces fonctions, lorsqu'elles sont inconnues, en comparant les solutions générales qu'on obtient avec les résultats de l'observation directe.

L'algèbre et l'analyse ordinaire se sont montrées de jour en jour plus utiles dans les applications aux phénomènes naturels où il n'y a que des paramètres variables. L'analyse, où les éléments qui jouent le rôle de variables indépendentes sont des fonctions, va montrer une de ses applications dans les phénomènes de la physique héréditaire.

CHAPITRE 1er.

L'équation intégro-différentielle

$$\Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t,\tau) \right\} d\tau = 0.$$

Art. 1er. Éléments caractéristiques.

1. Si la fonction $u(x, y, z, t)$ est finie et continue à l'intérieur d'un domaine S pour les valeurs de t comprises entre 0 et T, et les premières et les secondes dérivées de u par rapport à x, y, z sont aussi finies et continues, nous disons que u est *régulière*.

u étant une solution régulière de l'équation (A), multiplions les deux membres de cette équation par $u(t)$ et intégrons au domaine S. On aura facilement la formule suivante

$$(1) \quad \int_\sigma u(t) \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \left\{ \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t,\tau) \cos nx + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t,\tau) \cos ny + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t,\tau) \cos nz \right\} d\tau \right\} d\sigma = \int_S \Delta u(t) dS + \int_0^t d\tau \int_S \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t,\tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t,\tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t,\tau) \right\} dS$$

n étant la normale externe au coutour σ et

$$\Delta u(t) = \left(\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}\right)^2.$$

2. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Toute solution régulière u de l'équation (A) sera déterminée à l'intérieur de S pour les valeurs de t comprises entre les limites 0 et T, si l'on connait au contour σ les valeurs de u pour t compris entre 0 et T.

Supposons que u soit nulle sur σ pour les valeurs de t comprises entre 0 et T, à cause de l'équation (1) on aura

$$(2) \qquad \int_S \Delta u(t) dS + \int_0^t d\tau \int_S \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t, \tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t, \tau) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t, \tau) \right\} dS = 0 .$$

Soit M une quantité plus grande que la limite supérieure de

$$\int_S \Delta u(t) dS$$

pour toutes les valeurs de t comprises entre 0 et T. De la relation

$$\int_S \left(\left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right| - \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right| \right)^2 dS \geq 0$$

on tirera

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right| dS < M$$

et d'une manière analogue

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \right| dS < M, \quad \int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \right| dS < M .$$

C'est pourquoi, si

$$| f(t, \tau) | < \frac{N}{3}, | \varphi(t, \tau) | < \frac{N}{3}, | \psi(t, \tau) | < \frac{N}{3},$$

en vertu de l'équation (2), on aura

$$(3) \qquad \int_S \Delta u(t) dS < M N t,$$

et par suite

$$(3') \qquad \int_S \Delta u(\tau) dS < M N \tau .$$

Mais

$$\int_S \left(\sqrt{\tau} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \right| - \sqrt{t} \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| \right)^2 dS \geq 0,$$

où ξ désigne l'une des variables x, y, z. Donc des équations (3) et (3') l'on tirera

$$\int_S \left|\frac{\partial u(t)}{\partial \xi}\frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi}\right| dS < M N t^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}.$$

En employant l'équation (2) on déduit

$$\int_S \Delta u(t) dS < \frac{2}{3} M N^2 t^2. \tag{4}$$

Démontrons maintenant que si l'on a

$$\int_S \Delta u(t) dS < \frac{M(2Nt)^{m-1}}{m!},$$

on doit aussi avoir

$$\int_S \Delta u(t) dS < \frac{M(2Nt)^m}{m+1!}. \tag{5}$$

En effet

$$\int_S \left(\tau^{\frac{m-1}{2}}\left|\frac{\partial u(t)}{\partial \xi}\right| - t^{\frac{m-1}{2}}\left|\frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi}\right|\right)^2 dS > 0$$

et par suite

$$\int_S \left|\frac{\partial u(t)}{\partial \xi}\frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi}\right| dS < \frac{M(2N)^{m-1}}{m!} t^{\frac{m-1}{2}} \tau^{\frac{m-1}{2}},$$

d'où l'on tire, à cause de l'équation (2), la relation (5).

On peut donc conclure, en ayant égard aux relations (3) et (4), que l'inégalité (5) est verifiée quel que soit le nombre entier m. Par conséquent u doit être nulle. Puisque l'équation (A) est linéaire le théorème énoncé est démontré.

3. Envisageons l'expression

$$\frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \left\{\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t,\tau)\cos nx + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y}\varphi(t,\tau)\cos ny + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z}\psi(t,\tau)\cos nz\right\} d\tau. \tag{6}$$

Si elle est nulle on a l'égalité (2) et par suite l'inégalité (5) quel que soit m, d'où l'on déduit que u doit être constante dans le domaine S et pour les valeurs de t comprises entre 0 et T.

On pourra donc énoncer le théorème:

Si l'expression (6) *est connue au contour σ, pour les valeurs de t comprises entre* 0 *et T, la fonction u sera déterminée, à l'intérieur du domaine S, à une constante près.*

Art. 2ème. L'équation adjointe et le théorème de réciprocité.

1. L'équation

$$(A') \qquad \Delta^2 v(t) + \int_t^{\Theta} \left\{ \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t) \right\} d\tau = 0$$

sera désignée par la dénomination *d'équation adjointe* à l'équation (A). Nous supposerons Θ comprise entre t et T.

Posons

$$H_\sigma = \int_0^{\Theta} dt \int_\sigma \left(v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma + \int_0^{\Theta} dt \int_t^{\Theta} d\tau \int_\sigma \left\{ \left(v(\tau) \frac{d u(t)}{\partial x} - \right.\right.$$

$$\left. - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} \right) f(\tau, t) \cos nx + \left(v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial y} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \right) \varphi(\tau, t) \cos ny +$$

$$\left. + \left(v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial z} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \right) \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\sigma.$$

Il est évident que H_σ *dépendra des fonctions* u et v et en même temps sera une fonction, dans la signification ordinaire, de la variable Θ. C'est pourquoi nous désignérons cette quantité par

$$H_\sigma([u, v], \Theta).$$

2. En supposant que u, v soient des fonctions régulières on a facilement

$$\int_S dS \int_0^{\Theta} \left(v(t) \left[\Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau \right] - \right.$$

$$\left. u(t) \left[\Delta^2 v(t) + \int_t^{\Theta} \left\{ \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t) \right\} d\tau \right] \right) dt =$$

$$= H_\sigma([u, v], \Theta).$$

u et v étant respectivement des solutions régulières des équations (A) et (A') on aura donc

$$(1) \qquad H_\sigma([u, v], \Theta) = 0.$$

Cette équation exprime le *théorème de réciprocité*.

3. Soit $H'_\sigma([u, v], \Theta)$ le premier terme de H_σ, c'est à dire posons

$$H'_\sigma([u, v], \Theta) = \int_0^\Theta dt \int_\sigma \left(v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n}\right) d\sigma,$$

et soit $H_\sigma''([u, v], \Theta)$ la partie résiduelle de H_σ, on aura évidemment

$$H_\sigma([u, v], \Theta) = H'_\sigma([u, v], \Theta) + H''_\sigma([u, v], \Theta)$$

et si u et v sont des solutions régulières des équations (A) et (A'), il sera

$$H'_\sigma([u, v], \Theta) + H''_\sigma([u, v], \Theta) = 0.$$

Art. 3ème. **Les équations intégro-différentielles considérées comme un ensemble infini et continu d'équations différentielles.**

1. Envisageons le système suivant de m équations différentielles aux dérivées partielles

$$(B) \begin{cases} \Delta^2 u_1 = 0 \\ a_{21} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{21} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{21} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \Delta^2 u_2 = 0 \\ a_{31} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{31} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{31} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + a_{32} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + b_{32} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + c_{32} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \Delta^2 u_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

L'équation (A) n'est que le cas limite du système précédent, lorsque le nombre des inconnus et des équations croît indéfiniment.

De cette manière pour les équations intégro-différentielles nous posons le même principe que nous avons établi pour les équations intégrales.[1]

Le système adjoint du système (B) sera

$$(B') \begin{cases} \Delta^2 v_1 + a_{21} \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + b_{21} \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + c_{21} \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + a_{31} \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{31} \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{31} \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \cdots\cdots = 0 \\ \qquad\qquad \Delta^2 v_2 + a_{32} \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{32} \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{32} \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \cdots\cdots = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Delta^2 v_3 + \cdots\cdots = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

[1] Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1896. *Sulla inversione degli integrali definiti.* Nota I, § 3.

2. Soient $u_1, u_2, \cdots u_m$ des intégrales régulières du système (B) et $v_1, v_2, \cdots v_m$ des intégrales régulières du systéme (B'). On a évidemment

$$(7)\qquad \int_S \sum_1^m {}_i \left\{ v_i \left[\sum_1^{i-1} {}_h \left(a_{ih} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} + b_{ih} \frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2} + c_{ih} \frac{\partial^2 u_h}{\partial z^2} \right) + \Delta^2 u_i \right] - \right.$$

$$\left. - u_i \left[\sum_{i+1}^m {}_h \left(a_{hi} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} + b_{hi} \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} + c_{hi} \frac{\partial^2 v_h}{\partial z^2} \right) + \Delta^2 v_i \right] \right\} dS = \int_S \sum_1^m {}_i (v_i \Delta^2 u_i - u_i \Delta^2 v_i)\, dS +$$

$$+ \int_S \sum_1^m {}_i \sum_{i+1}^m {}_h \left\{ a_{hi} \left(v_h \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - u_i \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \right) + b_{hi} \left(v_h \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} - u_i \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \right) + c_{hi} \left(v_h \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} - u_i \frac{\partial^2 v_h}{\partial z^2} \right) \right\} dS$$

$$= \int_\sigma \sum_1^m {}_i \left(v_i \frac{\partial u_i}{\partial n} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial n} \right) d\sigma + \int_\sigma \sum_1^m {}_i \sum_{i+1}^m {}_h \left\{ a_{hi} \left(v_h \frac{\partial u_i}{\partial x} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial x} \right) \cos nx + \right.$$

$$\left. + b_{hi} \left(v_h \frac{\partial u_i}{\partial y} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial y} \right) \cos ny + c_{hi} \left(v_h \frac{\partial u_i}{\partial z} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial z} \right) \cos nz \right\} d\sigma.$$

Or, toute équation du système (B) est de la forme

$$\sum_1^{i-1} {}_h \left(a_{ih} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} + b_{ih} \frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2} + c_{ih} \frac{\partial^2 u_h}{\partial z^2} \right) + \Delta^2 u_i = 0, \; (i = 1, 2, \cdots m)$$

et toute équation du système (B') est de la forme

$$\sum_{i+1}^m {}_h \left(a_{hi} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} + b_{hi} \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} + c_{hi} \frac{\partial^2 v_h}{\partial z^2} \right) + \Delta^2 v_i = 0, \; (i = 1, 2, \cdots m)$$

c'est pourquoi, en vertu de la relation (7), nous aurons

$$0 = \int_\sigma \sum_1^m {}_i \left(v_i \frac{\partial u_i}{\partial n} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial n} \right) d\sigma + \int_\sigma \sum_1^m {}_i \sum_{i+1}^m {}_h \left\{ a_{hi} \left(v_h \frac{\partial u_i}{\partial x} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial x} \right) \cos nx + \right.$$

$$\left. + b_{hi} \left(v_h \frac{\partial u_i}{\partial y} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial y} \right) \cos ny + c_{hi} \left(v_h \frac{\partial u_i}{\partial z} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial z} \right) \cos nz \right\} d\sigma.$$

En faisant croître indéfiniment le nombre des quantités $u_1, u_2, \cdots u_m;\ v_1, v_2, \cdots v_m$, cette relation amène à la limite, par le procédé fondamental du calcul intégral à l'équation (I) c'est à dire au théorème de réciprocité.

3. Posons

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

c'est à dire représentons par r la distance entre le *pôle* a, b, c fixe et le point variable x, y, z. Une solution du système (B) sera donnée par

$$u_1 = \frac{1}{r},$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}\left(a_{21}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{21}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{21}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right),$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}\left(a_{31}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{31}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{31}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{24}\left(a_{32}a_{21}\frac{\partial^4 r^3}{\partial x^4} + b_{32}b_{21}\frac{\partial^4 r^3}{\partial y^4} + c_{32}c_{21}\frac{\partial^4 r^3}{\partial z^4} + \right.$$

$$\left. + (a_{32}b_{21} + b_{32}a_{21})\frac{\partial^4 r^3}{\partial x^2 \partial y^2} + (a_{32}c_{21} + c_{32}a_{21})\frac{\partial^4 r^3}{\partial x^2 \partial z^2} + (b_{32}c_{21} + c_{32}b_{21})\frac{\partial^4 r^3}{\partial y^2 \partial z^2}\right).$$

. . . .

De même une solution du système (B') sera

$$v_m = \frac{1}{r},$$

$$v_{m-1} = -\frac{1}{2}\left(a_{m,m-1}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{m,m-1}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{m,m-1}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right),$$

$$v_{m-2} = -\frac{1}{2}\left(a_{m,m-2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{m,m-2}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{m,m-2}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{24}\left(a_{m,m-1}a_{m-1,m-2}\frac{\partial^4 r^3}{\partial x^4} + b_{m,m-1}b_{m-1,m-2}\frac{\partial^4 r^3}{\partial y^4} + c_{m,m-1}c_{m-1,m-2}\frac{\partial^4 r^3}{\partial z^4} + \right.$$

$$+ (a_{m,m-1}b_{m-1,m-2} + b_{m,m-1}a_{m-1,m-2})\frac{\partial^4 r^3}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$+ (a_{m,m-1}c_{m-1,m-2} + c_{m,m-1}a_{m-1,m-2})\frac{\partial^4 r^3}{\partial x^2 \partial z^2} +$$

$$\left. + (b_{m,m-1}c_{m-1,m-2} + c_{m,m-1}b_{m-1,m-2})\frac{\partial^4 r^3}{\partial y^2 \partial z^2}\right).$$

. . . .

Les solutions que nous venons de trouver sont partout régulières excepté dans le pôle, où toutes les intégrales deviennent infinies de premier ordre, en prenant r comme infiniment petit fondamental. C'est pourquoi ces solutions constituent les *intégrales fondamentales* des systèmes (B) et (B').

Si l'on fait croître indéfiniment le nombre des équations différentielles qui constituent ces systèmes, en passant à la limite par les procédés du calcul intégral que nous venons de rappeller, on peut obtenir les solutions fondamentales

de l'équation intégro-différentielle (A) et de son adjointe, c'est à dire des solutions régulières partout, excepté dans le pôle, où elles deviennent infinies de premier ordre.

Dans l'Art. suivant nous étudiérons la solution fondamentale de l'équation adjointe (A').

Art. 4ème. La solution fondamentale de l'équation adjointe.

1. Posons

$$f(t,\tau)=F_{1,0,0}(t,\tau),\ \varphi(t,\tau)=F_{0,1,0}(t,\tau),\ \psi(t,\tau)=F_{0,0,1}(t,\tau), \tag{8}$$

$$F_{h,k,l}(t,\tau)=\int_\tau^t \sum_{i+j+g=\varrho} F_{h-i,k-j,l-g}(t,\xi)\,F_{i,j,g}(\xi,\tau)\,d\xi\,. \tag{9}$$

où $\sum\limits_{i+j+g=\varrho}$ est une somme étendue à toutes les valeurs entières de i,j,g dont la somme est égale à ϱ. On suppose que toute expression F avec des suffixes négatifs soit nulle et qu'il soit

$$1\leq\varrho<h+k+l.$$

Commençons par démontrer que *la fonction* $F_{h,k,l}$ *est indépendante de* ϱ. En effet supposons d'avoir démontré que

$$\int_\tau^t \sum_{i'+j'+g'=\varrho'} F_{h'-i',k'-j',l'-g'}(t,\xi)\,F_{i',j',g'}(\xi,\tau)\,d\xi=F_{h',k',l'}(t,\tau)$$

soit indépendante de ϱ' étant

$$1<\varrho'<h'+k'+l'$$

et

$$h'+k'+l'<h+k+l.$$

Nous prouverons que l'expression (9) est indépendante de ϱ.

Puisque $\varrho=i+j+g<h+k+l$, il sera

$$F_{i,j,g}(\xi,\tau)=\int_{\tau}^{\xi}\sum_{i''+j''+g''=\varrho''}F_{i-i'',j-j'',g-g''}(\xi,\eta)\,F_{i'',j'',g''}(\eta,\tau)\,d\eta\,,$$

où

$$1\leq\varrho''<\varrho\,,$$

et par suite

$$F_{h,k,l}(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}\sum_{i+j+g=\varrho}F_{h-i,k-j,l-g}(t,\xi)\,d\xi\int_{\tau}^{\xi}\sum_{i''+j''+g''=\varrho''}F_{i-i'',j-j'',g-g''}(\xi,\eta)\,F_{i'',j'',g''}(\eta,\tau)\,d\eta=$$

$$=\int_{\tau}^{t}\sum_{i''+j''+g''=\varrho''}F_{i'',j'',g''}(\eta,\tau)\,d\eta\int_{\eta}^{t}\sum_{i+j+g=\varrho}F_{h-i,k-j,l-g}(t,\xi)\,F_{i-i'',j-j'',g-g''}(\xi,\eta)\,d\xi=$$

$$=\int_{\tau}^{t}\sum_{i''+j''+g''=\varrho''}F_{h-i'',k-j'',l-g''}(t,\eta)\,F_{i'',j'',g''}(\eta,\tau)\,d\eta\,.$$

Or on peut vérifier facilement que pour $h+k+l=2$, $h+k+l=3$, la propriété que nous avons énoncée est vérifiée; elle sera donc démontrée pour toutes les valeurs entières de h, k, l.

2. Cela posé écrivons

$$(10)\qquad \Phi\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\,\middle|\,r,t\right)=$$

$$=\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^{m}}{m!\,2^{2m}}\sum_{h+k+l=m}F_{h,k,l}(r,t)\sum_{0}^{h}{}_{\alpha}\sum_{0}^{k}{}_{\beta}\sum_{0}^{l}{}_{\gamma}(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}\frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!\,(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}{(\alpha+\beta+\gamma)!\,(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!\,(h-\alpha)!\,(k-\beta)!\,(l-\gamma)!}\left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha}\left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta}\left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma},$$

où

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

La série précédente est uniformément convergente. En effet on voit aisément que

$$\frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!\,\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma)!\,(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!}<\frac{(2(h+k+l))!\,h!\,k!\,l!}{(h+k+l)!\,(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}$$

parce-que le premier membre de l'inégalité précédente augmente si l'on ajoute une unité à α, ou à β, ou à γ.

En outre

$$\left|\frac{x}{r}\right| \leq 1, \left|\frac{y}{r}\right| < 1, \left|\frac{z}{r}\right| < 1,$$

c'est pourquoi il suffira de démontrer la convergence de la série

$$\sum_1^\infty{}_m \frac{(2m)!}{m!\,m!\,2^{2m}} \sum_{h+k+l=m} |F_{h,k,l}(r,t)| \sum_0^h{}_\alpha \sum_0^k{}_\beta \sum_0^l{}_\gamma \frac{h!\,k!\,l!}{\alpha!\,(h-\alpha)!\,\beta!\,(k-\beta)!\,\gamma!\,(l-\gamma)!}.$$

Mais

$$\sum_0^h{}_\alpha \frac{h!}{\alpha!\,(h-\alpha)!} \sum_0^k{}_\beta \frac{k!}{\beta!\,(k-\beta)!} \sum_0^l{}_\gamma \frac{l!}{\gamma!\,(l-\gamma)!} = 2^h\,2^k\,2^l = 2^m,$$

donc la série précédente se réduit à

$$(11) \qquad \sum_1^\infty{}_m \frac{(2m)!}{m!\,m!\,2^m} \sum_{h+k+l=m} |F_{h,k,l}(r,t)|.$$

Or si

$$|F_{1,0,0}| < M, |F_{0,1,0}| < M, |F_{0,0,1}| < M,$$

on a

$$|F_{h,k,l}(t,r)| < \frac{3^{h+k+l-1}\,M^{h+k+l}\,(t-r)^{h+k+l-1}}{(h+k+l-1)!}.$$

En remplaçant $|F_{h,k,l}|$ par le second membre de l'inégalité précédente dans la série (11) on trouve

$$\sum_1^\infty{}_m \frac{(2m)!\,m^3\,3^{m-1}\,M^m\,(t-r)^{m-1}}{2^m\,m!\,m!\,(m-1)!}.$$

Cette série est convergente et par suite la série (10) est uniformément convergente. On démontre d'une manière tout-à-fait analogue que la série (10) est dérivable par rapport à x, y, z.

3. Soit

$$(12) \qquad V(x,y,z\,|\,t,\Theta) = \frac{1}{r}\left(1 + \int_t^\Theta \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\,\middle|\, r, t\right) dr\right).$$

Nous démontrerons que $V(x,y,z\,|\,t,\Theta)$ est la solution fondamentale de l'équation adjointe, le pôle étant à l'origine.

Remarquons d'abord que

$$\frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\partial y^{2k}\partial z^{2l}} =$$

$$\frac{(2m-1)!(2h)!(2k)!(2l)!}{(m-1)!\,2^{2m-1} r}\sum_{0}^{h}{}_{\alpha}\sum_{0}^{k}{}_{\beta}\sum_{0}^{l}{}_{\gamma}\frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!}{(\alpha+\beta+\gamma)!}\,\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha}\left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta}\left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma}(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}}{(2\alpha)!(2\beta)!(2\gamma)!(h-\alpha)!(k-\beta)!(l-\gamma)!}.$$

Par suite nous pouvons écrire

$$(10') \qquad \Phi = r\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\sum_{h+k+l=m}\frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\partial y^{2k}\partial z^{2l}}F_{h,k,l}(\tau,t).$$

Donc, si nous écrivons pour simplifier $V(t)$ à la place de $V(x,y,z\,|\,t,\Theta)$, on aura

$$(13) \quad \Delta^2 V(t) = \int_t^{\Theta}\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\sum_{h+k+l=m}\frac{\partial^{2m}\Delta^2 r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\partial y^{2k}\partial z^{2l}}F_{h,k,l}(\tau,t)\,d\tau =$$

$$\int_t^{\Theta}\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{(2(m-1))!}\sum_{h+k+l=m}\frac{\partial^{2m} r^{2m-3}}{\partial x^{2h}\partial y^{2k}\partial z^{2l}}F_{h,k,l}(\tau,t)\,d\tau.$$

D'autre part

$$\int_t^{\Theta}\left\{\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2}F_{1,0,0}(\tau,t)+\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2}F_{0,1,0}(\tau,t)+\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2}F_{0,0,1}(\tau,t)\right\}d\tau$$

$$= \int_t^{\Theta}\left\{\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}F_{1,0,0}(\tau,t)+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}F_{0,1,0}(\tau,t)+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}F_{0,0,1}(\tau,t)\right\}d\tau +$$

$$\int_t^{\Theta}d\tau\int_\tau^{\Theta}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\sum_{h+k+l=m}\left\{\frac{\partial^{2m+2} r^{2m-1}}{\partial x^{2h+2}\partial y^{2k}\partial z^{2l}}F_{h,k,l}(\xi,\tau)F_{1,0,0}(\tau,t)+\right.$$

$$\frac{\partial^{2m+2} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\partial y^{2k+2}\partial z^{2l}}F_{h,k,l}(\xi,\tau)F_{0,1,0}(\tau,t)+$$

$$\left.+\frac{\partial^{2m+2} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\partial y^{2k}\partial z^{2l+2}}F_{h,k,l}(\xi,\tau)F_{0,0,1}(\tau,t)\right\}d\xi.$$

Or la dernière intégrale double se transforme facilement en

$$\sum_2^\infty {}_m \frac{(-1)^{m-1}}{(2(m-1))!} \sum_{h'+k'+l'=m} \frac{\partial^{2m} r^{2m-3}}{\partial x^{2h'} \partial y^{2k'} \partial z^{2l'}} \int_t^\Theta d\tau \int_\tau^\Theta \{F_{h'-1,k',l'}(\xi, \tau) F_{1,0,0}(\tau, t) +$$

$$+ F_{h',k'-1,l'}(\xi, \tau) F_{0,1,0}(\tau, t) + F_{h',k',l'-1}(\xi, \tau) F_{0,0,1}(\tau, t)\} d\xi .$$

Mais

$$\int_t^\Theta d\tau \int_\tau^\Theta \{F_{h'-1,k',l'}(\xi, \tau) F_{1,0,0}(\tau, t) + F_{h',k'-1,l'}(\xi, \tau) F_{0,1,0}(\tau, t) +$$

$$+ F_{h',k',l'-1}(\xi, \tau) F_{0,0,1}(\tau, t)\} d\xi = \int_t^\Theta d\xi \int_t^\xi \{F_{h'-1,k',l'}(\xi, \tau) F_{1,0,0}(\tau, t) +$$

$$+ F_{h',k'-1,l'}(\xi, \tau) F_{0,1,0}(\tau, t) + F_{h',k',l'-1}(\xi, \tau) F_{0,0,1}(\tau, t)\} d\tau = \int_t^\Theta F_{h',k',l'}(\xi, t)\, d\xi .$$

Par suite

$$\int_t^\Theta \left\{\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2} F_{1,0,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2} F_{0,1,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2} F_{0,0,1}(\tau, t)\right\} d\tau =$$

$$= \int_t^\Theta \sum_1^\infty {}_m \frac{(-1)^{m-1}}{(2(m-1))!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m} r^{2m-3}}{\partial x^{2h} \partial y^{2k} \partial z^{2l}} F_{h,k,l}(\tau, t)\, d\tau .$$

En ajoutant l'équation que nous venons de trouver à l'équation (13) et en rappellant les égalités (8) nous aurons

$$\Delta^2 V(t) + \int_t^\Theta \left\{\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t)\right\} d\tau = 0 .$$

La fonction (12) satisfait ainsi à l'équation adjointe, en outre elle est partout régulière, excepté à l'origine, où elle devient infinie de premier ordre. Nous avons donc vérifié directement que *la fonction $V(x, y, z, | t, \Theta)$ est la solution fondamentale de l'équation adjointe.*

Art. 5ème. **Propriété de la solution fondamentale de l'équation adjointe.**

1. En vertu des formules (12) et (10') nous pouvons écrire

$$(12') \qquad V(x, y, z \mid t, \Theta) = \frac{1}{r} + \int_t^{\Theta} \sum_1^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\, \partial y^{2k}\, \partial z^{2l}} F_{h,k,l}(\tau, t)\, d\tau$$

et si nous posons

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

nous porterons le pôle dans le point a, b, c.

La formule précédente est équivalente à l'autre

$$(14) \qquad V(x, y, z \mid t, \Theta) = \frac{1}{r} + \int_t^{\Theta} \sum_1^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h}\, \partial b^{2k}\, \partial c^{2l}} F_{h,k,l}(\tau, t)\, d\tau .$$

2. Désignons par σ une surface fermée ayant à l'intérieur le pôle a, b, c, et par n la normale externe à σ. Soit S l'espace renfermé par la surface σ.

Nous aurons

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = -4\pi ,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h}\, \partial b^{2k}\, \partial c^{2l}} d\sigma = \frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2h}\, \partial b^{2k}\, \partial c^{2l}} \int_S 2m(2m-1)\, r^{2m-3}\, dS ,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h}\, \partial b^{2k}\, \partial c^{2l}} \cos nx\, d\sigma = \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h+2}\, \partial b^{2k}\, \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-1}\, dS ,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h}\, \partial b^{2k}\, \partial c^{2l}} \cos ny\, d\sigma = \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h}\, \partial b^{2k+2}\, \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-1}\, dS ,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h}\, \partial b^{2k}\, \partial c^{2l}} \cos nz\, d\sigma = \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h}\, \partial b^{2k}\, \partial c^{2l+2}} \int_S r^{2m-1}\, dS .$$

3. Cela posé on aura

$$(15) \quad \int_\sigma \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\sigma = -4\pi + \int_t^{\Theta} \sum_1^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m}{(2(m-1))!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2h}\, \partial b^{2k}\, \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-3}\, dS \,.\, F_{h,k,l}(\tau, t)\, d\tau .$$

Calculons maintenant

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz\right) d\sigma .$$

On trouvera

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\int_S \frac{1}{r} dS \,.\, F_{1,0,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2}{\partial b^2}\int_S \frac{1}{r} dS \,.\, F_{0,1,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2}{\partial c^2}\int_S \frac{1}{r} dS \,.\, F_{0,0,1}(\tau, t) +$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \left\{ \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h+2}\,\partial b^{2k}\,\partial c^{2l}} \int_S r^{2m-1} dS \int_\tau^\theta F_{h,k,l}(\xi, \tau)\, F_{1,0,0}(\tau, t)\, d\xi + \right.$$

$$+ \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h}\,\partial b^{2k+2}\,\partial c^{2l}} \int_S r^{2m-1} dS \int_\tau^\theta F_{h,k,l}(\xi, \tau)\, F_{0,1,0}(\tau, t)\, d\xi +$$

$$\left. + \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h}\,\partial b^{2k}\,\partial c^{2l+2}} \int_S r^{2m-1} dS \int_\tau^\theta F_{h,k,l}(\xi, \tau)\, F_{0,0,1}(\tau, t)\, d\xi \right\}$$

et par suite

$$\int_t^\theta d\tau \int_\sigma \left\{\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz\right\} d\sigma =$$

$$= \int_t^\theta \left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}\int_S \frac{1}{r} dS \,.\, F_{1,0,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2}{\partial b^2}\int_S \frac{1}{r} dS \,.\, F_{0,1,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2}{\partial c^2}\int_S \frac{1}{r} dS \,.\, F_{0,0,1}(\tau, t)\right\} d\tau +$$

$$+ \int_t^\theta d\tau \sum_2^\infty m \frac{(-1)^{m-1}}{(2(m-1))!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2h}\,\partial b^{2k}\,\partial c^{2l}} \int_S r^{2m-3} dS \left\{ \int_\tau^\theta \{F_{h-1,k,l}(\xi, \tau)\, F_{1,0,0}(\tau, t) + \right.$$

$$\left. F_{h,k-1,l}(\xi, \tau)\, F_{0,1,0}(\tau, t) + F_{h,k,l-1}(\xi, \tau)\, F_{0,0,1}(\tau, t)\} d\xi \right. .$$

Mais

$$\int_t^\theta d\tau \int_\tau^\theta \{F_{h-1,k,l}(\xi, \tau)\, F_{1,0,0}(\tau, t) + F_{h,k-1,l}(\xi, \tau)\, F_{0,1,0}(\tau, t) +$$

$$+ F_{h,k,l-1}(\xi, \tau)\, F_{0,0,1}(\tau, t)\} d\xi$$

$$= \int_t^\Theta d\xi \int_t^\xi F_{h-1,k,l}(\xi, r) F_{1,0,0}(r, t) + F_{h,k-1,l}(\xi, r) F_{0,1,0}(r, t) +$$

$$+ F_{h,k,l-1}(\xi, r) F_{0,0,1}(r, t) \} dr =$$

$$\int_t^\Theta F_{h,k,l}(\xi, t) d\xi .$$

Donc

$$\int_t^\Theta d\tau \int_\sigma \left\{ \frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\sigma =$$

$$= \int_t^\Theta \sum_1^\infty \frac{(-1)^{m-1}}{(2(m-1))!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-3} dS . F_{h,k,l}(\tau, t) d\tau ,$$

d'où l'on tire, en ayant égard à l'équation (15),

$$\text{(II)} \int_\sigma \left\{ \frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta d\tau \left(\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right) \right\} d\sigma =$$

$$= -4\pi .$$

La propriété de $V(x, y, z | t, \Theta)$ renfermée dans cette formule est celle que nous voulions obtenir et dont nous ferons usage.

Art. 6ème. L'équation fondamentale.

1. Si le pôle est externe au domaine S on pourra, dans la formule (I) remplacer v par V car V est régulière dans S, mais, si le pôle est interne, pour appliquer la formule (I) il faudra retrancher du domaine S un domaine environnant le pôle. Soit ω le contour de ce dernier domaine. L'équation de réciprocité (I) deviendra alors

$$\text{(I')} \qquad H_\sigma([u, V], \Theta) + H_\omega([u, V], \Theta) = 0 .$$

Prenons pour ω une sphère ayant le centre dans le pôle, et tâchons de calculer (Voir § 3 Art. 2) $\lim H'_\omega([u, V], \Theta)$ et $\lim H''_\omega([u, V], \Theta)$ en supposant que le rayon de cette sphère devient infiniment petit.

2. Supposons, pour simplifier, que le pôle soit l'origine. On aura

$$\Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\,\middle|\, r, t\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m}{m!\,2^{2m}} \sum_{h+k+l=m} F_{h,k,l}(r,t)\, g_{h,k,l}$$

où

$$g_{h,k,l} = (2h)!(2k)!(2l)! \sum_{0}^{h}{}_\alpha \sum_{0}^{k}{}_\beta \sum_{0}^{l}{}_\gamma (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} \frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!}{(\alpha+\beta+\gamma)!} \frac{\left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha} \left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta} \left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma}}{(2\alpha)!(2\beta)!(2\gamma)!(h-\alpha)!(k-\beta)!(l-\gamma)!}.$$

Or, Ω étant la sphère de rayon 1 ayant le centre à l'origine, on a

$$\int_\Omega \left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha} \left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta} \left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma} d\Omega = \frac{(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!\,(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,(2(\alpha+\beta+\gamma)+1)!}\,4\pi,$$

et par suite

$$\int_\Omega g_{h,k,l}\, d\Omega = 4\pi(2h)!(2k)!(2l)! \sum_{0}^{h}{}_\alpha \sum_{0}^{k}{}_\beta \sum_{0}^{l}{}_\gamma \frac{(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}}{[2(\alpha+\beta+\gamma)+1]\alpha!(h-\alpha)!\beta!(k-\beta)!\gamma!(l-\gamma)!} =$$

$$= 4\pi \frac{2^m\, m!\,(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}{h!\,k!\,l!\,1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2m+1)}$$

On déduit de là

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\,\middle|\, r, t\right) d\Omega = 4\pi \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m m!}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \frac{(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}{h!\,k!\,l!} F_{h,k,l}(r,t) =$$

$$= 4\pi S(r,t).$$

En tenant compte de l'ordre de l'infini de V dans le pôle on a facilement

$$\lim H'_\omega([u, V], \Theta) = -\lim \int_0^\Theta dt \int_\omega u(t) \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\omega = -\lim \int_0^\Theta u_0(t)\, dt \int_\omega \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\omega,$$

ayant posé pour simplifier

$$u_0(t) = u(0, 0, 0, t).$$

Dans la formule précédente il faut remplacer $\frac{\partial V(t)}{\partial n}$ par

$$\frac{1}{r^2}\left(1 - \int_r^\infty \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\,\middle|\, r, t\right) dr\right)$$

et $d\omega$ par $r^2 d\Omega$, donc

$$\lim H'_\omega([u, V], \Theta) = -\int_0^\Theta u_0(t)\,dt \int_\Omega \left\{ 1 + \int_t^\Theta \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \middle| \tau, t\right) d\tau \right\} d\Omega =$$

$$= -4\pi \int_0^\Theta u_0(t)\left[1 + \int_t^\Theta S(\tau, t)\,d\tau\right] dt.$$

De même on trouve

$$\lim H''_\omega([u, V], \Theta) = -4\pi \int_0^\Theta u_0(t)\,dt \int_t^\Theta T(\tau, t)\,d\tau,$$

et par des procédés analogues à ceux que nous avons appliqués précédemment on peut calculer $T(\tau, t)$. On a ainsi

$$T(\tau, t) = -\sum_1^\infty {}_m \frac{(-1)^m m!}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \frac{(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}{h!\,k!\,l!} F_{h,k,l}(\tau, t) = -S(\tau, t).$$

C'est pourquoi

$$\lim H_\omega([u, V], \Theta) = \lim H'_\omega([u, V], \Theta) + \lim H''_\omega([u, V], \Theta) = -4\pi \int_0^\Theta u_0(t)\,dt.$$

En vertu de la formule (I') nous aurons donc

$$4\pi \int_0^\Theta u_0(t)\,dt = H_\sigma([u, V], \Theta)$$

c'est à dire

$$u_0(\Theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{d\Theta} H_\sigma([u, V], \Theta). \tag{III}$$

La formule que nous venons de trouver sera appelée la *formule fondamentale*. Nous avons supprimé les calculs pour déterminer directement $T(\tau, t)$ qui sont assez longs, parce-que dans l'art. suivant nous donneront une autre méthode pour trouver la formule fondamentale.

Art. 7ème. **Deuxième méthode pour obtenir la formule fondamentale.**

1. En ayant égard à l'ordre d'infini de V dans le pôle on a évidemment, si le rayon de la sphère ω devient infiniment petit,

$$(16)\quad \lim \left\{ \int_\omega V(t)\frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta d\tau \int_\omega V(\tau)\left[\frac{\partial u(t)}{\partial x} f(\tau, t)\cos nx + \frac{\partial u(t)}{\partial y}\varphi(\tau, t)\cos ny + \frac{\partial u(t)}{\partial z}\psi(\tau, t)\cos nz\right] d\omega \right\} = 0$$

$$(17)\quad \lim \left\{ \int_\omega u(t)\frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta dt \int_\omega u(t)\left[\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t)\cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y}\varphi(\tau, t)\cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z}\psi(\tau, t)\cos nz\right] d\omega \right\} =$$

$$= u_0(t)\int_\omega \left\{\frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta d\tau\left[\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t)\cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y}\varphi(\tau, t)\cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z}\psi(\tau, t)\cos nz\right]\right\} d\omega = 4\pi u_0(t).$$

En effet, à cause de la formule (II),

$$\int_\omega \left\{\frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta d\tau\left[\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t)\cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y}\varphi(\tau, t)\cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z}\psi(\tau, t)\cos nz\right]\right\} d\omega$$

est indépendent de la grandeur de la sphère ω et est égal à 4π parce-que la normale n est dirigée vers l'intérieur de la sphère.

2. Par l'application des formules (16) et (17) on trouve

$$\lim H_\omega([u, V], \Theta) = -4\pi\int_0^\Theta u_0(t)\,dt$$

et en vertu de la relation

$$H_\sigma([u, V], \Theta) + H_\omega([u, V], \Theta) = 0 \tag{I'}$$

on a

$$4\pi \int_0^\Theta u_0(t)\,dt = H_\sigma([u, V], \Theta),$$

d'où découle la *formule fondamentale*

$$u_0(\Theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta} H_\sigma([u, V], \Theta). \tag{III}$$

Art. 8ème. **Remarques sur la formule fondamentale.**

1. La formule (III) exprime la valeur de la solution u régulière de l'équation (A) dans un point interne au domaine S par les valeurs de u et de ses dérivées du premier ordre au contour σ de S.

Elle correspond au théorème de Green, car elle joue par rapport à l'équation (A) le même rôle joué par la formule de Green par rapport à l'équation de Laplace.

2. Si l'on veut éliminer les dérivées de u au contour σ, remarquons que, w étant une solution régulière de l'équation (A), on aura, en appliquant le théorème de réciprocité,

$$H_\sigma([u, w], \Theta) = 0.$$

C'est pourquoi à cause de la formule fondamentale

$$u_0(\Theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta} H_\sigma([u, V + w], \Theta). \tag{IV}$$

Si $V + w$ sera nulle sur σ, dans le second membre de l'équation précédente ne paraîtront que les valeurs de u sur σ. Par conséquent l'équation (IV) résoudra le problème de *déterminer la solution regulière u à l'intérieur de S pour $t = \Theta$ les valeurs de u étant connues au contour σ pour t comprise entre* 0 *et Θ*. Par exemple si σ est un plan on peut calculer w par la méthode des images.

3. En multipliant par dS et intégrant, l'équation (A') amène à l'égalité

$$\int_\sigma \left\{ \frac{dv(t)}{dn} + \int_t^\Theta \left(\frac{\partial v(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{dv(\tau)}{dy} \varphi(\tau, t) \cos ny + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{dv(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right) d\tau \right\} d\sigma = 0,$$

v étant une solution régulière de l'équation adjointe. À cause de l'équation (II) il n'est donc pas possible de trouver une solution v régulière de l'équation adjointe telle que

$$\frac{\partial v(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\tau =$$

$$= \frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\tau .$$

Mais si V_A et V_B sont deux solutions fondamentales de l'équation adjointe correspondantes aux pôles A et B internes au domaine S et

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

l'équation

$$\frac{\partial v(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\tau =$$

$$\frac{\partial V_{AB}(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial V_{AB}(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V_{AB}(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial V_{AB}(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\tau$$

n'est pas impossible, v étant une solution régulière de l'équation adjointe.

Or

$$H_\sigma([u, v], \Theta) = 0$$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} H_\sigma([u, V_A], \Theta) = u_A(\Theta)$$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} H_\sigma([u, V_B], \Theta) = u_B(\Theta)$$

$u_A(\Theta)$ et $u_B(\Theta)$ étant les valeurs de $u(x, y, z, t)$ dans les points A et B pour $t = \Theta$. C'est pourquoi

$$\text{(V)} \qquad \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} H_\sigma([u, V_{AB} - v], \Theta) = u_A(\Theta) - u_B(\Theta)$$

Mais

$$H_\sigma([u, V_{AB} - v], \Theta) =$$

$$= \int_0^\Theta dt \int_\sigma \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \left(\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t, \tau) \cos nx + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t, \tau) \cos ny + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t, \tau) \cos nz \right) d\tau \right\} (V_{AB} - v)\, d\sigma,$$

il suffira donc de connaître au contour l'expression

$$\frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \left(\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t, \tau) \cos nx + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t, \tau) \cos ny + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t, \tau) \cos nz \right) d\tau,$$

pour les valeurs de t comprises entre o et Θ, pour obtenir, par la formule (V), les différences des valeurs de u dans les différents points de S pour $t = \Theta$. (Voir Art. 1er. § 3).

Art. 9ème. Remarques générales.

1. Si au lieu de l'équation (A) on avait l'équation intégro-différentielle

$$(\mathrm{A}'') \quad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = X(x, y, z, t)$$

posons

$$\int_0^\Theta dt \int_S v(t)\, X(x, y, z, t)\, dS = K([X, v], \Theta),$$

alors l'équation (III) devrait être remplacée par l'autre

$$u_0(\Theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{d\Theta} \{ H_\sigma([u, V], \Theta) - K([X, V], \Theta) \}.$$

On en tire que la fonction

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d}{d\Theta} K([X, V], \Theta)$$

vérifie l'équation (A″) dans le domaine S. On pourrait déduire de là un théorème analogue à celui de Poisson.

2. Soit

$$
(18)\qquad \begin{cases}
u(x,y,z,t) + \displaystyle\int_0^t u(x,y,z,\tau)\, f(t,\tau)\, d\tau = U(x,y,z,t), \\
u(x,y,z,t) + \displaystyle\int_0^t u(x,y,z,\tau)\, \varphi(t,\tau)\, d\tau = V(x,y,z,t), \\
u(x,y,z,t) + \displaystyle\int_0^t u(x,y,z,\tau)\, \psi(t,\tau)\, d\tau = W(x,y,z,t).
\end{cases}
$$

En résolvant ces équations intégrales on aura

$$
(19)\qquad \begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= U(x,y,z,t) + \int_0^t U(x,y,z,\tau)\, f'(t,\tau)\, d\tau = \\
&= V(x,y,z,t) + \int_0^t V(x,y,z,\tau)\, \varphi'(t,\tau)\, d\tau = \\
&= W(x,y,z,t) + \int_0^t W(x,y,z,\tau)\, \psi'(t,\tau)\, d\tau,
\end{aligned}
$$

et l'équation (A) pourra s'écrire

$$
(20)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0.
$$

Donc l'équation (A) peut être ramenée à *un système constitué de deux équations intégrales simultanées* (19) *et de l'équation différentielle* (20) *avec les trois fonctions inconnues* U, V, W.

On peut remarquer qu'en général ces équations ne peuvent pas se séparer et par suite *le problème de la résolution des équations intégro-différentielles est en général un problème essentiellement distinct des problèmes des équations différentielles et des problèmes des équations intégrales.*

Mais dans quelques cas particuliers la séparation est possible. C'est ainsi que si $f = \varphi = \psi$, on aura

$$
U = V = W
$$

et l'équation (20) deviendra

$$\Delta^2 U = 0. \tag{20'}$$

La question sera donc ramenée à l'équation différentielle (20') et à la première des équations intégrales (19) ou des équations intégrales (18).

CHAPITRE $2^{\text{ème}}$.

Théorie mathématique de l'élasticité en ayant égard à l'hérédité.

Art. 1^{er}. Considérations préliminaires.

1. Envisageons le cas élémentaire de la torsion d'un fil. Soit ω l'angle de torsion et M le moment de torsion. Dans la théorie ordinaire de l'élasticité on regarde, dans l'équilibre, ω proportionnel à M et l'on écrit

$$\omega = KM, \tag{1}$$

K étant un coefficient constant.

Cette équation n'est qu'une équation approximative, car on néglige toute action héréditaire. Si l'on veut tenir compte de l'hérédité, c'est à dire si l'on veut tenir compte que ω dépend de toute l'histoire du moment de torsion, il faudra corriger l'équation (1) en écrivant

$$\omega = KM + \dot{\Phi},$$

où Φ est une quantité qui dépend de toutes les valeurs prises par M dépuis le temps $-\infty$ jusqu'à l'instant actuel.

Soit t l'instant actuel, en faisant usage d'une notation que nous avons adoptée en plusieurs occasions, nous écrirons

$$\omega(t) = KM(t) + \Phi\left|\left[M(\overset{t}{\underset{-\infty}{\tau}})\right]\right|.$$

Le symbole

$$\Phi\left|\left[M(\overset{t}{\underset{-\infty}{\tau}})\right]\right|$$

désigne une quantité qui dépend de toutes les valeurs prises par la fonction $M(\tau)$, τ variant dépuis $-\infty$ jusqu'à t.

2. En supposant vérifiées certaines conditions Φ sera développable dans une série analogue à celle de TAYLOR[1] et l'on aura

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{-\infty}^{t} M(\tau)F(t,\tau)d\tau + \frac{1}{1.2}\int_{-\infty}^{t} M(\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{t} M(\tau_2)F(t,\tau_1,\tau_2)d\tau_2 +$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\int_{-\infty}^{t} M(\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{t} M(\tau_2)d\tau_2 \int_{-\infty}^{t} M(\tau_3)F(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3)d\tau_3 + \ldots .$$

Supposons maintenant que tous les termes de la série d'ordre supérieur au premier soient négligeables. On aura alors

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{-\infty}^{t} M(\tau)F(t,\tau)d\tau. \tag{2}$$

Nous dirons dans ce cas que *l'hérédite est linéaire.*

Si l'histoire du fil antérieure à un instant t_0 est négligeable, l'équation précédente pourra s'écrire

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{t_0}^{t} M(\tau)F(t,\tau)d\tau. \tag{2'}$$

En résolvant cette équation intégrale par rapport à $M(\tau)$ on trouvera

$$M(t) = \frac{1}{K}\omega(t) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)f(t,\tau)d\tau. \tag{3}$$

3. Les équations (2), (2'), (3) seront les équations fondamentales de l'équilibre élastique de torsion dans le cas de l'hérédité linéaire. Il faut ajouter qu'elles seront valables lorsque l'accélération angulaire de la torsion sera négligeable.

$F(t,\tau)$ sera le *coefficient d'hérédité.* Voici son interprétation physique: $F(t,\tau)d\tau$ *mesure la torsion induite à l'instant t par un moment de torsion unitaire agissant dans l'intervalle de temps* $(\tau, \tau + d\tau)$. Réciproquement: $f(t,\tau)d\tau$ *mesure le moment de torsion à l'instant t qui fait équilibre à une torsion unitaire à laquelle le fil a été assujetti pendant l'intervalle de temps* $(\tau, \tau + d\tau)$.

4. Dans l'hypothèse que la valeur absolue du moment de torsion soit tou-

[1] Sopra la funzioni che dipendono da altre funzioni Nota I. Rend. Acc. dei Lincei, Vol. III, § 3.

jours inférieure à une limite finie il faudra admettre que le coefficient d'hérédité soit infiniment petit pour $\tau = -\infty$. Nous supposerons

$$|F(t,\tau)| < \frac{C}{(t-\tau)^{1+\varepsilon}} \tag{4}$$

où $\varepsilon > 0$ et C est une constante finie positive.

Art. 2ème. Principe du cycle fermé.

1. Soit A un point du plan ayant pour coordonnées rectangulaires ω et M. Il décrit une ligne pendant que M et ω varient. Si M et ω sont des fonctions périodiques du temps ayant la même période, cette ligne constitue un cycle fermé. Supposons maintenant que *chaque fois que M est une fonction périodique de τ avec une certaine période, ω soit aussi une fonction périodique de t avec la même période.* Nous désignérons cette condition par *condition du cycle fermé.*

Il est évident qu'il faudra admettre la périodicité depuis le temps $-\infty$, c'est à dire qu'il faudra partir de l'équation (2) où la limite inférieure de l'intégrale est $-\infty$.

2. Soit $T > 0$ la période. Nous aurons

$$\omega(t+T) = KM(t+T) + \int_{-\infty}^{t+T} M(\tau)F(t+T,\tau)\,d\tau,$$

et, en vertu de la condition du cycle fermé,

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{-\infty}^{t+T} M(\tau)F(t+T,\tau)\,d\tau.$$

Par suite

$$\int_{-\infty}^{t} M(\tau)F(t,\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t+T} M(\tau)F(t+T,\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} M(\tau)F(t+T,\tau+T)\,d\tau.$$

Puisque $M(\tau)$ est une fonction périodique arbitraire ayant la période T, on déduit de l'égalité précédente

$$F(t,r)+\sum_1^\infty{}_n F(t,r-nT)=F(t+T,r+T)+\sum_0^\infty{}_n F(t+T,r-nT)$$

où r est compris entre t et $t-T$.

Les deux séries étant convergentes à cause de la condition (4), il sera

$$\left|\sum_1^\infty{}_n F(t,r-nT)\right|<\frac{C}{T^{1+\varepsilon}}\sum_1^\infty{}_n\frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

$$\left|\sum_0^\infty{}_n F(t+T,r-nT)\right|<\frac{C}{T^{1+\varepsilon}}\sum_1^\infty{}_n\frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

d'où

$$F(t,r)=F(t+T,r+T)+\frac{2C\eta}{T^{1+\varepsilon}}\sum_1^\infty{}_n\frac{1}{n^{1+\varepsilon}},\tag{5}$$

η étant un nombre compris entre $+1$ et -1.

Soit

$$\vartheta<T-(t-r).$$

$T-\vartheta$ sera positif et $r+\vartheta$ sera compris entre $t+\vartheta$ et $t+\vartheta-(T-\vartheta)$: c'est pourquoi dans l'équation (5) on pourra remplacer respectivement t, r, T par $t+\vartheta$, $r+\vartheta$, $T-\vartheta$. On aura ainsi

$$F(t+\vartheta,r+\vartheta)=F(t+T,r+T)+\frac{2C\eta'}{(T-\vartheta)^{1+\varepsilon}}\sum_1^\infty{}_n\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\tag{5'}$$

η' étant un nombre compris entre $+1$ et -1.

En retranchant les équations (5) et (5') il viendra

$$F(t,r)-F(t+\vartheta,r+\vartheta)=\left(\frac{2C\eta}{T^{1+\varepsilon}}-\frac{2C\eta'}{(T-\vartheta)^{1+\varepsilon}}\right)\sum_1^\infty{}_n\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Or l'équation précédente doit être vérifiée quelque soit la grandeur de T, on aura donc

$$F(t,r)=F(t+\vartheta,r+\vartheta)$$

quelque soit ϑ.

On tire de là que $F(t,r)$ *doit être fonction de la différence* $t-r$.

3. Réciproquement on peut démontrer:

Si F est une fonction de la différence $t-r$, la condition du cycle fermé sera vérifiée.

En effet si

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{-\infty}^{t} M(\tau)F(t-\tau)d\tau$$

on aura

$$\omega(t+T) = KM(t+T) + \int_{-\infty}^{T+t} M(\tau)F(t+T-\tau)d\tau$$

$$= KM(t+T) + \int_{-\infty}^{t} M(\tau+T)F(t-\tau)d\tau\,.$$

Donc si $M(\tau)$ est une fonction périodique avec la période T, $\omega(t)$ sera aussi une fonction périodique avec la même période.

4. Si nous nous rapportons à ce que nous avons dit dans le § 3 du 1er Art., nous pourrons interpréter la condition que F soit une fonction de $t-\tau$ de la manière suivante: *la torsion induite après un intervalle de temps donné par un moment de torsion est invariable quelque soit l'instant où le moment de torsion a agi.*

Nous appellerons cette condition *l'invariabilité de l'hérédité.*

Les propositions des §§ 2 et 3 nous amènent au théorème suivant:

La condition du cycle fermé porte pour conséquence celle de l'invariabilité de l'hérédité, et réciproquement la condition de l'invariabilité de l'hérédité porte pour conséquence celle du cycle fermé.

Ce théorème sera nommé *principe du cycle fermé.*

Art. 3ème. **Détermination du coefficient d'hérédité.**

1. La condition du cycle fermé étant vérifiée, et l'histoire du fil antérieure à l'instant o étant négligeable, on aura

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{0}^{t} M(\tau)F(t-\tau)d\tau\,.$$

Posons $t-\tau=\sigma$, il viendra

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{0}^{t} F(\sigma)M(t-\sigma)d\sigma\,.$$

2. Si nous supposons que $M(t)$, $\frac{dM(t)}{dt}$, $\frac{d^2M(t)}{dt^2}$, ... $\frac{d^{n-1}M(t)}{dt^{n-1}}$ soient nulles pour $t=0$, tandis que $\frac{d^nM(t)}{dt^n}$ ne soit pas nulle pour $t=0$, on aura

$$\omega^{(n)}(t) = KM^{(n)}(t) + \int_0^t F(\sigma)M^{(n)}(t-\sigma)d\sigma, \tag{6}$$

d'où l'on tire

$$K = \frac{\omega^{(n)}(0)}{M^{(n)}(0)}.$$

Dérivant l'équation intégrale (6), il viendra

$$\omega^{(n+1)}(t) - KM^{(n+1)}(t) = M^{(n)}(0)F(t) + \int_0^t F(\sigma)M^{(n+1)}(t-\sigma)d\sigma.$$

Donc en connaissant $\omega(t)$ et $M(t)$ on pourra calculer $F(t)$ par la résolution de l'équation intégrale précédente.

Art. 4ème. Équations générales de l'élasticité dans le cas de l'hérédité linéaire.

1. Après avoir envisagé, comme exemple, le cas particulier de la torsion nous allons passer au cas général.

Nous prendrons comme équations indéfinies fondamentales de l'équilibre élastique les équations

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial t_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial t_{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial t_{13}}{\partial z} = \varrho X, \\ \dfrac{\partial t_{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial t_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial t_{23}}{\partial z} = \varrho Y, \\ \dfrac{\partial t_{31}}{\partial x} + \dfrac{\partial t_{32}}{\partial y} + \dfrac{\partial t_{33}}{\partial z} = \varrho Z. \end{cases}$$

et comme équations au coutour σ du corps élastique

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} t_{11}\cos nx + t_{12}\cos ny + t_{13}\cos nz = X_\sigma, \\ t_{21}\cos nx + t_{22}\cos ny + t_{23}\cos nz = Y_\sigma, \\ t_{31}\cos nx + t_{32}\cos ny + t_{33}\cos nz = Z_\sigma, \end{cases}$$

où les quantités $t_{is} = t_{si}$ sont les *caractéristiques de la tension* (c'est à dire le *stress*), ϱX, ϱY, ϱZ; X_σ, Y_σ, Z_σ sont respectivement les composantes des forces de masse et des tensions superficielles, n est la normale interne au contour.

2. Les relations qui définiront à chaque instant les conditions d'hérédité seront

$$\text{(III)} \qquad t_{is}(t) = \sum_{hk} a_{is|hk}\gamma_{hk}(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{hk} \varphi_{is|hk}(t, \tau)\gamma_{hk}(\tau)d\tau,$$

où les quantités $\gamma_{hk} = \gamma_{kh}$ désignent les *caractéristiques de la déformation* (c'est à dire le *strain*). Les sommes qui paraissent dans les égalités précédentes sont étendues à toutes les combinaisons avec repétition de h et k (h, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). On a supposé que, antérieurement à l'instant t_0, l'hérédité soit négligeable. Les coefficients $a_{is|hk} = a_{si|hk} = a_{is|kh}$ seront en général des fonctions des coordonnées x, y, z des points du corps élastique. De même $\varphi_{is|hk} = \varphi_{si|hk} = \varphi_{is|kh}$ seront en général des fonctions de x, y, z, t, τ. On n'a mis en évidence que ces dernières variables pour simplifier l'écriture des formules. Ce n'est que dans le cas de l'homogénéité que nous supposerons que $a_{is|hk}$, $\varphi_{is|hk}$ soient indépendantes des coordonnées x, y, z.

3. Lorsqu'on néglige les termes intégrales dans les équations (III) elles expriment la *loi de Hooke*. Les termes intégrales donnent, dans une première approximation, la correction due à l'hérédité. En effet nous supposerons que la correction totale due à l'herédité s'obtienne en ajoutant des quantités qui dépendent de toutes les valeurs prises par les quantitées $\gamma_{hk}(\tau)$ pour les valeurs de τ comprises entre t_0 et t. En outre nous supposerons que ces quantitées soient développables en séries analogues à celle de TAYLOR et que dans ces développements on puisse négliger tous les termes qui ne sont pas linéaires par rapport aux fonctions γ_{hk}. C'est pourquoi les équations (III) expriment les relations plus générales de l'*hérédité linéaire élastique*.

Nous addmettrons que le déterminant du $6^{\text{ème}}$ ordre formé avec les coefficients $a_{is|hk}$ ne soit pas nul. Les équations intégrales (III) seront alors résolubles par rapport aux quantités γ_{hk}. En les résolvant on exprimera le *strain* par le *stress*.

Il n'y a aucune difficulté à étendre aux coefficients $\varphi_{is|hk}(t, \tau)$ l'interprétation que nous avons donnée dans le 1^{er} Art. au coefficient $F(t, \tau)$. De même on peut étendre au cas général, que nous considérons maintenant, le principe du cycle fermé que nous avons envisagé avec détail dans le cas particulier de la torsion. Nous appellerons les quantités $\varphi_{is|hk}$ les *coefficients d'hérédité*.

5. Soient u, v, w les composantes du déplacement des particules du corps

élastique. Nous aurons

$$
\text{(IV)} \quad \begin{cases} \gamma_{11} = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \; \gamma_{22} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \; \gamma_{33} = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\[2ex] \gamma_{23} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, \; \gamma_{31} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, \; \gamma_{12} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}
$$

Remplaçons dans les équations (I) les quantités t_{is} par les expressions données par les formules (III) et dans ces expressions posons les seconds membres des équations (IV) à la place des quantités γ_{hk}. On obtiendra trois équations *intégro-différentielles*. Elles sont les *équations intégro-différentielles générales de l'élasticité dans le cas de l'hérédité linéaire*.

Leur étude sera le sujet des articles suivants.

Art. 5ème. Équations adjointes, théorème de réciprocité, caractéristiques.

1. L'étude des équations intégro-différentielles que nous venons de trouver se fera en les accouplant avec d'autres équations intégro-différentielles qu'on appellera les équations adjointes.

On les obtient en écrivant

$$
\text{(I')} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial t'_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{13}}{\partial z} = \varrho X' \\[2ex] \dfrac{\partial t'_{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{23}}{\partial z} = \varrho Y' \\[2ex] \dfrac{\partial t'_{31}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{32}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{33}}{\partial z} = \varrho Z' \end{cases}
$$

$$
\text{(II')} \quad \begin{cases} t'_{11} \cos nx + t'_{12} \cos ny + t'_{13} \cos nz = X'_\sigma \\ t'_{21} \cos nx + t'_{22} \cos ny + t'_{23} \cos nz = Y'_\sigma \\ t'_{31} \cos nx + t'_{32} \cos ny + t'_{33} \cos nz = Z'_\sigma \end{cases}
$$

$$
\text{(III')} \quad t'_{si}(t) = t'_{is}(t) = \sum_{hk} a_{hk|is} \gamma'_{hk}(t) + \int_t^T \sum_{hk} \varphi_{hk|is}(\tau, t) \gamma'_{hk}(\tau) \, d\tau
$$

$$
\text{(IV')} \quad \begin{cases} \gamma'_{11} = \dfrac{\partial u'}{\partial x}, \; \gamma'_{22} = \dfrac{\partial v'}{\partial y}, \; \gamma'_{33} = \dfrac{\partial w'}{\partial z} \\[2ex] \gamma'_{23} = \gamma'_{32} = \dfrac{\partial w'}{\partial y} + \dfrac{\partial v'}{\partial z}, \; \gamma'_{31} = \gamma'_{13} = \dfrac{\partial u'}{\partial z} + \dfrac{\partial w'}{\partial x}, \; \gamma'_{12} = \gamma'_{21} = \dfrac{\partial v'}{\partial x} + \dfrac{\partial u'}{\partial y}. \end{cases}
$$

Les trois equations intégro-différentielles auxquelles satisfont u', v', w' qu'on obtient en éliminant γ'_{hk} et t'_{is} des systèmes (I'), (III'), (IV') sont les *équations adjointes.*

2. On déduit facilement des équations (III)

$$\int_{t_0}^{T} \sum_{is} t_{is}(t)\gamma'_{is}(t)\,dt = \int_{t_0}^{T} \sum_{is}\sum_{hk} a_{is|hk}\gamma'_{is}(t)\gamma_{hk}(t)\,dt + \int_{t_0}^{T} dt \int_{t_0}^{t} \sum_{is}\sum_{hk} \varphi_{is|hk}(t,\tau)\gamma'_{is}(t)\gamma_{hk}(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \sum_{hk}\sum_{is} a_{hk|is}\gamma'_{hk}(t)\gamma_{is}(t)\,dt + \int_{t_0}^{T} dt \int_{t}^{T} \sum_{hk}\sum_{is} \varphi_{hk|is}(\tau,t)\gamma'_{hk}(\tau)\gamma_{is}(t)\,d\tau.$$

Mais à cause des équations (III') on a

$$\int_{t_0}^{T} \sum_{hk}\sum_{is} a_{hk|is}\gamma'_{hk}(t)\gamma_{is}(t)\,dt + \int_{t_0}^{T} dt \int_{t}^{T} \sum_{hk}\sum_{is} \varphi_{hk|is}(\tau,t)\gamma'_{hk}(\tau)\gamma_{is}(t)\,d\tau = \int_{t_0}^{T} \sum_{is} t'_{is}(t)\gamma_{is}(t)\,dt,$$

donc

$$\int_{t_0}^{T} \sum_{is} t_{is}(t)\gamma'_{is}(t)\,dt = \int_{t_0}^{T} \sum_{is} t'_{is}(t)\gamma_{is}(t)\,dt$$

et par suite

$$\int_{t_0}^{T} dt \int_{S} \sum_{is} t_{is}(t)\gamma'_{is}(t)\,dS = \int_{t_0}^{T} dt \int_{S} \sum_{is} t'_{is}(t)\gamma_{is}(t)\,dS,$$

S étant l'espace occupé par le corps élastique. Remplaçons maintenant γ'_{is} et γ_{is} par les seconds membres des équations (IV') et (IV). Par des intégrations par parties l'équation précédente devient

$$\int_{t_0}^{T} dt \Bigg[\int_S \Big\{ u' \left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} \right) + v' \left(\frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} \right) +$$

$$+ w' \left(\frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} \right) \Big\} dS +$$

$$+ \int_\sigma \Big\{ u' (t_{11} \cos nx + t_{12} \cos ny + t_{13} \cos nz) + v' (t_{21} \cos nx + t_{22} \cos ny + t_{23} \cos nz) +$$

$$+ w' (t_{31} \cos nx + t_{32} \cos ny + t_{33} \cos nz) \Big\} d\sigma \Bigg] =$$

$$\int_{t_0}^{T} dt \Bigg[\int_S \Big\{ u \left(\frac{\partial t'_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t'_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t'_{13}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial t'_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t'_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t'_{23}}{\partial z} \right) +$$

$$+ w \left(\frac{\partial t'_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t'_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t'_{33}}{\partial z} \right) \Big\} dS +$$

$$+ \int_\sigma \Big\{ u (t'_{11} \cos nx + t'_{12} \cos ny + t'_{13} \cos nz) + v (t'_{21} \cos nx + t'_{22} \cos ny + t'_{23} \cos nz) +$$

$$+ w (t'_{31} \cos nx + t'_{32} \cos nz + t'_{33} \cos nz) \Big\} d\sigma \Bigg],$$

et en vertu des équations (I), (II), (I'), (II'), l'égalité précédente s'écrira

$$\text{(A)} \qquad \int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_S (\varrho X u' + \varrho Y v' + \varrho Z w') dS + \int_\sigma (X_\sigma u' + Y_\sigma v' + Z_\sigma w') d\sigma \right\} =$$

$$\int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_S (\varrho X' u + \varrho Y' v + \varrho Z' w) dS + \int_\sigma (X'_\sigma u + Y'_\sigma v + Z'_\sigma w) d\sigma \right\}.$$

Le théorème renfermé dans cette formule est le *théorème de réciprocité.* Il est analogue au théorème de réciprocité que nous avons considéré dans l'Art. 2ème du premier Chapitre et il sera la base des méthodes que nous allons développer. On peut comparer ce théorème avec le théorème de BETTI pour les cas ordinaires de l'élasticité.[1]

Pour simplifier nous écrirons aussi l'équation (A) sous la forme

$$\text{(A)} \qquad \int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_S \Sigma \varrho X u' dS + \int_\sigma \Sigma X_\sigma u' d\sigma \right\} = \int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_S \Sigma \varrho X' u ds + \int_\sigma \Sigma X'_\sigma u d\sigma \right\}.$$

[1] E. BETTI: *Teoria dell' elasticità.* Nuovo Cimento, 1872—73.

3. Par des intégrations par parties on tire des équations (I), (II), (III), (IV), la formule

$$\text{(B)}\qquad \int_S (\varrho X u + \varrho Y v + \varrho Z w)\, dS + \int_\sigma (X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w)\, d\sigma =$$

$$= - \int_S \sum_{is} \sum_{hk} a_{is|hk}\, \gamma_{hk}(t)\, \gamma_{is}(t)\, dS -$$

$$- \int_{t_0}^{T} d\tau \int_S \sum_{is} \sum_{hk} \varphi_{is|hk}(t, \tau)\, \gamma_{is}(t)\, \gamma_{hk}(\tau)\, dS .$$

Supposons que pendant l'intervalle de temps (t_0, T) les forces de masse ϱX, ϱY, ϱZ et le trinôme $X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w$ soient nuls, alors le premier membre de l'équation précédente sera nul aussi.

Or par une substitution ortogonale

$$\gamma_{is}(t) = \sum_{rl} c_{rl|is}\, g_{rl}(t)$$

on pourra ramener la forme quadratique

$$\text{(7)}\qquad \sum_{is} \sum_{hk} a_{is|hk}\, \gamma_{hk}(t)\, \gamma_{is}(t)$$

à la forme

$$\sum_{rl} e_{rl}\, g^2_{rl}(t).$$

L'équation (B) deviendra donc

$$\text{(8)}\qquad \int_S \sum_{rl} e_{rl}\, g^2_{rl}(t)\, dS + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_S \sum_{is} \sum_{hk} \psi_{is|hk}(t, \tau)\, g_{is}(t)\, g_{hk}(\tau)\, dS = 0,$$

où les coefficients $\psi_{is|hk}$ se calculeront très-facilement moyennant les fonctions $\varphi_{is|hk}$ et les coefficients $c_{rl|is}$. Il est évident que les fonctions $\psi_{is|hk}$ seront finies et continues lorsque $\varphi_{is|hk}$ seront finies et continues. Dans cette hypothèse, et, en supposant aussi que la forme (7) soit une forme définie, c'est à dire que les coefficients e_{rl} soient du même signe et ne soient pas nuls, on pourra déduire de l'équation (8), par le même procédé que nous avons suivi dans le premier Art. du Chapitre précédent, que les quantités $g_{rl}(t)$, et par suite, les quantités $\gamma_{rl}(t)$ seront nulles pour t compris entre t_0 et T.

On tire de là que, sous les conditions que nous venons d'énoncer, *étant connu les forces de masse et les déplacements superficiels (ou les tensions superficielles), pendant un intervalle de temps, la déformation du corps sera déterminée dans le même intervalle de temps.*

Art. 6ème. **Corps élastiques isotropes et homogènes.**

1. Si le corps élastique qu'on envisage est isotrope les équations (III) ne doivent pas changer si l'on invertit la direction de chacun des axes coordonnés. Par ces changements de direction des axes on a des changements de signe dans les quantités t_{rs} et γ_{rs}. On trouve ainsi très-aisément les termes qu'il faut éliminer dans les seconds membres des équations (III) lorsque le corps est isotrope. Mais les mêmes équations doivent garder toujours la même forme en échangeant les axes entre eux, c'est pourquoi elles seront

$$(9) \qquad t_{rr} = L\Theta(t) + 2K\gamma_{rr}(t) + \int_{t_0}^{t} (\varphi(t,\tau)\Theta(\tau) + 2\psi(t,\tau)\gamma_{rr}(\tau))\,d\tau,$$

$$t_{rs} = h\gamma_{rs}(t) + \int_{t_0}^{t} \chi(t,\tau)\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau, \quad r \gtrless s$$

$$\Theta = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}.$$

Si nous donnons aux axes une orientation arbitraire, les équations précédentes ne doivent pas changer, par suite on doit avoir

$$K = h, \quad \psi = \chi$$

et en conséquence

$$(9\,\mathrm{a}) \qquad t_{rs} = K\gamma_{rs}(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t,\tau)\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau, \quad r \gtrless s.$$

Le corps élastique étant homogène L et K seront constants et φ et ψ seront indépendants de x, y, z. Nous supposerons L et K du même signe (Voir Art. 4ème, § 2).

2. Donc dans le cas des corps élastiques isotropes et homogènes, en ayant égard à l'hérédité linéaire, on aura les équations[1]

[1] Voir Boltzmann, *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*. Wien Ber 70 S. 275—306, 1874; Pogg. Ann. Erg. — Bd. 7. S. 624, 1876; Wiss. Abl., Bd. 1. S. 616. Voir aussi: O. E. Meyer, Pogg. Ann. 151. S. 360; Wiechert, *Gesetze der elastischen Nachwirkung*.

$$(10)\quad \begin{cases} K\Delta^2 u + (L+K)\dfrac{\partial\Theta(t)}{\partial x} + \\ \qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left\{\psi(t,\tau)\Delta^2 u(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial x}\right\}d\tau = \varrho X(t), \\ K\Delta^2 v + (L+K)\dfrac{\partial\Theta(t)}{\partial y} + \\ \qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left\{\psi(t,\tau)\Delta^2 v(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial y}\right\}d\tau = \varrho Y(t). \\ K\Delta^2 w + (L+K)\dfrac{\partial\Theta(t)}{\partial z} + \\ \qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left\{\psi(t,\tau)\Delta^2 w(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial z}\right\}d\tau = \varrho Z(t). \end{cases}$$

On déduit facilement de ces équations

$$(11)\quad \begin{aligned} &(L+2K)\Delta^2\Theta(t) + \\ &\qquad + \int_{t_0}^{t}(\varphi(t,\tau)+2\psi(t,\tau))\Delta^2\Theta(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\varrho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$(12)\quad \begin{cases} K\Delta^2\omega_1(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\Delta^2\omega_1(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial y} - \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial z}, \\ K\Delta^2\omega_2(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\Delta^2\omega_2(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\varrho X)}{\partial z} - \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial x}. \\ K\Delta^2\omega_3(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\Delta^2\omega_3(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial x} - \frac{\partial(\varrho X)}{\partial y}. \end{cases}$$

où

$$\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},\quad \omega_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},\quad \omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

C'est pourquoi par la résolution de ces équations intégrales on pourra calculer

$$\Delta^2\Theta(t),\ \Delta^2\omega_1(t),\ \Delta^2\omega_2(t),\ \Delta^2\omega_3(t).$$

3. Pour indiquer la résolution de ces équations intégrales et d'autres équations analogues que nous allons trouver, représentons par

$$\varphi = \mathcal{A}_1 f \tag{13}$$

l'opération

$$K f(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t, \tau) f(\tau)\, d\tau = \varphi(t), \tag{14}$$

qui nous amène de la fonction $f(t)$ à la fonction $\varphi(t)$, et écrivons inversement

$$f = \mathcal{A}_1^{-1} \varphi . \tag{13'}$$

Cette opération désigne la résolution de l'équation intégrale précédente.

De même représentons par

$$\varphi = \mathcal{A}_2 f \tag{15}$$

l'opération

$$(L + 2K) f(t) + \int_{t_0}^{t} \{\varphi(t, \tau) + 2\psi(t, \tau)\} f(\tau)\, d\tau = \varphi(t)$$

et par

$$f = \mathcal{A}_2^{-1} \varphi \tag{15'}$$

l'opération inverse.

4. Cela posé les équations (11) et (12) pourront s'écrire

$$\mathcal{A}_2 \Delta^2 \Theta = \frac{\partial(\varrho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial z}, \tag{11'}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \Delta^2 \omega_1 &= \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial y} - \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial z}, \\ \mathcal{A}_1 \Delta^2 \omega_2 &= \frac{\partial(\varrho X)}{\partial z} - \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial x}, \\ \mathcal{A}_1 \Delta^2 \omega_3 &= \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial x} - \frac{\partial(\varrho X)}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{12'}$$

et par suite on aura

$$\Delta^2 \Theta = \mathcal{A}_2^{-1} \left(\frac{\partial(\varrho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial z} \right). \tag{11''}$$

$$(12'')\qquad\begin{cases}\Delta^2\omega_1 = A_1^{-1}\left(\dfrac{\partial(\varrho Z)}{\partial y} - \dfrac{\partial(\varrho Y)}{\partial z}\right),\\[2mm] \Delta^2\omega_2 = A_1^{-1}\left(\dfrac{\partial(\varrho X)}{\partial z} - \dfrac{\partial(\varrho Z)}{\partial x}\right),\\[2mm] \Delta^2\omega_3 = A_1^{-1}\left(\dfrac{\partial(\varrho Y)}{\partial x} - \dfrac{\partial(\varrho X)}{\partial y}\right).\end{cases}$$

En appliquant l'opération Δ^2 à la première des équations (10) on trouve

$$K\Delta^4 u(t) + \int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^4 u(\tau)\,d\tau = \Delta^2(\varrho X) - $$
$$- (L+K)\frac{\partial\Delta^2\Theta(t)}{\partial x} - \int_{t_0}^{t}(\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\Delta^2\Theta(\tau)}{\partial x}\,d\tau\,.$$

c'est à dire, en vertu de l'équation (11'),

$$A_1\Delta^4 u = \Delta^2(\varrho X) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\varrho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial z}\right) + A_1\frac{\partial\Delta^2\Theta}{\partial x}\,.$$

On a aussi deux équations analogues à la précédente.

On en tire, en ayant égard à l'équation (11''),

$$(16)\qquad\begin{cases}\Delta^4 u = A_1^{-1}\Delta^2(\varrho X) + (A_2^{-1} - A_1^{-1})\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial(\varrho X)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\varrho Y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\varrho Z)}{\partial z}\right),\\[2mm] \Delta^4 v = A_1^{-1}\Delta^2(\varrho Y) + (A_2^{-1} - A_1^{-1})\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial(\varrho X)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\varrho Y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\varrho Z)}{\partial z}\right),\\[2mm] \Delta^4 w = A_1^{-1}\Delta^2(\varrho Z) + (A_2^{-1} - A_1^{-1})\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial(\varrho X)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\varrho Y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\varrho Z)}{\partial z}\right).\end{cases}$$

Il est donc possible de transformer les équations intégro-différentielles (10) dans les équations différentielles précédentes dont les seconds membres sont des fonctions connues.

Si les forces de masse sont nulles, les équations (11''), (12''), (16) deviennent

$$\Delta^2\Theta = \Delta^2\omega_1 = \Delta^2\omega_2 = \Delta^2\omega_3 = \Delta^4 u = \Delta^4 v = \Delta^4 w = 0\,.$$

Donc la forme intégro-différentielle des équations de l'élasticité, dans le cas héréditaire, n'est qu'une forme *apparente* lorsque le corps élastique est isotrope et homogène. Mais il faut remarquer que les relations qui passent entre les composantes des déplacements u, v, w gardent la forme intégro-différentielle, ainsi que les conditions au contour, lorsqu'on suppose que les tensions soient données.

5. Pour les équations adjointes, il faut remplacer les égalités (9), (9 a) par

$$(9') \qquad t'_{rr} = L\Theta'(t) + 2K\gamma'_{rr}(t) + \int_t^T (\varphi(\tau, t)\Theta'(\tau) + 2\psi(\tau, t)\gamma'_{rr}(\tau))\,d\tau,$$

$$(9'\,\mathrm{a}) \qquad t'_{rs} = K\gamma'_{rs}(t) + \int_t^T \psi(\tau, t)\gamma'_{rs}(\tau)\,d\tau, \quad r \gtrless s.$$

Les équations adjointes seront

$$(10') \quad \begin{cases} K\Delta^2 u'(t) + (L+K)\dfrac{\partial\Theta'(t)}{\partial x} + \\ \qquad + \displaystyle\int_t^T \left(\psi(\tau, t)\Delta^2 u'(\tau) + (\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t))\frac{\partial\Theta'(\tau)}{\partial x}\right) d\tau = \varrho X', \\ K\Delta^2 v'(t) + (L+K)\dfrac{\partial\Theta'(t)}{\partial y} + \\ \qquad + \displaystyle\int_t^T \left(\psi(\tau, t)\Delta^2 v'(\tau) + (\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t))\frac{\partial\Theta'(\tau)}{\partial y}\right) d\tau = \varrho Y', \\ K\Delta^2 w'(t) + (L+K)\dfrac{\partial\Theta'(t)}{\partial z} + \\ \qquad + \displaystyle\int_t^T \left(\psi(\tau, t)\Delta^2 w'(\tau) + (\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t))\frac{\partial\Theta'(\tau)}{\partial z}\right) d\tau = \varrho Z', \end{cases}$$

où

$$\Theta' = \gamma'_{11} + \gamma'_{22} + \gamma'_{33}.$$

En supposant

$$X' = Y' = Z' = 0,$$

et en posant

$$\omega'_1 = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, \quad \omega'_2 = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, \quad \omega'_3 = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y},$$

on aura

$$\Delta^2\Theta' = \Delta^2\omega'_1 = \Delta^2\omega'_2 = \Delta^2\omega'_3 = \Delta^4 u' = \Delta^4 v' = \Delta^4 w' = 0.$$

Art. 7ème. Solutions fondamentales des équations adjointes.

1. Supposons

$$X' = Y' = Z' = 0.$$

On aura aisément les solutions suivantes des équations adjointes (10').

1) F étant une fonction harmonique il y aura la solution

$$u' = \frac{\partial F}{\partial x},\ v' = \frac{\partial F}{\partial y},\ w' = \frac{\partial F}{\partial z}. \tag{17}$$

2) F_1, F_2, F_3 étant des fonctions harmoniques il y aura la solution

$$u' = \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y},\ v' = \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z},\ w' = \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}. \tag{18}$$

3) Φ_1, Φ_2, Φ_3 étant des fonctions biharmoniques[1] et les dérivées partielles de

$$\Delta^2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right)$$

par rapport à x, y, z étant indépendantes de t, il y aura la solution

$$\left\{ \begin{aligned} u' &= \alpha(T,t)\, \Delta^2 \Phi_1 + \beta(T,t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right), \\ v' &= \alpha(T,t)\, \Delta^2 \Phi_2 + \beta(T,t) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right), \\ w' &= \alpha(T,t)\, \Delta^2 \Phi_3 + \beta(T,t) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right). \end{aligned} \right. \tag{19}$$

où α et β sont des fonctions telles que l'on ait

$$(L + 2K)\beta(T,t) + \int_t^T [\varphi(\tau,t) + 2\psi(\tau,t)]\beta(T,\tau)\, d\tau + \\ + (L+K)\alpha(T,t) + \int_t^T [\varphi(\tau,t) + \psi(\tau,t)]\alpha(T,\tau)\, d\tau = 0. \tag{20}$$

2. Prenons $F = \frac{1}{r}$, r étant la distance du point (x, y, z) au point (a, b, c)

[1] Une fonction biharmonique est une fonction qui vérifie l'équation $\Delta^2 \Delta^2 = 0$.

que nous appellerons le *pôle*. La solution (17) nous donnera

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \; v' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \; w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

$$\Theta' = 0,$$

$$t'_{11} = 2M(T,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}, \; t'_{22} = 2M(T,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}, \; t'_{33} = 2M(T,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}.$$

$$t'_{23} = 2M(T,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z}, \; t'_{31} = 2M(T,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x}, \; t'_{12} = 2M(T,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y}.$$

$$X'_\sigma = 2M(T,t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \; Y'_\sigma = 2M(T,t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \; Z'_\sigma = 2M(T,t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

où l'on a posé

$$M(T,t) = K + \int_t^T \psi(\tau, t)\, d\tau. \tag{21}$$

Pour distinguer cette solution nous placerons un indice 1 aux lettres u', v', w'; $X'_\sigma, Y'_\sigma, Z'_\sigma$, en les écrivant u_1', v_1', w_1'; $X'_{\sigma,1}$, $Y'_{\sigma,1}, Z'_{\sigma,1}$.

3. Prenons

$$F_1 = \frac{1}{r}, \; F_2 = 0, \; F_3 = 0.$$

La solution (18) aménera aux formules suivantes

$$u' = 0, \; v' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \; w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y},$$

$$\Theta' = 0.$$

$$t'_{11} = 0, \; t'_{22} = -2M(T,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial y}, \; t'_{33} = 2M(T,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z},$$

$$t'_{23} = M(T,t)\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right), \; t'_{31} = M(T,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial x}, \; t'_{12} = -M(T,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x},$$

$$\left\{\begin{aligned}
X'_\sigma &= M(T,t)\left(-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\partial x}\cos ny+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial x}\cos nz\right),\\
Y'_\sigma &= M(T,t)\left(-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\partial x}\cos nx-2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial z}\cos ny+\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos nz\right),\\
Z'_\sigma &= M(T,t)\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial x}\cos nx+\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos ny+2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial z}\cos nz\right).
\end{aligned}\right.$$

Pour distinguer cette solution nous placerons un indice 2 aux lettres u', v', w'; $X'_\sigma, Y'_\sigma, Z'_\sigma$ en les écrivant u'_2, v'_2, w'_2; $X'_{\sigma,2}, Y'_{\sigma,2}, Z'_{\sigma,2}$.

On aura évidemment des solutions analogues en prenant successivement

$$F_1 = 0, F_2 = \frac{1}{r}, F_3 = 0$$

et

$$F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = \frac{1}{r}\cdot$$

4. Posons[1] dans les formules (19)

$$\Phi_1 = \frac{r}{2}, \Phi_2 = 0, \Phi_3 = 0,$$

on aura, en tenant compte de la relation (20),

$$u' = \alpha\frac{1}{r}+\frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, v' = \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}, w' = \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial z},$$

$$\Theta' = (\alpha+\beta)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x},$$

$$\left\{\begin{aligned}
t'_{11} &= (2P+Q+R)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+N\frac{\partial^3 r}{\partial x^3},\\
t'_{22} &= \qquad (Q+R)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+N\frac{\partial^3 r}{\partial x\partial y^2},\\
t'_{33} &= \qquad (Q+R)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+N\frac{\partial^3 r}{\partial x\partial z^2},
\end{aligned}\right.$$

1 Comparer: Somigliana, *Sulle equazioni della elasticità*, Annali di matematica, ser. II, t. XVI

$$\begin{cases} t'_{23} = N \dfrac{\partial^3 r}{\partial x \partial y \partial z}, \\[2ex] t'_{31} = P \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + N \dfrac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z}, \\[2ex] t'_{12} = P \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + N \dfrac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial y}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'_\sigma = P \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + N \left(\dfrac{\partial}{\partial n} \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos n x \right), \\[2ex] Y'_\sigma = P \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos n x - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos n y \right) + N \left(\dfrac{\partial}{\partial n} \dfrac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} - 2 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos n y \right), \\[2ex] Z'_\sigma = P \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos n x - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos n z \right) + N \left(\dfrac{\partial}{\partial n} \dfrac{\partial^2 r}{\partial z \partial y} - 2 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos n z \right), \end{cases}$$

où

$$(22) \qquad \begin{cases} N = K \beta(T, t) + \displaystyle\int_t^T \psi(\tau, t) \beta(T, \tau)\, d\tau, \\[2ex] P = K \alpha(T, t) + \displaystyle\int_t^T \psi(\tau, t) \alpha(T, \tau)\, d\tau, \end{cases}$$

$$(23) \qquad \begin{cases} Q = L \beta(T, t) + \displaystyle\int_t^T \varphi(\tau, t) \beta(T, \tau)\, d\tau, \\[2ex] R = L \alpha(T, t) + \displaystyle\int_t^T \varphi(\tau, t) \alpha(T, \tau)\, d\tau. \end{cases}$$

Il est évident que N, P, Q, R sont des fonctions de T, t. Nous choisirons, pour simplifier, la fonction arbitraire $\alpha(T, t)$ telle que $P = 1$. Les fonctions β et N, en vertu des relations (20) et (22), seront déterminées.

Pour distinguer la solution que nous venons de trouver nous placerons un indice 3 aux lettres u', v', w'; $X'_\sigma, Y'_\sigma, Z'_\sigma$, c'est à dire nous écrirons u'_3, v'_3, w'_3; $X'_{\sigma,3}, Y'_{\sigma,3}, Z'_{\sigma,3}$.

On aura deux solutions analogues à celle-ci en prenant successivement

$$\Phi_1 = 0, \; \Phi_2 = \frac{r}{2}, \; \Phi_3 = 0,$$

$$\Phi_1 = 0, \; \Phi_2 = 0, \; \Phi_3 = \frac{r}{2}.$$

Art. 8ème. **Détermination de la dilatation et de la rotation.**

1. Il est connu que la dilatation de chaque particule du corps élastique et les composantes de la rotation sont données par

$$\Theta; \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_3}{2}.$$

Nous commencerons par déterminer $\Theta, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ moyennant les forces de masse et les composantes des déplacements et des tensions au contour, en appliquant le théorème de réciprocité donné par la formule (A).

2. Employons d'abord pour solution des équations adjointes celle que nous avons trouvé dans le 2ème § de l'Art. précédent. Le pôle (a, b, c) étant situé à l'intérieur de l'espace occupé par le corps élastique on pourra le retrancher moyennant une sphère ayant le centre dans le pôle. Si l'on fait diminuer indéfiniment le rayon de cette sphère la formule (A) deviendra à la limite

$$(24) \qquad \int_{t_0}^{T} \left\{ \int_{\sigma} \Sigma X_\sigma(t) u'_1 \, d\sigma + \int_{S} \Sigma \varrho X(t) u'_1 \, dS - \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma,1} u(t) \, d\sigma \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left\{ \frac{16}{3} \pi M(T, t) \Theta(a, b, c, t) + \frac{4}{3} \pi \left(t_{11}(a, b, c, t) + t_{22}(a, b, c, t) + t_{33}(a, b, c, t) \right) \right\} dt.$$

Le second membre de cette équation, en vertu des formules (9) et (21), s'écrira

$$4\pi \int_{t_0}^{T} \left\{ (L + 2K) \Theta(t) + \frac{4}{3} \Theta(t) \int_{t}^{T} \psi(\tau, t) \, d\tau + \int_{t_0}^{t} \left(\varphi(t, \tau) + \frac{2}{3} \psi(t, \tau) \right) \Theta(\tau) \, d\tau \right\} dt.$$

Mais

$$\int_{t_0}^{T} \Theta(t)\,dt \int_{t}^{T} \psi(\tau, t)\,d\tau = \int_{t_0}^{T} dt \int_{t_0}^{t} \psi(t, \tau)\,\Theta(\tau)\,d\tau,$$

c'est pourquoi l'expression précédente deviendra

$$4\pi \int_{t_0}^{T} \left\{ (L+2K)\,\Theta(t) + \int_{t_0}^{t} (\varphi(t,\tau) + 2\,\psi(t,\tau))\,\Theta(\tau)\,d\tau \right\} dt = 4\pi \int_{t_0}^{T} \varDelta_2\,\Theta(t)\,dt.$$

Donc, si nous dérivons l'équation (24) par rapport à T et si nous remplaçons T par t, on aura, en ayant égard aux expressions de u'_1, v'_1, w'_1; $X'_{\sigma,1}$, $Y'_{\sigma,1}$, $Z'_{\sigma,1}$, (Art. 7ème, § 2)

$$\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\sigma + \int_S \Sigma \varrho X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS - 2 \int_\sigma \Sigma \varDelta_1 u \,.\, \frac{d}{dn} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\sigma = 4\pi\, \varDelta_2 \Theta,$$

ou même

$$(25) \qquad \int_\sigma \Sigma \varDelta_2^{-1} X_\sigma \,.\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\sigma + \int_S \Sigma \varDelta_2^{-1} (\varrho X) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS -$$

$$- 2 \int \Sigma \varDelta_2^{-1} \varDelta_1 u \,.\, \frac{d}{dn} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \partial\sigma = 4\pi\,\Theta(a, b, c, t).$$

3. Pour solution des équations adjointes prenons maintenant celle que nous avons donnée dans le 3ème § de l'Art précédent, et appliquons toujours le théorème de réciprocité. Par un procédé tout-à-fait analogue à celui que nous avons employé dans le § précédent on trouvera

$$\int_\sigma \left(Z_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - Y_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\sigma + \int_S \left(\varrho Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \varrho Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS - \int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial x} \cos nz - \right.\right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x} \cos ny \right) \varDelta_1 u + \left(- \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x} \cos nx - 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \cos ny + \right.$$

$$+\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos nz\Bigg)\,A_1 v+\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos nx+\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos ny+\right.$$

$$\left.+\,2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos nz\right)A_1 w\Bigg\}\,d\sigma=4\pi\,A_1\,\omega_1(a,b,c,t).$$

Cette équation se transforme immédiatement dans l'autre

$$(26)\qquad \int_\sigma\left(A_1^{-1}Z_\sigma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-A_1^{-1}Y_\sigma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\sigma+\int_S\left(A_1^{-1}(\varrho Z)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-A_1^{-1}(\varrho Y)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS-$$

$$\int_\sigma\left\{\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos nz-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos ny\right)u+\left(-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos nx-2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos ny+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos nz\right)v+\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos nx+\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos ny+\right.$$

$$\left.\left.+\,2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos nz\right)w\right\}d\sigma=4\pi\,\omega_1\,(a,b,c,t).$$

On a évidemment deux formules analogues à celle que nous venons de trouver qui expriment ω_2 et ω_3.

4. En comparant les formules que nous avons obtenues dans les §§ 2 et 3 avec celles de Betti pour l'équilibre élastique dans le cas ordinaire[1] on trouve qu'elles ont une forme semblable. Pour passer des unes aux autres il suffit d'appliquer aux déplacements, aux rotations, aux forces et à la dilatation les opérations fonctionelles A_1, A_2 ou leurs inverses.

Appellons $A_1 u$, $A_1 v$, $A_1 w$; $\frac{1}{2}A_1\omega_1$, $\frac{1}{2}A_1\omega_2$, $\frac{1}{2}A_1\omega_3$; $A\,\Theta$ respectivement les *pseudo-déplacements*, les *pseudo-rotations* et la *pseudo-dilatation*, alors on pourra interpréter les formules (25) et (26) et les formules analogues par le théorème suivant:

Lorsqu'on envisage des corps élastiques isotropes et homogènes, pour passer du cas de la non-hérédité à celui de l'hérédité, il suffira de remplacer les déplacements, les rotations et la dilatation par les pseudo-déplacements, les pseudo-rotations et la pseudo-dilatation dans les formules de Betti relatives à l'équilibre élastique.

[1] Voir la citation faite dans la note de l'Art. 5ème.

5. Dans les équations (25) et (26) paraissent les valeurs des tensions et celles des déplacements au contour. Mais pour déterminer la dilatation et les rotations les unes ou les autres de ces valeurs sont superflues. On pourra obtenir l'élimination des valeurs superflues par l'emploi des éléments qui jouent un rôle analogue aux fonctions de GREEN (Voir Chap. 1^er^, Art. 9^ème^, § 2).

Art. 9^ème^. **Déterminations des déplacements.**

1. On a les formules

$$\Delta^2 u = \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial y},$$

$$\Delta^2 v = \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial z},$$

$$\Delta^2 w = \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x},$$

donc, les rotations et la dilatation étant déterminées, on pourra calculer $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$.

On déduit facilement des équations (10)

$$\Delta^2 u = \boldsymbol{A}_1^{-1}(\varrho X) + (1 - \boldsymbol{A}_1^{-1} \boldsymbol{A}_2)\frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

$$\Delta^2 v = \boldsymbol{A}_1^{-1}(\varrho Y) + (1 - \boldsymbol{A}_3^{-1} \boldsymbol{A}_2)\frac{\partial \Theta}{\partial y},$$

$$\Delta^2 w = \boldsymbol{A}_1^{-1}(\varrho Z) + (1 - \boldsymbol{A}_1^{-1} \boldsymbol{A}_2)\frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

C'est pourquoi en connaissant les forces de masse et ayant déterminé la dilatation, on a aussi une autre manière pour calculer $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$. —

Mais supposons que les tensions au contour soient données, les déplacements étant inconnus. On démontre aisément, en partant des relations (II), (9), (9 a), les formules suivantes

$$\frac{du}{dn} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}_1^{-1} X_\sigma + \omega_2 \cos nz - \omega_3 \cos ny + (2 - \boldsymbol{A}_1^{-1} \boldsymbol{A}_2)\Theta \cos nx),$$

$$\frac{dv}{dn} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}_1^{-1} Y_\sigma + \omega_3 \cos nx - \omega_1 \cos nz + (2 - \boldsymbol{A}_1^{-1} \boldsymbol{A}_2)\Theta \cos ny),$$

$$\frac{dw}{dn} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}_1^{-1} Z_\sigma + \omega_1 \cos ny - \omega_2 \cos nx + (2 - \boldsymbol{A}_1^{-1} \boldsymbol{A}_2)\Theta \cos nz).$$

Donc, si l'on connait X_σ, Y_σ, Z_σ et l'on a déterminé Θ, ω_1, ω_2, ω_3, on pourra calculer $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$, $\frac{\partial w}{\partial n}$ et par suite on aura u, v, w en connaissant $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$.

3. Mais pour calculer directement les déplacements, sans employer les formules qui donnent la dilatation et les rotations, on pourra employer la méthode suivante.[1]

Appliquons la formule de réciprocité (A) en prenant pour solution des équations adjointes celle que nous avons donnée dans le 4ème § de l'art. 7ème. Retranchons le pôle (a, b, c) interne à l'espace occupé par le corps élastique moyennant une sphère qu'on faira diminuer indéfiniment. On trouvera à la limite, P étant égal à 1,

$$\int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_{\sigma} \Sigma X_\sigma u'_3\, d\sigma + \int_{S} \Sigma \varrho X u'_3 dS - \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma,3} u d\sigma \right\} = -4\pi \int_{t_0}^{T} u(a, b, c, t) dt,$$

d'où l'on tire, en dérivant par rapport à T,

$$(27)\qquad -4\pi u(a, b, c, T) = \frac{d}{dT}\int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_{\sigma} \Sigma X_\sigma u'_3 d\sigma + \int_{S} \Sigma \varrho X u'_3 dS - \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma,3} u d\sigma \right\}.$$

4. Il faut maintenant calculer la dérivée par rapport à T qui paraît dans le second membre. C'est pourquoi nous allons établir quelques formules préliminaires.

Rappelons l'équation (14). Multiplions par $\alpha(T, t)dt$ et intégrons entre les limites t_0 et T. Par des transformations très simples, et en ayant égard aux formules (22) où $P = 1$, on aura

$$\int_{t_0}^{T} \alpha(T, t)\varphi(t)dt = \int_{t_0}^{T} K\alpha(T, t)f(t)dt + \int_{t_0}^{T} \alpha(T, t)dt \int_{t_0}^{t} \psi(t, \tau)f(\tau)d\tau =$$

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\left\{K\alpha(T, t) + \int_{t}^{T} \alpha(T, \tau)\psi(\tau, t)d\tau\right\}dt = \int_{t_0}^{T} f(t)dt.$$

Dérivons par rapport à T et faisons usage de l'égalité (13'), il viendra

$$(28)\qquad \frac{d}{dT}\int^{t} \alpha(T, t)\varphi(t)dt = f(T) = A_1^{-1}\varphi(T).$$

[1] Voir la Note au § 4 de l'art. 7ème.

Mais, à cause des équations (20) et (22) où $P=1$, on a

$$(L+2K)(\alpha(T,t)+\beta(T,t))+\int_t^T(\varphi(\tau,t)+2\psi(\tau,t))(\alpha(T,\tau)+\beta(T,\tau))d\tau=1,$$

donc, en suivant un procédé analogue à celui que nous venons d'employer, on trouvera

$$\frac{d}{dT}\int_{t_0}^T(\alpha(T,t)+\beta(T,t))\varphi(t)dt=A_2^{-1}\varphi(T),$$

d'où

$$\frac{d}{dT}\int_{t_0}^T\beta(T,t)\varphi(t)dt=(A_2^{-1}-A_1^{-1})\varphi(T). \tag{28'}$$

Les équations (22) et (14) nous donnent

$$\int_{t_0}^T N(T,t)f(t)dt=\int_{t_0}^T\beta(T,t)\left\{Kf(t)+\int_{t_0}^t\psi(t,\tau)f(\tau)d\tau\right\}dt=\int_{t_0}^T\beta(T,t)\varphi(t)dt.$$

C'est pourquoi, à cause des équations (28') et (13),

$$\frac{d}{dT}\int_{t_0}^T N(T,t)f(t)dt=(A_2^{-1}-A_1^{-1})A_1f(t)=A_2^{-1}A_1f(t)-f(t)=(A_2^{-1}A_1-1)f(t). \tag{28''}$$

En résumant les formules (28), (28'), (28'') on aura donc

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dT}\int_{t_0}^T\alpha(T,t)F(t)dt=A_1^{-1}F(T),\\&\frac{d}{dT}\int_{t_0}^T\beta(T,t)F(t)dt=(A_2^{-1}-A_1^{-1})F(T),\\&\frac{d}{dT}\int_{t_0}^T N(T,t)F(t)dt=(A_2^{-1}A_1-1)F(t),\end{aligned}\right. \tag{29}$$

où $F(t)$ est une fonction arbitraire.

5. Pour calculer le second membre de l'équation (27) employons les formules (29). On trouvera alors:

$$(27') \qquad -4\pi u(a, b, c, t) =$$

$$\int_\sigma \left\{\frac{1}{r} A_1^{-1} X_\sigma + \frac{1}{2}(A_2^{-1} - A_1^{-1}) \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} X_\sigma + \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} Y_\sigma + \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} Z_\sigma\right)\right\} d\sigma +$$

$$+ \int_S \left\{\frac{1}{r} A_1^{-1}(\varrho X) + \frac{1}{2}(A_2^{-1} - A_1^{-1}) \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(\varrho X) + \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}(\varrho Y) + \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}(\varrho Z)\right\} dS -$$

$$- \int_\sigma \left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} u + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos ny\right) v + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nz\right) w +\right.$$

$$+ (A_2^{-1} A_1 - 1)\left[\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nx\right) u + \left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos ny\right) v +\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} - 2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nz\right) w\right]\right\} d\sigma.$$

Il est évident que nous pourrons obtenir deux formules analogues à la formule précédente pour exprimer v et w.

Art. 10ème. Remarques générales.

1. Par les formules que nous venons de développer nous avons donné une théorie générale de l'hérédité linéaire élastique dans le cas statique.

Nous avons vu ainsi une application des équations intégro-différentielles. Dans le cas général on ne peut pas séparer la partie intégrale de la partie différentielle, mais cela est possible dans le cas des corps isotropes et homogènes. On peut remarquer que dans ce cas tous les résultats peuvent s'obtenir par les formules ordinaires accouplées aux opérations fonctionelles A_1 et A_2 et à leurs inverses.

2. Nous nous sommes bornés aux formules générales en laissant de côté toute question particulière, mais on pourrait approfondir beaucoup de problèmes spéciaux en arrivant aux formules résolutives finales.

C'est ainsi que dans le cas de la sphère élastique isotrope et homogène le problème peut être résolu complètement par des séries très-rapidement convergentes, en laissant tout-à-fait arbitraires les coefficients d'hérédité.

Ce cas a un intérêt spécial pour les applications. Dans les problèmes relatifs à la terre, lorsqu'on veut tenir compte de son élasticité, les phénomènes héréditaires ne sont pas négligeables. L'analyse que nous indiquons, sans entrer dans aucun détail, donne le moyen de calculer les effets de l'hérédité, pourvu qu'elle soit linéaire.

CHAPITRE 3ème.

Électro-magnétisme en ayant égard à l'hérédité.

Art. 1er. Équations générales.

1. Hertz a établi les équations suivantes pour l'électro-magnétisme dans le cas des systèmes en repos[1]

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} \\[2mm] A\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\[2mm] A\dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \end{cases} \qquad (\mathrm{I}')\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u \\[2mm] A\dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A v \\[2mm] A\dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A w \end{cases}$$

où

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{12} Y + \varepsilon_{13} Z \\ \mathfrak{Y} = \varepsilon_{21} X + \varepsilon_{22} Y + \varepsilon_{23} Z \\ \mathfrak{Z} = \varepsilon_{31} X + \varepsilon_{32} Y + \varepsilon_{33} Z \end{cases} \qquad (\mathrm{II}')\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = \mu_{11} L + \mu_{12} M + \mu_{13} N \\ \mathfrak{M} = \mu_{21} L + \mu_{22} M + \mu_{23} N \\ \mathfrak{N} = \mu_{31} L + \mu_{32} M + \mu_{33} N \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} u = \vartheta_{11}(X - X') + \vartheta_{12}(Y - Y') + \vartheta_{13}(Z - Z') \\ v = \vartheta_{21}(X - X') + \vartheta_{22}(Y - Y') + \vartheta_{23}(Z - Z') \\ w = \vartheta_{31}(X - X') + \vartheta_{32}(Y - Y') + \vartheta_{33}(Z - Z'). \end{cases}$$

Dans ces équations $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; X, Y, Z; u, v, w désignent respectivement les composantes de la polarisation électrique, de la force électrique et du courant électrique. $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$; L, M, N désignent respectivement les composantes de la pola-

[1] Wiedemann's Annalen, 40, page 577. Gesammelte Werke. Bd II, page 208.

risation magnétique et de la force magnétique. X', Y', Z' sont les composantes de la force électromotrice.

2. Les équations (II), (II') et (III) se déduisent de l'hypothèse que l'état actuel de la polarisation électrique et du courant électrique dépendent de l'état actuel de la force électrique, ainsi que l'état actuel de la polarisation magnétique dépend de l'état actuel de la force magnétique.

De cette manière on néglige les phénomènes de l'hérédité. Si l'on veut en tenir compte, il faudra admettre que l'état actuel de la polarisation électrique dépende, outre que de la force électrique actuelle, de toute l'histoire antécédente de la force électrique, et l'état actuel de la polarisation magnétique dépende, outre que de la force magnétique actuelle, de toute l'histoire antécédente de la force magnétique.

C'est pourquoi on devra ajouter dans les seconds membres des équations (II) et (II') des termes de correction et écrire

$$\text{(II a)}\quad \begin{cases} \mathfrak{X}(t) = \varepsilon_{11} X(t) + \varepsilon_{12} Y(t) + \varepsilon_{13} Z(t) + F_1 \left| [X(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{Y}}(\tau), Z(\tau)] \right|, \\ \mathfrak{Y}(t) = \varepsilon_{21} X(t) + \varepsilon_{22} Y(t) + \varepsilon_{23} Z(t) + F_2 \left| [X(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{Y}}(\tau), Z(\tau)] \right|, \\ \mathfrak{Z}(t) = \varepsilon_{31} X(t) + \varepsilon_{32} Y(t) + \varepsilon_{33} Z(t) + F_3 \left| [X(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{Y}}(\tau), Z(\tau)] \right|, \end{cases}$$

où F_1, F_2, F_3 désignent des quantités qui dépendent de toutes les valeurs de $X(\tau)$, $Y(\tau)$, $Z(\tau)$ correspondantes aux valeurs de l'argument τ depuis $-\infty$ jusqu'à t.[1]

De même on écrira

$$\text{(II' a)}\quad \begin{cases} \mathfrak{L}(t) = \mu_{11} L(t) + \mu_{12} M(t) + \mu_{13} N(t) + \Phi_1 \left| [L(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{M}}(\tau), N(\tau)] \right| \\ \mathfrak{M}(t) = \mu_{21} L(t) + \mu_{22} M(t) + \mu_{23} N(t) + \Phi_2 \left| [L(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{M}}(\tau), N(\tau)] \right| \\ \mathfrak{N}(t) = \mu_{31} L(t) + \mu_{32} M(t) + \mu_{33} N(t) + \Phi_3 \left| [L(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{M}}(\tau), N(\tau)] \right|. \end{cases}$$

Supposons maintenant que les conditions pour que l'on puisse développer chaque fonction F_i dans une série infinie de termes ayant la forme

[1] Voir Chap. II, Art. 1er, § 1.

$$\int_{-\infty}^{t}\cdots\int_{-\infty}^{t} G_i(\tau'_1,\cdots\tau'_h|\tau''_1,\cdots\tau''_k|\tau'''_1,\cdots\tau'''_l|t)X(\tau'_1)\cdots$$
$$X(\tau'_h)Y(\tau''_1)\cdots Y(\tau''_k)Z(\tau'''_1)\cdots Z(\tau'''_l)\,d\tau'_1\cdots d\tau'''_l$$

soient satisfaites, et supposons aussi que les conditions pour que l'on ait des développements analogues pour les fonctions Φ_i soient vérifiées.

Si nous admettons comme postulat que les effets de la superposition des forces électriques et magnétiques se somment, c'est à dire

$$F_i|[X(\tau)+X'(\tau),\ Y(\tau)+Y'(\tau),\ Z(\tau)+Z'(\tau)]| =$$
$$= F_i|[X(\tau),\ Y(\tau),\ Z(\tau)]| + F_i|[X'(\tau),\ Y'(\tau),\ Z'(\tau)]|$$
$$\Phi_i|[L(\tau)+L'(\tau),\ M(\tau)+M'(\tau),\ N(\tau)+N'(\tau)]| =$$
$$= \Phi_i|[L(\tau),\ M(\tau),\ N(\tau)]| + \Phi_i|[L'(\tau),\ M'(\tau),\ N'(\tau)]|,$$

on aura

$$F_i = \int_{-\infty}^{t} \{X(\tau)\varphi_{i,1}(t,\tau) + Y(\tau)\varphi_{i,2}(t,\tau) + Z(\tau)\varphi_{i,3}(t,\tau)\}\,d\tau,$$

$$\Phi_i = \int_{-\infty}^{t} \{L(\tau)\psi_{i,1}(t,\tau) + M(\tau)\psi_{i,2}(t,\tau) + N(\tau)\psi_{i,3}(t,\tau)\}\,d\tau,$$

c'est pourquoi les équations (II a) et (II' a) deviendront

$$(\text{II b})\quad\begin{cases} \mathfrak{X}(t) = \varepsilon_{11}X(t) + \varepsilon_{12}Y(t) + \varepsilon_{13}Z(t) + \\ \qquad + \int_a^t (X(\tau)\varphi_{11}(t,\tau) + Y(\tau)\varphi_{12}(t,\tau) + Z(\tau)\varphi_{13}(t,\tau))\,d\tau, \\ \mathfrak{Y}(t) = \varepsilon_{21}X(t) + \varepsilon_{22}Y(t) + \varepsilon_{23}Z(t) + \\ \qquad + \int_a^t (X(\tau)\varphi_{21}(t,\tau) + Y(\tau)\varphi_{22}(t,\tau) + Z(\tau)\varphi_{23}(t,\tau))\,d\tau, \\ \mathfrak{Z}(t) = \varepsilon_{31}X(t) + \varepsilon_{32}Y(t) + \varepsilon_{33}Z(t) + \\ \qquad \int_a^t (X(\tau)\varphi_{31}(t,\tau) + Y(\tau)\varphi_{32}(t,\tau) + Z(\tau)\varphi_{33}(t,\tau))\,d\tau, \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}'\,\mathrm{b}) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{L}(t) &= \mu_{11} L(t) + \mu_{12} M(t) + \mu_{13} N(t) + \\ &\quad + \int_a^t (L(\tau)\psi_{11}(t,\tau) + M(\tau)\psi_{12}(t,\tau) + N(\tau)\psi_{13}(t,\tau))\, d\tau, \\ \mathfrak{M}(t) &= \mu_{21} L(t) + \mu_{22} M(t) + \mu_{23} N(t) + \\ &\quad + \int_a^t (L(\tau)\psi_{21}(t,\tau) + M(\tau)\psi_{22}(t,\tau) + N(\tau)\psi_{23}(t,\tau))\, d\tau, \\ \mathfrak{N}(t) &= \mu_{31} L(t) + \mu_{32} M(t) + \mu_{33} N(t) + \\ &\quad + \int_a^t (L(\tau)\psi_{31}(t,\tau) + M(\tau)\psi_{32}(t,\tau) + N(\tau)\psi_{33}(t,\tau))\, d\tau, \end{aligned} \right.$$

où la limite inférieure a des intégrales sera $-\infty$. Si nous supposons que l'on puisse négliger l'hérédité antérieure à un instant donné t_0, alors on pourra prendre la limite inférieure des intégrales égale à t_0.

Si nous remplaçons, dans les équations (I) et (I'), u, v, w; $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, par leurs valeurs données par les relations (II b), (II' b) et (III) on trouvera des équations *intégro-différentielles*.

L'hérédité, telle que nous venons de l'envisager, est une *hérédité linéaire*. Il faut remarquer à ce propos que l'hystérésis dite électrotechnique ne rentre pas dans l'hérédité linéaire. Il suffit de rappeller le phénomène de la magnétisation permanente pour s'apercevoir qu'elle est en déhors du cadre des phénomènes embrassés par l'hérédité linéaire.

Art. 2ème. **Coefficients d'hérédité.**

1. Dans les équations (II b) et (II' b) on n'a écrit explicitement que les variables t, τ, mais il faudra se rappeller que $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$; X, Y, Z; L, M, N sont aussi des fonctions de x, y, z. En général les coefficients ε_{rs}, μ_{rs} seront des fonctions de x, y, z ainsi que les coefficients φ_{rs} et ψ_{rs}. Ce n'est que dans le cas où le milieu est homogène que l'on pourra regarder ces coefficients comme indépendants de x, y, z.

Lorsqu'on passe d'un milieu à un autre, sur les surfaces limites il y aura des relations qu'on pourra obtenir par un procédé analogue à celui suivi par Hertz dans le § 8ème du mémoire que nous avons cité.

2. La limite inférieure des intégrales qui paraissent dans les équations (II b) et (II' b) étant finie, et les déterminants

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13} \\ \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23} \\ \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33} \end{vmatrix}$$

n'étant par nuls, on pourra invertir les équations intégrales (II b) et (II' b) et exprimer les composantes de la force électrique par celles de la polarisation électrique et les composantes de la force magnétique par celles de la polarisation magnétique.

3. Nous appellerons φ_{rs} et ψ_{rs} les *coefficients d'hérédité.* Il est facile de trouver leur interprétation. C'est ainsi que

$$\varphi_{11}(t, \tau)\, d\tau, \ \varphi_{21}(t, \tau)\, d\tau, \ \varphi_{31}(t, \tau)\, d\tau$$

sont les coémposantes de la polarisation électrique, induite à l'instant t, par l'unité de force électrique agissant dans la direction x pendant l'intervalle de temps $(\tau, \tau + d\tau)$; et

$$\psi_{11}(t, \tau)\, d\tau, \ \psi_{21}(t, \tau)\, d\tau, \ \psi_{31}(t, \tau)\, d\tau$$

sont les composantes de la polarisation magnétique, induite à l'instant t, par l'unité de force magnétique agissant dans la direction x pendant l'intervalle de temps $(\tau, \tau + d\tau)$.

Nous admettrons que les coefficients d'hérédité φ_{rs}, ψ_{rs} soient infiniment petits pour $t = -\infty$ de telle sorte que

$$|\varphi_{rs}(t, \tau)| < \frac{C}{(t - \tau)^{1+\varepsilon}}, \quad |\psi_{rs}(t, \tau)| < \frac{C'}{(t - \tau)^{1+\varepsilon'}}$$

où $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ et C et C' sont des quantités constantes positives.[1]

4. Il est facile d'étendre au cas que nous envisageons le *principe du cycle fermé* (Chap. 2ème, Art. 2ème) c'est à dire: *Si, toutes les fois que X, Y, Z; L, M, N, sont des fonctions périodiques du temps, avec une période quelconque T, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, sont aussi des fonctions périodiques ayant la même période, alors φ_{rs}, ψ_{rs} sont des fonctions de la différence $t - \tau$; et réciproquement: Si les coefficients φ_{rs}, ψ_{rs} sont des fonctions de la différence $t - \tau$, et X, Y, Z; L, M, N sont des fonctions périodiques du temps, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ seront aussi des fonctions périodiques avec la même période.* Cette proposition peut aussi s'énoncer par les mots: *La condition du cycle fermé et celle de l'invariabilité de l'hérédité sont équivalentes.*

[1] Voir Chap. II, Art. 1er, § 4.

Art. 3ème. Le cas statique.

1. Envisageons le cas le plus simple où le milieu ne soit pas conducteur et les quantités $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$; $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ changent si lentement qu'on puisse négliger

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}; \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}.$$

On peut appeller ce cas le *cas statique*.

Nous aurons alors

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

c'est à dire

$$X = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial v}{\partial z},$$
$$L = \frac{\partial w}{\partial x}, M = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad N = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

2. Supposons que les coefficients ε_{rs}, φ_{rs} soient indépendants de x, y, z. Prenons les axes coordonnés coïncidents avec les axes de la surface de 2^d degré

(1) $$\varepsilon_{11} x^2 + \varepsilon_{22} y^2 + \varepsilon_{33} z^2 + (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) yz + (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13}) zx + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) xy = 1.$$

S'ils coïncident avec les axes de la surface

(2) $$\varphi_{11} x^2 + \varphi_{22} y^2 + \varphi_{33} z^2 + (\varphi_{23} + \varphi_{32}) yz + (\varphi_{31} + \varphi_{13}) zx + (\varphi_{12} + \varphi_{21}) xy = 1$$

quels que soient les valeurs de t, τ, les équations (II b) deviendront

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \varepsilon_{11} \frac{\partial v(t)}{\partial x} + \int_a^t \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} \varphi_{11}(t, \tau) d\tau, \\
\mathfrak{Y} &= \varepsilon_{22} \frac{\partial v(t)}{\partial y} + \int_a^t \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \varphi_{22}(t, \tau) d\tau, \\
\mathfrak{Z} &= \varepsilon_{33} \frac{\partial v(t)}{\partial z} + \int_a^t \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \varphi_{33}(t, \tau) d\tau.
\end{aligned}\right.$$

C'est pourquoi étant

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 4\pi\varrho,$$

où ϱ est une fonction de x, y, z indépendante de t, on aura

$$\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 v(t)}{\partial x^2} + \varepsilon_{22}\frac{\partial^2 v(t)}{\partial y^2} + \varepsilon_{33}\frac{\partial^2 v(t)}{\partial z^2} +$$

$$+ \int_a^t \left(\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2}\varphi_{11}(t,\tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2}\varphi_{22}(t,\tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2}\varphi_{33}(t,\tau)\right)d\tau = 4\pi\varrho.$$

Par un changement des variables x, y, z cette équation peut se réduire à

$$\Delta^2 v(t) + \int_a^t \left(\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right)d\tau = 4\pi\varrho$$

qui est l'équation que nous avons étudiée dans le premier chapitre. (Voir 1er Chap. Art. 10ème).

3. Si les axes de la surface (1) ne coïncident pas avec ceux de la surface (2) les difficultés ne sont pas augmentées.

L'équation intégro-différentielle qu'on trouverait serait

$$\Delta^2 v(t) + \int_a^t \left\{\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f_{11}(t,\tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} f_{22}(t,\tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} f_{33}(t,\tau) +\right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y\,\partial z} f_{23}(t,\tau) + 2\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z\,\partial x} f_{31}(t,\tau) + 2\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x\,\partial y} f_{12}(t,\tau)\right\}d\tau = 4\pi\varrho.$$

On pourrait étendre facilement la théorie que nous avons exposée dans le premier chapitre à cette équation intégro-différentielle.

Art. 4ème. Remarques générales.

1. Le but principal que nous avons poursuivi dans ce chapitre a été de montrer l'origine des équations intégro-différentielles (A), (A'') du premier chapitre.

Nous ne sommes pas entrés dans aucun problème particulier. Si l'on envisagerait un milieu électrique non isotrope entouré par un conducteur, on aurait facilement une application des résultats principaux que nous avons exposés dans le premier chapitre.

2. Nous nous sommes bornés au cas statique sans développer le cas général, car il aurait fallu sortir du type elliptique des équations intégro-différentielles pour aborder le cas hyperbolique, que nous avons laissé de côté dans ce mémoire. En effet les équations intégro-différentielles qui correspondent aux équations (I), (I'), (II_b), (II_b') sont des équations hyperboliques.

3. Dans le 2ème et le 3ème Chapitre nous avons vu que, si nous considérons toute l'histoire d'un système antérieure à l'instant actuel t, les intégrales qu paraissent dans les formules sont étendues dépuis la limite $-\infty$ jusqu'à la limite t. C'est pourquoi nous avons négligé, en général, l'hérédité antérieure à un certain instant déterminé pour n'avoir à considérer que des équations intégrales et intégro-différentielles avec des limites finies.

Tout récemment M. G. C. Evans a envisagé les équations intégrales l'orsqu'une des limites est infinie.[1] En appliquant ses résultats il est possible de considérer l'hérédité sans négliger aucune période de l'histoire du système.

[1] *L'equazione integrale di Volterra di seconda specie con un limite dell' integrale infinito.* — Rendiconti delle R. Accademia dei Lincei Vol XX. Serie 5a. 1911 (Trois Notes).

Table des Articles.

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEN SUMMABILITÄTSEIGENSCHAFTEN DIRICHLETSCHER REIHEN UND IHREM FUNKTIONENTHEORETISCHEN CHARAKTER.

Von

WALTER SCHNEE

in Breslau.

Einleitung.

In einer ganzen Anzahl neuerer Arbeiten, die sich mit den Eigenschaften der Dirichletschen Reihen

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

und den damit aufs engste zusammenhängenden Problemen der analytischen Zahlentheorie beschäftigen, hat sich immer mehr die grundlegende Bedeutung der Beziehungen herausgestellt, die zwischen dem asymptotischen Verhalten der Funktion $f(s)$ auf vertikalen Geraden (d. h. bei konstanter Abscisse $\Re(s)=\sigma$ und ins Unendliche wachsender Ordinate t) einerseits und den Summabilitätseigenschaften der Zahlenfolge a_n andererseits bestehen. Der am nächsten liegende Satz dieser Art ist zwar seit langem bekannt und durch das bekannte Hilfsmittel der partiellen Summation leicht beweisbar:

Ist die Reihe $f(s)$ in der Halbebene $\Re(s)>\lambda_0$ konvergent und in der Halbebene $\Re(s)>l$, wo $l>\lambda_0$ ist, absolut konvergent, dann lässt sich nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl $\varepsilon>0$ eine Konstante A so angeben, dass für jedes σ des Intervalls $\lambda_0+\varepsilon\leq\sigma\leq l+\varepsilon$ nebst beliebigem $|t|\geq 1$[1] die Beziehung

[1] An Stelle von 1 könnte natürlich auch jede andere positive Konstante stehen.

$$|f(s)| = |f(\sigma+ti)| < A\,|t|^{\frac{l+\varepsilon-\sigma}{l-\lambda_0}}$$

gilt.[2]

Auf der Geraden $\sigma = \lambda_0 + \varepsilon$ hat also die Funktion $f(s)$ in Bezug auf die Ordinate höchstens die Grössenordnung 1, da ja dann $\frac{l+\varepsilon-\sigma}{l-\lambda_0} = 1$ ist, und auf der Geraden $\sigma = l+\varepsilon$ hat sie die Grössenordnung 0, während für die zwischen diesen beiden Werten gelegenen Abscissen der rechts auftretende Exponent linear von 1 bis 0 abnimmt. Hieraus folgt, dass bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ für alle $\sigma \geqq \lambda_0 + \varepsilon$ gleichmässig

$$\lim_{t=\pm\infty} \frac{f(\sigma+ti)}{t} = 0$$

ist; für $\sigma \geqq l+\varepsilon$ ist nämlich sogar (bei beliebigem t)

$$|f(s)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{l+\varepsilon}} = A.$$

Die umgekehrte Frage gehört nun aber zu den tiefsten und schwierigsten Problemen aus der Theorie der Dirichletschen Reihen; gerade hierauf aber kommt es bei den Anwendungen in der analytischen Zahlentheorie an, da es sich dort meistens darum handelt, aus bekannten funktionentheoretischen Eigenschaften von $f(s)$ Folgerungen über die Konvergenzeigenschaften der Reihe $f(s)$, d. h. die Grenzeigenschaften der Grössenfolge a_n zu ziehen. Nachdem Herr Landau[3] zuerst einen Satz dieser Art entdeckt hatte, habe ich, hierdurch angeregt, den folgenden Satz[4] bewiesen:

I. Es sei für jedes $\delta > 0$ von einer gewissen Stelle an

$$|a_n| < n^\delta,$$

[2] Ein ausführlicher Beweis dieses Satzes findet sich z. B. in der Habilitationsschrift von Herrn Bohr: »Bidrag til de Dirichletske Rækkers Theori» (Kopenhagen 1910), S. 20.

[3] »Beiträge zur analytischen Zahlentheorie», Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 26, 2. Semester 1908 (S. 169—302), S. 252—255.

[4] Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen», Mathematische Annalen, Bd. 66, 1909, S. 337—349. Ich behandle dort gleich den allgemeineren Reihentypus

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wo die λ_n eine beliebige Folge positiver, monoton ins Unendliche wachsender Zahlen sind, die gewissen Einschränkungen genügen. Um die Beweise nicht durch formale Schwierigkeiten zu verdunkeln, gehe ich in dieser Arbeit nicht auf die allgemeineren Reihen ein.

so dass die Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > 1$ absolut konvergiert. Es sei ferner die durch die Reihe $f(s)$ in der Halbebene $\Re(s) > 1$ dargestellte Funktion noch für $\Re(s) \geqq \eta$ regulär, wo $\eta < 1$ ist, und es existiere eine Zahl $0 \leqq k < 1$, so dass für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$ die Beziehung

$$|f(s)| < A\,|t|^k$$

gilt, in der A irgend eine Konstante bedeutet. Dann ist die Reihe $f(s)$ mindestens für $\Re(s) > \frac{\eta + k}{1 + k}$ konvergent.

Diese Zahl $\frac{\eta + k}{1 + k}$ gehört bei jedem $0 \leqq k < 1$ dem Intervall von η bis $\frac{\eta + 1}{2}$ an und nähert sich für $k = 0$ dem Werte η, für $k = 1$ dem Werte $\frac{\eta + 1}{2}$, der den Mittelpunkt des Intervalls von η bis 1 darstellt. Den an der zitierten Stelle gegebenen Beweis hat dann weiter Herr LANDAU[5] durch die Anwendung eines unterdessen von den Herren PHRAGMÉN und LINDELÖF[6] entdeckten Satzes allgemein funktionentheoretischer Natur, den ich in der Folge vollständig angeben werde, wesentlich vereinfacht und gezeigt, dass der Satz I unverändert auch für den Fall $k \geqq 1$ gilt, den ich nicht untersucht hatte; doch blieb auch bei dieser Beweisführung genau die Schranke $\frac{\eta + k}{1 + k}$ bestehen. Herr BOHR[7] hat ferner durch ein passend konstruiertes Beispiel die Möglichkeit widerlegt, dass eine bestimmte Zahl $0 < k_0 < 1$, etwa $k_0 = \frac{1}{2}$, existiert mit der Eigenschaft, dass aus der obigen Voraussetzung über a_n und der Annahme, dass $f(s)$ für $\Re(s) \geqq \eta$ regulär und höchstens von der Grössenordnung k_0 ist, die Konvergenz der Reihe für $\Re(s) > \eta$ folgt. Nur dann, wenn die Funktion $f(s)$ für alle $\sigma \geqq \eta$ absolut genommen unterhalb einer festen Schranke liegt oder wenn wenigstens nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl $\delta > 0$ sich stets eine Konstante A finden lässt, so dass für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$ die Beziehung

$$|f(s)| < A\,|t|^\delta$$

[5] »Über das Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen», Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 28, 1909, S. 113—151. Vergl. auch die ausführliche Darstellung in Herrn LANDAU's »Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen», Bd. II, S. 838—861.

[6] Vergl. besonders die Arbeit von Herrn LINDELÖF: »Quelques remarques sur la croissance de la fonction $\zeta(s)$» (Bulletin des Sciences mathématiques, Ser. 2, Bd. 32, Teil 1, 1908; S. 341—356) sowie die ausführliche Darstellung in dem soeben zitierten »Handbuch», Bd. II, S. 849—853.

[7] »Über die Summabilität Dirichletscher Reihen», Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1909, S. 247—262. Vergl. auch die zitierte Habilitationsschrift, S. 29—36.

gilt, ergibt sich unter der obigen Voraussetzung über a_n die Konvergenz unserer Reihe für $\Re(s) > \eta$; diese unmittelbare Folgerung aus Satz I hatte ich übrigens schon in der zitierten Arbeit besonders betont.

Nun lässt sich vermuten, dass ebenso wie z. B. das formal gebildete Produkt zweier für $\Re(s) > \lambda_0$ konvergenten Dirichletschen Reihen dort zwar nicht notwendig konvergiert, aber doch stets summabel von der ersten Ordnung ist, auch unter den Voraussetzungen von Satz I und unter der Annahme $k \leqq 1$ die Reihe stets in der ganzen Halbebene $\Re(s) > \eta$ wenigstens summabel von der ersten Ordnung ist; einen solchen Satz hat Herr M. Riesz[8] ohne Beweis in einer kurzen Note in den Comptes rendus ausgesprochen, auf die ich noch zurückkommen werde. Im Folgenden soll dieser Satz in einer im Vergleich zu Satz I etwas allgemeineren Fassung bewiesen werden:

II. Es sei die durch die Reihe $f(s)$ in ihrem Konvergenzgebiet dargestellte Funktion für $\sigma \geqq \eta$ regulär, und es existiere eine Konstante A, so dass für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$ die Beziehung

$$|f(s)| < A\,|t|$$

gilt. Dann ist die Reihe $f(s)$ für $\sigma > \eta$ wenigstens summabel von der ersten Ordnung.

Der aufgestellte Satz lässt sich nun aber noch wesentlich verallgemeinern. Ebenso wie man eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ summabel von genau der ersten Ordnung mit der Summe S nennt, wenn bei ganzem x zwar nicht die Definition der Konvergenz

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n=1}^{x} a_n = \lim_{x=\infty} s_x = S$$

erfüllt ist, aber doch der Grenzwert

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} s_n = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} S_x'$$

existiert, so kann man die Summenbildung fortsetzen:

$$s_n = S_n^{(0)} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\quad S'_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n,\quad S''_n = S'_1 + S'_2 + \cdots + S'_n,\quad \cdots,$$
$$S_n^{(r)} = S_1^{(r-1)} + S_2^{(r-1)} + \cdots + S_n^{(r-1)},$$

und eine Reihe summabel von genau der r. Ordnung nennen, wenn zwar nicht die Grenzwerte

[8] »Sur les séries de Dirichlet«, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 21. Juni 1909, Bd. 148, S. 1658—1660.

$$\lim_{x=\infty} s_x,\ \lim_{x=\infty} \frac{S'_x}{x}, \ldots,\ \lim_{x=\infty} \frac{(r-1)!\, S_x^{(r-1)}}{x^{r-1}},$$

wohl aber der Grenzwert

$$\lim_{x=\infty} \frac{r!\, S_x^{(r)}}{x^r} = S$$

existiert; daraus folgt dann, wie leicht zu beweisen ist, dass die Reihe auch von der Ordnung $r+1, r+2, \ldots$ mit derselben Summe S summabel ist. Summabilität 0. Ordnung ist gleichbedeutend mit Konvergenz. Dass dieser zuerst von CESÀRO eingeführte Begriff,[9] der sich in der modernen Analysis als sehr fruchtbringend erwiesen hat, auch für die Theorie der Dirichletschen Reihen von grosser Bedeutung ist, hat namentlich Herr BOHR gezeigt, indem er eine umfassende Summabilitätstheorie der Dirichletschen Reihen aufgestellt und in der schon zitierten Habilitationsschrift im Zusammenhang dargelegt hat. Ebenso wie das Konvergenzgebiet einer Dirichletschen Reihe stets eine Halbebene ist, in dem Sinne, dass für $\sigma > \lambda_0$ Konvergenz, für $\sigma < \lambda_0$ Divergenz stattfindet,[10] so gibt es auch allgemein für jedes r eine Konstante λ_r, so dass, wenn $a_n = \frac{a_n}{n^s}$ gesetzt wird, die Reihe für $\sigma > \lambda_r$ wenigstens summabel von der r. Ordnung, dagegen in jeden Punkt der Halbebene $\sigma < \lambda_r$ nur von höherer Ordnung summabel oder überhaupt nicht summabel ist. Herr BOHR hat ferner bewiesen, dass die Breite des Streifens der Summabilität von genau der r. Ordnung höchstens 1 ist,[11] d. h. dass für jedes $r = 1, 2, \ldots$ stets $1 \geq \lambda_{r-1} - \lambda_r$ ist, und hat weiter gezeigt, dass für jedes $r = 1, 2, \ldots$ die Differenz $\lambda_{r-1} - \lambda_r \geq \lambda_r - \lambda_{r+1}$ ist, d. h. dass die Breite der Summabilitätsstreifen, wenn man von rechts nach links geht, niemals zunimmt. Die λ_r sind also eine

[9] Herr HÖLDER hat einen ähnlichen Begriff durch fortgesetzte Mittelwertbildung:

$$s'_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n},\ s''_n = \frac{s'_1 + s'_2 + \cdots + s'_n}{n}, \ldots,\ s_n^{(r)} = \frac{s_1^{(r-1)} + s_2^{(r-1)} + \cdots + s_n^{(r-1)}}{n}$$

eingeführt; in einer Arbeit in den Mathematischen Annalen (»Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes», Bd. 67, 1909, S. 110—125) habe ich gezeigt, dass diese Begriffe identisch sind, d. h. dass für jede beliebige Grössenfolge a_n und für jedes r die Grenzwerte $\lim_{x=\infty} s_x^{(r)}$ und $\lim_{x=\infty} \frac{r!\, S_x^{(r)}}{x^r}$ entweder zugleich existieren und denselben Wert haben oder beide nicht existieren.

[10] Natürlich kann die Dirichletsche Reihe auch überall konvergieren oder nirgends konvergieren; dann ist eben $\lambda_0 = -\infty$ bezw. $\lambda_0 = +\infty$.

[11] Die erste Publikation geschieht in der Arbeit: »Sur la série de Dirichlet», Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 11. Januar 1909, Bd. 148, S. 75—80.

Folge von Zahlen, die bei wachsendem r niemals zunehmen, und für die die Ungleichungen bestehen:

$$1 \geq \lambda_0 - \lambda_1 \geq \lambda_1 - \lambda_2 \geq \lambda_2 - \lambda_3 \geq \ldots \geq 0.$$

Ist also einmal nicht $\lambda_{r-1} > \lambda_r$, sondern $\lambda_{r-1} = \lambda_r$, so haben auch alle folgenden Zahlen $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots$ denselben Wert. Natürlich können sogar sämtliche Zahlen λ_r von $r = 0$ an zusammenfallen; dies ist z. B. stets dann der Fall, wenn die Reihe in der ganzen Ebene konvergiert, so dass $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = -\infty$ ist, oder wenn auf der im Endlichen gelegenen Konvergenzgeraden $\sigma = \lambda_0$ oder in beliebiger Nähe derselben ein singulärer Punkt der durch die Reihe dargestellten analytischen Funktion liegt. Wird der stets vorhandene $\lim\limits_{r=\infty} \lambda_r = \Lambda$ gesetzt, wo die Zahl Λ, wenn die Reihe überhaupt ein Konvergenzgebiet besitzt, entweder endlich oder $= -\infty$ ist, so wird im Falle eines endlichen $\Lambda < \lambda_0$ die in der Konvergenzhalbebene $\sigma > \lambda_0$ durch die Reihe dargestellte analytische Funktion durch die Summabilitätswerte bis zur Geraden $\sigma = \Lambda$ fortgesetzt, d. h. die Funktion ist in der ganzen Halbebene $\sigma > \Lambda$ regulär. Im Falle $\Lambda = -\infty$ ergibt sich, dass die durch die Reihe in der Konvergenzhalbebene dargestellte Funktion eine ganze transzendente Funktion ist; dies ist z. B. für die Funktion

$$(1 - 2^{1-s})\,\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

der Fall, obwohl die Reihe rechts nur für $\sigma > 0$ konvergiert.

Was nun das den Gegenstand dieser Arbeit bildende Problem anbetrifft, so hat Herr Bohr ohne grössere Schwierigkeiten in der zitierten Habilitationsschrift den folgenden Satz beweisen können:

Es sei die Reihe $f(s)$ für $\sigma > \lambda_r$ summabel von der r. Ordnung und für $\sigma > l$ absolut konvergent, wo $l > \lambda_r$ ist. Dann lässt sich nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Konstante A so angeben, dass für jedes σ des Intervalls $\lambda_r + \varepsilon \leq \sigma < l + \varepsilon$ nebst jedem $|t| \geq 1$ die Beziehung

$$(1) \qquad |f(s)| < A\,|t|^{(r+1)\frac{l-\sigma+\varepsilon}{l-\lambda_r}}$$

gilt.

Der Exponent auf der rechten Seite nimmt also im Intervall $\lambda_r + \varepsilon \leq \sigma \leq l + \varepsilon$ von $r + 1$ bis 0 ab. Was nun die Umkehrung des Problems anbetrifft, so werde ich für $r \geq 1$ die folgenden beiden Sätze beweisen, von denen der erste eine Verallgemeinerung von Satz II, der zweite eine Verallgemeinerung von Satz I darstellt:

III. Es sei die durch die Reihe $f(s)$ in ihrem Konvergenzgebiete dargestellte Funktion für $\sigma \geqq \eta$ regulär, wo $\eta < \lambda_{r-1}$ ist, und es existiere eine Konstante A, so dass für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)| < A\,|t|^r \tag{2}$$

ist. Dann ist die Reihe $f(s)$ für alle $\sigma > \eta$, welche zugleich $> \lambda_{r-1} - 1$ sind, summabel von der r. Ordnung.

IV. Wenn die Funktion $f(s)$ für $\sigma \geqq \eta$ regulär ist, wo $\eta < \lambda_{r-1}$ ist, und wenn für alle $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)| < A\,|t|^{r+k}$$

ist, wo k irgend eine Konstante $\geqq 0$ bedeutet, so ist die Reihe $f(s)$ für alle $\sigma > \dfrac{\eta + k\lambda_{r-1}}{1+k}$, welche zugleich $> \lambda_{r-1} - 1$ sind, summabel von der r. Ordnung.

Der Satz III ist als Spezialfall $k = 0$ in IV enthalten; für $k = 1$ nimmt die in IV auftretende Konstante $\dfrac{\eta + k\lambda_{r-1}}{1+k}$ den Wert $\dfrac{\eta + \lambda_{r-1}}{2}$ an, welcher den Mittelpunkt des Intervalls von η bis λ_{r-1} darstellt, und für $k = \infty$ nähert sie sich zunehmend der Grenze λ_{r-1}. Die Einschränkung $\sigma > \lambda_{r-1} - 1$ in beiden Sätzen ist an sich ganz selbstverständlich, da ja die Breite eines jeden Summabilitätsstreifens höchstens 1 beträgt, also die Reihe $f(s)$ gewiss für kein s, dessen reeller Teil $< \lambda_{r-1} - 1$ ist, summabel von der r. Ordnung sein kann. Unter den Voraussetzungen von Satz III z. B. ist also entweder die Reihe $f(s)$ in der ganzen Halbebene $\sigma > \eta$ summabel von der r. Ordnung, d. h. $\lambda_r \leqq \eta$, was im Falle $\eta \geqq \lambda_{r-1} - 1$ eintritt, oder es ist $\lambda_r = \lambda_{r-1} - 1$, was in dem durch meine Beweisführung nicht ausgeschlossenen Fall[12] $\eta < \lambda_{r-1} - 1$ eintritt. Im letzteren Falle müssten alle Sum-

[12] In der schon zitierten Abhandlung hat Herr M. Riesz ohne Beweis einen Satz ausgesprochen, der meinem Satze III ungefähr entspricht und den folgenden Wortlaut hat:

Lorsque la fonction définie dans une portion du plan par la série convergente

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

est régulière aux points du demi-plan $\Re(s) \geqq c$ et y satisfait à la condition

$$\lim_{|s| = \infty} \frac{f(s)}{|s|^k} = 0, \tag{3}$$

uniformément avec $|s|$, la série $\Sigma a_n n^{-s}$ est sommable par les moyennes arithmétiques d'ordre k' (k' désignant un nombre quelconque $> k$) en tout point de la droite $\Re(s) = c$ et du demi-plan $\Re(s) > c$. La sommabilité est uniforme en toute bande du domaine $\Re(s) \geqq c$ qui est parallèle à

mabilitätsstreifen von $\lambda_0 \cdots \lambda_1$ ab bis zu $\lambda_{r-1} \cdots \lambda_r$ ihre Maximalbreite I haben. Nur im Satze II, d. h. für den speziellen Wert $r = 1$, ist die entsprechende Einschränkung nicht notwendig, da dann im Beweise gewisse Glieder gar nicht erst auftreten, zu deren Behandlung ich im allgemeinen Falle (Satz III und IV) die Annahme nicht entbehren kann, dass der reelle Punkt γ, in welchem die Summabilität r. Ordnung nachgewiesen werden soll, von der Summabilitätsabscisse $(r - 1)$. Ordnung einen geringeren Abstand als 1 hat.[13] Ich füge noch hinzu, dass beide Sätze natürlich auch dann richtig bleiben, wenn λ_{r-1} nicht die genaue Grenzabscisse der Summabilität $(r - 1)$. Ordnung, sondern nur irgend eine Zahl bedeutet, welche die Eigenschaft hat, dass die Reihe für jede grössere Abscisse summabel von mindestens der $(r - 1)$. Ordnung ist.

Was nun den Satz IV anbetrifft, so hat sich zuerst Herr Bohr[14] damit beschäftigt, meinen Satz I auf die Summabilitätstheorie der Dirichletschen Reihen zu übertragen. Da er sich aber nur das Ziel steckt, nach gewissen Reihenumformungen den Satz I anzuwenden, so erhält er den Satz IV nur mit einer sehr wesentlichen Einschränkung, die z. B. nicht gestattet, den Satz III daraus abzuleiten; in der Tat kann, da Herr Bohr auf neue funktionentheoretische Ent-

l'axe réel.

Da die Annahme (3) für $k > 0$ von der Bedingung

$$\lim_{|t| \to r} \frac{f(s)}{|t|^k} = 0 \text{ (gleichmässig für alle } \sigma \geq c) \tag{4}$$

nur formal verschieden ist, so ist in diesem Satze genau mein Satz III enthalten. Aus (2) folgt nämlich nach dem oben zitierten Phragmén-Lindelöf'schen Satze, dass, wenn ε eine beliebig kleine Zahl > 0 ist, die Bedingung (4) gleichmässig für alle $\sigma \geq \eta + \varepsilon = c$ gilt, wenn nur der Exponent $k < r$ der Zahl r hinreichend nahe liegt. Die Reihe $f(s)$ ist daher, wenn (2) vorausgesetzt wird, nach dem Riesz'schen Satze in der Halbebene $\sigma \geq \eta + \varepsilon$ und also auch in der Halbebene $\sigma > \eta$ summabel von der r. Ordnung, und der Riesz'sche Satz besagt sogar etwas mehr als mein Satz III, da eben durch seinen Wortlaut die Möglichkeit, dass $\eta < \lambda_{r-1} - 1$ sein kann, von vonherein ausgeschlossen wird. Herr Riesz hat mir mitgeteilt, wie ich mit seiner Zustimmung hier erwähne, dass er demnächst in zwei auf einander folgenden Noten zuerst einen allgemeinen Grenzwertsatz und sodann, darauf gestützt, seinen oben mitgeteilten Satz beweisen werde. Aus diesem Brief ersehe ich, dass die Beweisführung von Herrn Riesz, über die er an der zitierten Stelle nur eine kurze und sehr allgemeine Andeutung macht, von den in der vorliegenden Abhandlung gegebenen Entwicklungen verschieden ist, da ein anderer Integrationsfaktor benutzt wird; überhaupt scheint das im Satze I behandelte Problem, das dann in dem allgemeinen Satze IV, der II und III als Spezialfälle enthält, weiter verfolgt wird und den Ausgangspunkt der vorliegenden Abhandlung bildet, nicht in der Richtung der Riesz'schen Gedankenanordnung zu liegen. Übrigens soll in den versprochenen Abhandlungen das Entsprechende auch für den auf nicht ganzzahliges r verallgemeinerten Summabilitätsbegriff bewiesen werden, von dem ja schon in dem oben zitierten Riesz'schen Satze die Rede ist.

[13] Vergl. indessen den Schlussparagraphen 5.

[14] Vergl. die in Anmerkung 7 zitierte Arbeit sowie die in Anmerkung 2 zitierte Habilitationsschrift.

wicklungen verzichtet, sein Resultat in funktionentheoretischem Sinne nicht tiefer liegen als der Satz I. Indessen hat auch das von Herrn BOHR erzielte Resultat ihm gestattet, eine sehr wichtige spezielle Folgerung daraus abzuleiten, die den innigen Zusammenhang zwischen den Summabilitätseigenschaften der Reihe $f(s)$ und dem analytischen Verhalten der Funktion $f(s)$ ins hellste Licht stellt. Indem ich diese Folgerung nunmehr anstatt an IV lieber an den einfacheren Satz III anknüpfe, definiere ich mit Herrn BOHR neben der Konstanten $\varDelta = \lim_{r=\infty} \lambda_r$, der Abscisse der Summabilitätsgrenzgeraden, in ähnlicher Weise mittelst eines DEDEKIND'schen Schnittes eine Konstante M folgendermassen: Ist ε eine beliebig kleine Zahl > 0, so soll die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma \geqq M + \varepsilon$ regulär sein, und es sollen sich stets zwei Konstanten K und A angeben lassen, so dass für $\sigma \geqq M + \varepsilon$, $|t| \geqq 1$

$$(5) \qquad |f(s)| < A\,|t|^K$$

ist, während in jeder Halbebene $\sigma \geqq M - \varepsilon$ die Funktion entweder nicht mehr regulär bleibt oder doch nicht mehr dieser Bedingung genügt. Nun führt die Annahme $\varDelta < M$ zu einem Widerspruch. Denn wenn $\varDelta < N < M$ bei endlichem N ist, so wäre nach dem Satz mit der Formel (1) für alle $\sigma \geqq N$, $|t| \geqq 1$ bei hinreichend grossem K die Ungleichung (5) erfüllt, weil wegen $N > \varDelta$ die Reihe $f(s)$ sogar noch in einem gewissen Intervall links von N summabel ist; dies steht aber im Gegensatz zum zweiten Teil der Definition von M, da ja $N < M$ ist. Andererseits führt auch die Annahme $\varDelta > M$ zu einem Widerspruch; denn wenn $M < N < \varDelta$ bei endlichem N ist, so wäre wegen $N > M$ nach dem ersten Teil der Definition von M die Beziehung (5) für alle $\sigma \geqq N$, $|t| \geqq 1$ erfüllbar; nimmt man in dieser $K = r$ ganzzahlig an und wählt r so gross, dass $\lambda_{r-1} - \varDelta < 1$ ist, was wegen $\lim_{r=\infty} \lambda_r = \varDelta$ möglich ist, so würde nach dem Satze III folgen, dass die Reihe $f(s)$ entweder für $\sigma > N$ oder für $\sigma > \lambda_{r-1} - 1$ summabel von der r. Ordnung ist. Da aber diese beiden Zahlen $< \varDelta$ sind, so wäre die Reihe $f(s)$ im Widerspruch zu der Definition von $\varDelta$ noch in einem gewissen Intervall links von $\varDelta$ summierbar. *Es bleibt daher nur $\varDelta = M$ übrig*, d. h. in nicht ganz präziser Ausdrucksweise: die Reihe $f(s)$ ist stets so weit und nur so weit summierbar, als die durch sie dargestellte Funktion regulär bleibt und in Bezug auf die Ordinate höchstens von endlicher Grössenordnung unendlich wird. Damit ist derjenige Satz für die Summabilitätsgrenzgerade festgestellt, dessen Analogon sich für die Konvergenzgerade als unrichtig erwies. Ich erwähne noch, dass Herr BOHR an Beispielen gezeigt hat, dass alle denkbaren Fälle vorkommen können: Besitzt die Reihe $f(s)$ überhaupt ein Konvergenzgebiet, so ist sie entweder in der ganzen

Ebene summabel, und es ist die dargestellte ganze transzendente Funktion in der ganzen Ebene nur von endlicher Grössenordnung in Bezug auf die Ordinate, oder es existiert eine im Endlichen gelegene vertikale Gerade, welche einerseits die Summabilitätsgrenzgerade ist und andererseits funktionentheoretisch die folgenden Eigenschaften besitzt: Entweder enthält sie selbst einen singulären Punkt der Funktion oder singuläre Punkte in beliebiger Nähe, oder die Funktion ist noch in einer Halbebene über diese Grenzgerade hinaus regulär, hört aber auf der Grenzgeraden auf, in dem bei der Definition von M angegebenen Sinne in Bezug auf die Ordinate von endlicher Grössenordnung zu sein.

Für diesen letzten Fall hat ferner Herr BOHR,[15] an bekannte funktionentheoretische Untersuchungen anknüpfend, nachgewiesen, dass die Funktion $f(s)$ in dem beliebig schmalen vertikalen Streifen $M - \varepsilon < \sigma < M + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ jeden reellen oder komplexen Wert annimmt, mit Ausnahme von höchstens einem einzigen Werte.

Zu den Sätzen III und IV zurückkehrend, definiere ich nunmehr neben der Folge der Summabilitätsabscissen λ_r eine weitere Folge von Grössen μ_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ folgendermassen: Es soll die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \mu_r$ regulär sein, und es soll sich, wenn δ und ε irgend zwei beliebig kleine Zahlen > 0 sind, stets eine Konstante $A = A(\delta; \varepsilon)$ so bestimmen lassen, dass für alle $\sigma \geq \mu_r + \varepsilon$, $|t| \geq 1$

$$|f(s)| < A\,|t|^{r+\delta} \tag{6}$$

ist; dagegen soll in jeder Halbebene $\sigma \geq \mu_r - \varepsilon$ die Funktion entweder nicht mehr überall regulär sein, oder es soll doch im Gebiet $\sigma \geq \mu_r - \varepsilon$, $|t| \geq 1$ nicht mehr für beliebig kleines $\delta > 0$ die obige Ungleichung erfüllbar sein. μ_r ist also als die kleinste Zahl der angegebenen Eigenschaften definiert. Der Beweis, dass eine solche Konstante immer existiert, sobald die Reihe überhaupt ein Konvergenzgebiet besitzt, lässt sich leicht mit Hilfe der bekannten Gedankenanordnung des DEDEKIND'schen Schnittes führen, indem man zur zweiten Klasse alle reellen Zahlen σ_1 mit der Eigenschaft rechnet, dass die Funktion $f(s)$ für $\sigma \geq \sigma_1$ regulär ist und dass nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl $\delta > 0$ sich immer eine Konstante $A = A(\sigma_1; \delta)$ bestimmen lässt, für welche im Gebiet $\sigma \geq \sigma_1$, $|t| \geq 1$

$$|f(s)| < A\,|t|^{r+\delta}$$

[15] »Über die Summabilitätsgrenzgerade der Dirichletschen Reihen», Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem. naturw.-Klasse, Bd. 119, Abteil. II a, 1910, S. 1391—1397.

wird, während die erste Klasse alle reellen Zahlen σ_2 umfassen soll, die nicht diese Eigenschaft besitzen[16]. Aus der angegebenen Definition folgt, dass im Falle $r = 1, 2, \ldots$ bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ im Gebiet $\sigma \geqq \mu_r + \varepsilon$, $|t| \geqq 1$ sogar

$$|f(s)| < A\,|t|^r \tag{7}$$

wird; setzt man nämlich die Ungleichung (6) z. B. für das Gebiet $\sigma \geqq \mu_r + \frac{\varepsilon}{2}$, $|t| \geqq 1$ an, so liefert der schon mehrfach zitierte Phragmén-Lindelöf'sche Satz für das Gebiet $\sigma \geqq \mu_r + \varepsilon$, $|t| \geqq 1$ die Beziehung (7), wenn nur die in (6) vorkommende Grösse δ hinreichend klein angenommen wird. Ich bemerke jedoch ausdrücklich, dass dies nicht mehr für $r = 0$ gilt. Aus der Definition folgt ferner unmittelbar, *dass die μ_r ebenso wie die λ_r mit wachsendem r niemals zunehmen,* und es folgt aus dem Phragmén-Lindelöf'schen Satze, wie ich in § 1 leicht werde nachweisen können, *dass für $r = 1, 2, \ldots$ auch die Differenzen $\mu_{r-1} - \mu_r$ niemals zunehmen,* so dass also

$$\mu_0 - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2 \geqq \mu_2 - \mu_3 \geqq \ldots \geqq 0$$

ist. Die μ_r genügen also genau denselben Ungleichheitsbedingungen wie die Grössenfolge λ_r, nur dass für die λ_r noch die eine Ungleichung $1 \geqq \lambda_0 - \lambda_1$ hinzutritt.[17] Ferner folgt unmittelbar aus der Definition der μ_r, dass $\lim\limits_{r=\infty} \mu_r = M$ ist, wo M die oben definierte Konstante bedeutet, also auch $= A$ ist: *die beiden Grössenfolgen λ_r und μ_r haben für $r = \infty$ stets denselben Grenzwert. Weiter ist für $r = 0, 1, \ldots$ die Grösse $\lambda_r \geqq \mu_{r+1}$;* wäre nämlich einmal $\lambda_r < \mu_{r+1}$, so würde wegen $\frac{\lambda_r + \mu_{r+1}}{2} > \lambda_r$ nach der Formel (1) für alle $\sigma \geqq \frac{\lambda_r + \mu_{r+1}}{2}$, $|t| > 1$ die Beziehung

$$|f(s)| < A\,|t|^{r+1}$$

[16] Es bleibt natürlich möglich, dass Zahlen der ersten Klasse nicht existieren, d. h. dass schon für ein endliches r die Konstante $\mu_r = -\infty$ wird. Dies ist aber, wie man leicht sieht nur dann der Fall, wenn die Reihe in der ganzen Ebene konvergiert und also auch in der ganzen Ebene absolut konvergiert; dann haben alle Zahlen λ_r wie μ_r von $r = 0$ an den Wert $-\infty$, so dass die ganze Summabilitätstheorie gegenstandslos wird. Es ergibt sich nämlich aus der Tatsache, dass die μ_r mit wachsendem r niemals zunehmen und aus den in der Folge zu entwickelnden Ungleichungen $\mu_0 - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2 \geqq \mu_2 - \mu_3 \geqq \ldots > \mu_{r-1} - \mu_r$, dass im Falle $\mu_r = -\infty$ auch $\mu_{r-1} = -\infty$ und schliesslich $\mu_1 = -\infty$ wird; hieraus aber folgt wegen $\lambda_1 \leqq \mu_1$ weiter, dass auch $\lambda_1 = -\infty$ wird, und wegen $0 \leqq \lambda_0 - \lambda_1 \leqq 1$, dass schon $\lambda_0 = -\infty$ ist, womit die Konvergenz der Reihe $f(s)$ in der ganzen Ebene nachgewiesen ist.

Ich bemerke ferner, dass die Bedingung (6) *auf der Geraden $\sigma = \mu_r$ selbst* nicht einmal für alle hinreichend grossen $|t|$ erfüllt zu sein braucht, da ja z. B. auf dieser unendlich viele singuläre Punkte der Funktion $f(s)$ liegen können, die sich im Unendlichen häufen.

[17] Es ist ferner, wenn l die Grenzabscisse der absoluten Konvergenz bezeichnet, auch $1 \geqq l - \lambda_0$, wie man mit wenigen Zeilen beweisen kann, aber nicht etwa stets $l - \lambda_0 \geqq \lambda_0 - \lambda_1$.

bestehen, die wegen $\frac{\lambda_r + \mu_{r+1}}{2} < \mu_{r+1}$ dem zweiten Teil der Definition von μ_{r+1} widerspricht. *Umgekehrt ergibt sich, dass für $r = 1, 2, \ldots$ die Grösse λ_r höchstens gleich der grösseren der beiden Zahlen μ_r und $\lambda_{r-1} - 1$ ist*; setzt man nämlich $\eta = \mu_r + \varepsilon$, so folgt aus der Beziehung (7) nach dem Satz III, dass die Reihe $f(s)$ für alle $\sigma > \mu_r + \varepsilon$, welche zugleich $> \lambda_{r-1} - 1$ sind, summabel von der r. Ordnung ist. Da nun $\varepsilon > 0$ beliebig klein angenommen werden darf, so ergibt sich $\lambda_r \leq \text{Max.}\,(\mu_r;\ \lambda_{r-1} - 1)$. Für $r = 1$ und $r = 0$ liefern die Sätze II bezw. I sogar $\lambda_1 \leq \mu_1$, $\lambda_0 \leq \mu_0$. Setzt man endlich, um Satz IV anzuwenden, für irgend eine positive ganze Zahl k die dort auftretende Konstante $\eta = \mu_{r+k} + \varepsilon$, so gilt nach der Definition von μ_{r+k} für $\sigma \geq \eta$, $|t| \geq 1$ die Beziehung (7), in der nur $r + k$ statt r zu schreiben ist, und der Satz IV ergibt, dass die Reihe $f(s)$ für alle $\sigma > \frac{(\mu_{r+k} + \varepsilon) + k\lambda_{r-1}}{1 + k}$, welche zugleich $> \lambda_{r-1} - 1$ sind, von der r. Ordnung summabel ist. *Also ist für $r = 1, 2, \ldots$ die Abscisse* $\lambda_r \leq \text{Max.}\left(\frac{\mu_{r+k} + k\lambda_{r-1}}{1 + k};\ \lambda_{r-1} - 1\right)$, *wo k irgend eine positive ganze Zahl bedeutet;* hierin ist natürlich für $k = 0$ die aus dem Satze III sich ergebende Formel enthalten.[18]

Damit ist eine Menge paralleler Eigenschaften und gegenseitiger Beziehungen zwischen den Zahlen λ_r und μ_r bewiesen, wo die λ_r die charakteristischen Abscissen für die Summabilitätseigenschaften der Reihe, die μ_r die charakteristischen Abscissen für die Grössenordnung der Funktion in Bezug auf die Ordinate sind. Alle diese Resultate beruhen nur auf der einen selbstverständlichen Voraussetzung, dass die betrachtete Reihe überhaupt ein Konvergenzgebiet besitzt. Zum Vergleich ziehe ich schliesslich noch diejenigen speziellen Dirichletschen Reihen heran, die in der analytischen Zahlentheorie im Mittelpunkt des Interesses stehen, nämlich die Reihe

$$(1 - 2^{1-s})\,\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

und allgemein die Reihen

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

wo $\chi(n)$ irgend einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter modulo k bedeutet; diese letzteren Reihen bilden bekanntlich z. B. die Grundlage des klassischen DIRICHLET'schen Beweises für den Satz, dass in jeder arithmetischen

[18] Vergl. indessen auch zu diesen Resultaten den § 5.

Progression $ky + l$ $(y = 1, 2, \ldots)$, wo k und l teilerfremd sind, unendlich viele Primzahlen vorkommen. Für diese Reihen ist

$$l = 1,\ \lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = -1, \ldots, \lambda_r = -r, \ldots;$$

$$\frac{1}{2} \leq \mu_0 \leq 1,\ \mu_1 = -\frac{1}{2},\ \mu_2 = -\frac{3}{2}, \cdots, \mu_r = -r + \frac{1}{2}, \cdots.$$

Für die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

selbst fallen natürlich alle diese Zahlen in den einen Wert 1 zusammen.

§ 1. Methodische Bemerkungen und Hilfssätze.

Den zweiten Teil dieser Arbeit, in welchem ich im wesentlichen nur die Sätze II bis IV zu beweisen haben werde, beginne ich mit einer Übersicht über die hierbei anzuwendende Methode. Herr Landau hatte in der in Anmerkung 3 zitierten Arbeit, in der zum ersten Mal ein Satz von der Art des oben angegebenen Satzes I bewiesen wird, das Hilfsmittel der Verwendung gewisser Integrale, die in einem ganzen Intervall des Parameters verschwinden, in der folgenden Weise benutzt. Sind die beiden Zahlen c und ϑ positiv und ist ν eine ganze Zahl ≥ 2, so ist bei Integration über die ganze vertikale Gerade $\sigma = c$

$$(8) \qquad \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\vartheta^s}{s^\nu}\, ds = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 < \vartheta \leq 1, \\ \dfrac{2\pi i}{(\nu - 1)!} \log^{\nu-1} \vartheta \text{ für } \vartheta \geq 1. \end{cases}$$

Hieraus folgt, wenn rein formal die unendliche Integration mit der unendlichen Summation vertauscht und unter x eine positive ganze Zahl verstanden wird:

$$\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s f(s)}{s^\nu}\, ds = \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s^\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{1}{s^\nu} \left(\frac{x}{n}\right)^s ds = \frac{2\pi i}{(\nu - 1)!} \sum_{n=1}^{x} a_n \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right),$$

so dass also der Wert des Integrals bei positivem c von c unabhängig ist; bei negativem c unterscheidet er sich von dem ausgerechneten Werte nur um eine von c und x unabhängige Konstante, wie man unter geeigneten Voraussetzungen über die Regularität von $f(s)$ und über das Unendlichwerden von $f(s)$ auf verti-

kalen Geraden mittelst des CAUCHY'schen Integralsatzes leicht beweisen kann. Kann man nun unter Benutzung der eben erwähnten funktionentheoretischen Voraussetzungen über $f(s)$ bei passender Wahl von c nachweisen, dass das Integral links für $x=\infty$ konvergiert, so folgt, dass auch die endliche Summe rechts für $x=\infty$ konvergiert, woraus sich dann elementar die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ für gewisse Werte von s ableiten lässt. Der Kern des Beweises besteht also erstens in dem Nachweis, dass das Integral links für $x=\infty$ konvergiert, und zweitens in dem Nachweis, dass jene Vertauschung von Summation und Integration erlaubt ist; dies letztere ist um so wichtiger, als man gerade in der Theorie der Dirichletschen Reihen durch Vernachlässigung dieses Nachweises zu nachgewiesenermassen falschen Resultaten gelangt war. Die zu beiden Zwecken nötigen Abschätzungen aber beruhen ihrem Wesen nach auf der für $\nu \geqq 2$ gesicherten *absoluten* Konvergenz des Integrales (8), d. h. auf der Tatsache, dass der Ausdruck $\frac{1}{s^\nu}$ für $\nu \geqq 2$ von mindestens der zweiten Ordnung verschwindet, wenn s unendlich gross wird. Dies ist der Grund, weshalb bei vielen Entwicklungen der analytischen Zahlentheorie und auch an der zitierten Stelle die Integrale (8) verwendet werden und nicht vielmehr das schon bei RIEMANN vorkommende Integral

$$\lim_{T=\infty}\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti}\frac{\vartheta^s}{s}\,ds=\begin{cases}0 \text{ für } 0<\vartheta<1,\\ \pi i \text{ für } \vartheta=1,\\ 2\pi i \text{ für } \vartheta>1,\end{cases} \tag{9}$$

welches formal die viel einfachere Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{T=\infty}\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti}\frac{x^s f(s)}{s}\,ds=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,.\lim_{T=\infty}\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti}\frac{1}{s}\left(\frac{x}{n}\right)^s ds=\sum_{n=1}^{x-1}a_n+\frac{1}{2}a_x$$

liefert, aber eben nicht absolut konvergiert. Hier steht rechts abgesehen von dem nicht störenden Summanden $\frac{1}{2}a_x$ gerade der Ausdruck, dessen Verhalten für $x=\infty$ untersucht werden soll. Meine in Anmerkung 4 zitierte Arbeit, in welcher der Satz I bewiesen wird, beruht nun auf dem Gedanken, die geschilderten Schwierigkeiten, welche alle darin begründet sind, dass in (9) der Ausdruck $\frac{1}{s}$ für $s=\infty$ nur von der ersten Ordnung verschwindet, dadurch zu vermeiden, dass

ich das in dieser formalen Gleichung vorkommende T von vornherein als eine wohlbestimmte Funktion von x definiere, die zugleich mit x unendlich wird, und also die beiden successiven Grenzübergänge $T = \infty$, $x = \infty$ durch einen simultanen Grenzübergang $x = \infty$, also auch $T = \infty$ ersetze; dadurch gelingt es, mit dem Integrale

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{x^s f(s)}{s}\, ds$$

auch dann zum Ziel zu kommen, wenn zugelassen werden muss, dass die Integrationsgerade $\sigma = c$ auf der linken Seite der Konvergenzgeraden $\sigma = \lambda_0$ liegt.

Die neuen Resultate der vorliegenden Arbeit beruhen nun darauf, dass ich Integrale heranziehe, welche die Vorzüge der Integrale (8) und (9) in sich vereinigen; ich benutze nämlich anstatt dieser Integrale

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\, ds, \tag{10}$$

wo $R(s)$, das an die Stelle von $\frac{1}{s^v}$ bezw. $\frac{1}{s}$ tritt, eine rationale Funktion von s ist, die im Punkte $s = 0$ einen Pol von genau der ersten Ordnung besitzt, aber dennoch im Unendlichen von mindestens der zweiten Ordnung verschwindet; $R(s)$ muss dann ausserdem noch andere Pole besitzen, die ich ebenfalls von der ersten Ordnung ansetze und der Eigenart des zu beweisenden Satzes entsprechend verteile. Durch eine geeignete Festlegung der Pole lässt sich z. B. erreichen, dass bei dem Beweise des sehr komplizierten Satzes IV keinerlei formale Schwierigkeiten auftreten.

Die eigentlichen Beweisentwicklungen beginne ich mit einer Diskussion der Integrale (10), indem ich zunächst zeige, dass sich die zum Beweise von (9) dienenden und für $c > 0$, $T > 0$ geltenden Abschätzungen

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{\vartheta^s}{s}\, ds - 2\pi i\right| < \frac{2}{T}\frac{\vartheta^c}{|\log\vartheta|} \text{ für } \vartheta > 1, \\ &\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{\vartheta^s}{s}\, ds\right| < \frac{2}{T}\frac{\vartheta^c}{|\log\vartheta|} \text{ für } 0 < \vartheta < 1, \\ &\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{ds}{s} - \pi i\right| < \frac{2c}{T} \text{ (für } \vartheta = 1) \end{aligned}\right. \tag{11}$$

in ähnlicher Weise[19] zunächst für die Funktion

$$R(s) = \frac{1}{s(s+1)\dots(s+r)},$$

wo r eine ganze Zahl ≥ 1 ist, aufstellen lassen. Durch dieselbe klassische Methode der Anwendung des CAUCHY'schen Integralsatzes erhalte ich nämlich unter den Voraussetzungen $c > 0$, $T > 0$ die folgenden Hilfsformeln:

$$\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\,ds - \frac{2\pi i}{r!}\left(1-\frac{1}{\vartheta}\right)^r\right| \leq \frac{2}{T^{r+1}} \frac{\vartheta^c}{|\log\vartheta|} \text{ für } \vartheta > 1, \tag{12}$$

$$\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\,ds\right| \leq \frac{2}{T^{r+1}} \frac{\vartheta^c}{|\log\vartheta|} \text{ für } 0 < \vartheta < 1, \tag{13}$$

$$\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} R(s)\,ds\right| \leq \frac{\pi}{T^r} \text{ (für } \vartheta = 1). \tag{14}$$

Hieraus folgt natürlich unmittelbar durch den Grenzübergang $T = \infty$

$$\lim_{T=\infty} \int_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\,ds = \begin{cases} \frac{2\pi i}{r!}\left(1-\frac{1}{\vartheta}\right)^r \text{ für } \vartheta \geq 1, \\ 0 \text{ für } 0 < \vartheta \leq 1. \end{cases}$$

Beweis: Um zunächst die Formel (12) zu beweisen, wende ich den CAUCHY'schen Integralsatz auf den Integranden $\vartheta^s R(s)$ und auf das Rechteck mit den Ecken $c \pm Ti$, $-A \pm Ti$ an, wo A eine beliebig grosse positive Zahl $> r$ sein soll. Dann ergibt sich

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\,ds = \int_{c-Ti}^{-A-Ti} \vartheta^s R(s)\,ds + \int_{-A-Ti}^{-A+Ti} \vartheta^s R(s)\,ds + \int_{-A+Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\,ds + 2\pi i S, \tag{15}$$

wo S die Summe der Residuen der Funktion $\vartheta^s R(s)$ in dem betrachteten Rechteck sein soll. Nun konvergiert das zweite Integral rechts für $A = \infty$ gegen 0, da der

[19] Ein ausführlicher Beweis dieser Formeln findet sich z. B. in Herrn LANDAU's »Handbuch« vergl. Anmerkung 5), Bd. I, S. 342—346.

Integrand wegen $\vartheta > 1$ gleichmässig auf dem vertikalen endlichen Integrationswege $-A - Ti \ldots -A + Ti$ gegen 0 konvergiert; es ist nämlich für alle s dieses Integrationsweges

$$|\vartheta^s R(s)| = \left|\frac{\vartheta^s}{s(s+1)\ldots(s+r)}\right| < \frac{\vartheta^{-A}}{(A-r)^{r+1}}.$$

Die beiden anderen Integrale auf der rechten Seite von (15) konvergieren für $A = \infty$ sogar absolut; es ist nämlich z. B. für das erste Integral

$$\left|\int_{c-Ti}^{-A-Ti} \vartheta^s R(s)\, ds\right| < \frac{1}{T^{r+1}} \int_{-A}^{c} \vartheta^\sigma\, d\sigma = \frac{1}{T^{r+1}} \frac{1}{\log \vartheta}(\vartheta^c - \vartheta^{-A}) < \frac{1}{T^{r+1}} \frac{\vartheta^c}{\log \vartheta},$$

während das dritte Integral genau derselben Abschätzung genügt. Was nun schliesslich den in (15) vorkommenden Ausdruck S anbetrifft, so ist, da der Integrand innerhalb des Integrationsgebietes die $r+1$ Pole erster Ordnung $s = 0$, $s = -1, \ldots, s = -r$ besitzt:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{r!} + \frac{\vartheta^{-1}}{(-1)(+1)\ldots(r-1)} + \frac{\vartheta^{-2}}{(-2)(-1)(+1)\ldots(r-2)} + \cdots + \frac{\vartheta^{-r}}{-r(-r+1)\ldots(-1)} \\ &= \frac{1}{r!}\left(1 - \binom{r}{1}\vartheta^{-1} + \binom{r}{2}\vartheta^{-2} - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r}\vartheta^{-r}\right) \\ &= \frac{1}{r!}\left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right)^r. \end{aligned}$$

Trägt man alle erhaltenen Resultate in die Formel (15) ein, so ergibt sich die Behauptung (12).

Ganz analog verläuft der Beweis für den Fall $\vartheta < 1$. Wendet man den Cauchy'schen Satz auf das Rechteck mit den Ecken $c \pm Ti$, $A \pm Ti$ an, in welchem der Integrand durchweg regulär ist, so ergibt sich

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\, ds = \int_{c-Ti}^{A-Ti} \vartheta^s R(s)\, ds + \int_{A-Ti}^{A+Ti} \vartheta^s R(s)\, ds + \int_{A+Ti}^{c+Ti} \vartheta^s R(s)\, ds.$$

Auch hier ist für alle s auf dem Integrationswege des mittleren Integrals

$$|\vartheta^s R(s)| = \left|\frac{\vartheta^s}{s(s+1)\ldots(s+r)}\right| < \frac{\vartheta^A}{A^{r+1}},$$

was wegen $0 < \vartheta < 1$ für $A = \infty$ gegen 0 konvergiert, und es ist für das erste Integral rechts

$$\left|\int_{c-Ti}^{A-Ti} \vartheta^s R(s)\,ds\right| < \frac{1}{T^{r+1}} \int_c^A \vartheta^\sigma\,d\sigma = \frac{1}{T^{r+1}} \frac{1}{-\log\vartheta}(\vartheta^c - \vartheta^A) < \frac{1}{T^{r+1}} \frac{\vartheta^c}{|\log\vartheta|},$$

während für das dritte Integral rechts genau dieselbe Abschätzung gilt. Damit ist auch die Formel (13) bewiesen.

Um schliesslich (14) nachzuweisen, wende ich den CAUCHY'schen Satz auf den Integranden $R(s)$ und auf das Gebiet an, welches einerseits von der geraden Linie $c - Ti \ldots c + Ti$, andererseits von dem über dieser Strecke als Durchmesser nach rechts beschriebenen Halbkreis K begrenzt wird, dessen Bogenlänge πT ist. Da der Integrand in diesem Gebiet durchweg regulär ist, so ergibt sich, wenn der Halbkreis von $c - Ti$ bis $c + Ti$ durchlaufen wird:

$$\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} R(s)\,ds\right| = \left|\int_K R(s)\,ds\right| = \left|\int_K \frac{ds}{s(s+1)\ldots(s+r)}\right| < \pi T \cdot \frac{1}{T^{r+1}} = \frac{\pi}{T^r},$$

womit auch (14) bewiesen ist.

Die entsprechenden Formeln für die Funktion

$$\bar{R}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-i} = -\frac{i}{s(s-i)}$$

brauche ich nicht mehr besonders zu beweisen, um nicht die soeben entwickelten Rechnungen für den Spezialfall $r = 1$ mit geringen Abänderungen zu wiederholen. Es ergibt sich unter den Voraussetzungen $c > 0$, $T > 2$:

$$(16) \qquad \begin{cases} \left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s \bar{R}(s)\,ds - 2\pi i(1 - \vartheta^i)\right| \leqq \frac{3}{T^2} \frac{\vartheta^c}{|\log\vartheta|} \text{ für } \vartheta > 1, \\ \left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \vartheta^s \bar{R}(s)\,ds\right| < \frac{3}{T^2} \frac{\vartheta^c}{|\log\vartheta|} \text{ für } 0 < \vartheta < 1, \\ \left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \bar{R}(s)\,ds\right| < \frac{2\pi}{T} \text{ für } (\vartheta = 1). \end{cases}$$

Schliesslich brauche ich noch eine Transformation der Formeln (11). Führt man anstatt der Variablen s die Variable $s - r$ ein, so ergibt sich

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{\vartheta^s}{s+r}\, ds = \vartheta^{-r} \int_{c+r-Ti}^{c+r+Ti} \frac{\vartheta^s}{s}\, ds.$$

Aus (11) ergibt sich daher für $c > -r$, also umsomehr für $c > 0$ die folgende Abschätzung, in der natürlich $T > 0$ angenommen werden muss:

$$(17)\quad \begin{cases} \left| \displaystyle\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{\vartheta^s}{s+r}\, ds - 2\pi i\, \vartheta^{-r} \right| \leq \dfrac{2}{T} \dfrac{\vartheta^c}{|\log \vartheta|} & \text{für } \vartheta > 1, \\[2ex] \left| \displaystyle\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{\vartheta^s}{s+r}\, ds \right| \leq \dfrac{2}{T} \dfrac{\vartheta^c}{|\log \vartheta|} & \text{für } 0 < \vartheta < 1. \end{cases}$$

Die entsprechende Formel für $\vartheta = 1$ wird nicht angewendet werden.

Um den Gang der Entwicklungen in den eigentlichen Beweisen der Sätze II bis IV nicht unterbrechen zu müssen, führe ich hier noch den in der Einleitung oft zitierten PHRAGMÉN-LINDELÖF'schen Satz in der für unsere Anwendungen geeignetsten Form an:

Es sei eine beliebige analytische Funktion $F(s)$ in dem Streifen $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ regulär, und es sei für $\sigma = \sigma_1$, $|t| \geq 1$

$$|F(s)| < A_1 |t|^k$$

sowie für $\sigma = \sigma_2$ nebst beliebigem t

$$|F(s)| < A_2;$$

schliesslich sei im Gebiet $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $|t| \geq 1$

$$|F(s)| < A_3 |t|^K.$$

Hierbei sind k, K sowie A_1, A_2, A_3 beliebige positive Konstanten. Dann existiert eine Konstante A_4, so dass im Gebiet $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $|t| \geq 1$

$$(18)\qquad |F(s)| < A_4 |t|^{k \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1}}$$

ist.

Der Exponent auf der rechten Seite der erhaltenen Abschätzung nimmt also im Intervall $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ linear von k bis 0 ab. Ein ausführlicher Beweis dieses Satzes in genau der angegebenen Form findet sich an der in Anmerkung 6 zitierten Stelle von Herrn LANDAU's: »Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen«.

Als erste Anwendung hole ich den in der Einleitung übergangenen Beweis nach, dass für die dort definierten Konstanten μ_r, die nach Definition mit wachsendem r niemals zunehmen, die Beziehung $\mu_0-\mu_1\geqq\mu_1-\mu_2\geqq\mu_2-\mu_3\geqq\ldots$ gilt, d. h. dass allgemein $\mu_{r-1}-\mu_r\geqq\mu_r-\mu_{r+1}\,(r=1,2,\ldots)$ ist. Hierbei darf angenommen werden, dass $\mu_{r+1}<\mu_r\leqq\mu_{r-1}$ ist; in den beiden Fällen $\mu_{r+1}=\mu_r<\mu_{r-1}$ und $\mu_{r+1}=\mu_r=\mu_{r-1}$ ist nämlich die Behauptung trivial. Ich setze nun

$$F(s)=\frac{f(s)}{(s-a)^{r-1+\delta}},\ \sigma_1=\mu_{r+1}+\varepsilon,\ \sigma_2=\mu_{r-1}+\varepsilon,$$

wo $f(s)$ die zu den Konstanten μ_r gehörige Dirichletsche Reihe bedeutet, δ und ε beliebig kleine positive Zahlen sind und endlich a irgend eine reelle Zahl ist, die entweder $<\mu_{r+1}+\varepsilon$ oder $>\mu_{r-1}+\varepsilon$ ist. Dann folgt aus der Definitionsbeziehung (6), angewandt auf die Abscissen μ_{r+1} und μ_{r-1}, dass für $\sigma\geqq\mu_{r+1}+\varepsilon$, $|t|\geqq 1$

$$|f(s)|<C\,|t|^{r+1+\delta}$$

und für $\sigma\geqq\mu_{r-1}+\varepsilon$, $|t|\geqq 1$

$$|f(s)|<C_1\,|t|^{r-1+\delta}$$

ist. Hieraus aber ergibt sich, dass für unsere Funktion $F(s)$ in dem angegebenen Intervalle $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$ alle Voraussetzungen des angeführten Satzes mit $k=2$, $K=2$ erfüllt sind. Ferner ist infolge der Annahme $\mu_{r+1}<\mu_r$ für hinreichend kleines ε die Zahl $\mu_{r+1}+\varepsilon<\mu_r-\varepsilon$, so dass $\mu_r-\varepsilon$ im Innern unseres Intervalls liegt. Man darf daher in (18) den speziellen Wert $\sigma=\mu_r-\varepsilon$ einsetzen und erhält im Gebiet $\mu_r-\varepsilon\leqq\sigma\leqq\mu_{r-1}+\varepsilon$, $|t|\geqq 1$

$$\begin{aligned}|F(s)|&<C_2\,|t|^{2\cdot\frac{(\mu_{r-1}+\varepsilon)-(\mu_r-\varepsilon}{\mu_{r-1}-\mu_{r+1}}}\\&=C_2\,|t|^{1+\frac{(\mu_{r-1}-\mu_r)-(\mu_r-\mu_{r+1})+4\varepsilon}{\mu_{r-1}-\mu_{r+1}}}.\end{aligned}$$

Wäre nun $\mu_{r-1}-\mu_r<\mu_r-\mu_{r+1}$, so könnte man ε weiter so klein annehmen, dass der Bruch im Exponenten von $|t|$ verschwindet oder negativ ist; man erhielte dann im Gebiet $\mu_r-\varepsilon<\sigma<\mu_{r-1}+\varepsilon$, $|t|\geqq 1$

$$|F(s)|<C_2\,|t|,$$

$$|f(s)|<C_2\,|t|\cdot|s-a|^{r-1+\delta}<C_3\,|t|^{r+\delta},$$

also im Gebiete $\sigma>\mu_r-\varepsilon$, $|t|>1$

$$|f(s)|<(C_1+C_3)\,|t|^{r+\delta},$$

und zwar für jede beliebig kleine Zahl $\delta > 0$. Dies widerspricht aber der Definition von μ_r, womit bewiesen ist, dass für $r = 1, 2, \ldots$ stets $\mu_{r-1} - \mu_r \geqq \mu_r - \mu_{r+1}$ ist.

§ 2. Beweis von Satz II.

Wir gehen nunmehr zum Beweise des folgenden Satzes über:

II. Es sei die durch die Reihe $f(s)$ in ihrem Konvergenzgebiet dargestellte Funktion für $\sigma \geqq \eta$ regulär, und es existiere eine Konstante A, so dass für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$ die Beziehung

$$|f(s)| < A\,|t| \tag{19}$$

gilt. Dann ist die Reihe $f(s)$ für $\sigma > \eta$ wenigstens summabel von der ersten Ordnung.

Beweis: Wir brauchen nur zu zeigen, dass die Reihe für jeden *reellen* Punkt $\gamma = \eta + d$, wo $d > 0$ ist, von der ersten Ordnung summabel ist. Dazu wenden wir für irgend eine positive ganze Zahl x den CAUCHY'schen Satz auf den Integranden

$$x^s R(s) f(s+\gamma) = x^s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-i}\right) f(s+\gamma)$$

und auf das Rechteck mit den Ecken $-\frac{d}{2} \pm Ti$, $l - \eta \pm Ti$ an, wo $l > \eta$ die Grenzabscisse der absoluten Konvergenz bezeichnet[20] und $T > 2$ sein soll. Dann hat der Integrand im Integrationsgebiet nur die beiden sicher darin gelegenen ev. Pole erster Ordnung $s = 0$ und $s = i$ und ist sonst überall im Integrationsgebiet regulär. Es ergibt sich daher, wenn der Integrand als selbstverständlich weggelassen wird:

$$\int_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti} + \int_{l-\eta+Ti}^{-\frac{d}{2}+Ti} + \int_{-\frac{d}{2}+Ti}^{-\frac{d}{2}-Ti} + \int_{-\frac{d}{2}-Ti}^{l-\eta-Ti} = 2\pi i\,(f(\gamma) - x^i f(\gamma+i)). \tag{20}$$

Wir wenden ferner auf die Funktion $f(s)$ und die beiden Abscissen $\sigma_1 = \eta$, $\sigma_2 = l + d$ den PHRAGMÉN-LINDELÖF'schen Satz an, dessen Voraussetzungen wegen (19) und der absoluten Konvergenz der Reihe $f(s)$ auf der Geraden $\sigma = l + d$ offenbar erfüllt sind, und zwar ist $k = 1$, $K = 1$. Es folgt die Existenz einer Konstanten $\vartheta < 1$, für welche im Gebiet $\sigma \geqq \eta + \frac{d}{2}$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)| < C\,|t|^{\vartheta}$$

[20] Im Falle $l \leqq \eta$ ist nämlich der behauptete Satz trivial.

wird; dies ergibt, auf das Gebiet $\sigma \geqq \eta - \gamma + \frac{d}{2} = -\frac{d}{2}$, $|t| \geqq 1$ übertragen,

$$|f(s+\gamma)| < C\,|t|^{\vartheta}.$$

Ferner ist bei beliebigem σ für $|t| \geqq 2$

$$|R(s)| = \left| -\frac{i}{s(s-i)} \right| < \frac{2}{|t|^2}.$$

Man erhält daher für das dritte Integral auf der linken Seite von (20) die Abschätzung

$$|I_3| = \left| - \int\limits_{-\frac{d}{2}-Ti}^{-\frac{d}{2}+Ti} x^s \bar{R}(s) f(s+\gamma)\,ds \right| \leqq \left| \int\limits_{-\frac{d}{2}-2i}^{-\frac{d}{2}+2i} x^s \bar{R}(s) f(s+\gamma)\,ds \right| + 2 \int\limits_{2}^{T} x^{-\frac{d}{2}} \cdot \frac{2}{t^2} \cdot C t^{\vartheta}\,dt$$

$$< x^{-\frac{d}{2}} \left\{ C_1 + 4C \int\limits_{2}^{\infty} \frac{dt}{t^{2-\vartheta}} \right\} = C_2 x^{-\frac{d}{2}},$$

in der C_2 eine wegen $\vartheta < 1$ endliche, von T und x unabhängige Konstante bezeichnet. Ähnlich ergibt sich für das vierte Integral auf der linken Seite von (20)

$$|I_4| = \left| \int\limits_{-\frac{d}{2}-Ti}^{l-\eta-Ti} x^s \bar{R}(s) f(s+\gamma)\,ds \right| \leqq \frac{2}{T^2} \cdot C T^{\vartheta} \cdot \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{l-\eta} x^{\sigma}\,d\sigma = \frac{2C}{T^{2-\vartheta}} \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{l-\eta} x^{\sigma}\,d\sigma;$$

genau derselben Abschätzung genügt das Integral I_2.

In dem ersten Integral auf der linken Seite von (20) schliesslich darf man für $f(s+\gamma)$ die Reihendarstellung einführen, die ja wegen $\Re(s+\gamma) = (l-\eta) + \gamma = l + d$ auf der ganzen Geraden $\Re(s) = l - \eta$, also auch auf dem endlichen Integrationswege von $l - \eta - Ti$ bis $l - \eta + Ti$ absolut und gleichmässig konvergiert. Infolgedessen ist es gestattet, die Integration unter dem Summenzeichen auszuführen:

$$I_1 = \int\limits_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti} x^s \bar{R}(s) f(s+\gamma)\,ds = \int\limits_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti} x^s \bar{R}(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s+\gamma}}\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\gamma}} \int\limits_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti} \left(\frac{x}{n}\right)^s \bar{R}(s)\,ds.$$

Die Anwendung der Formeln (16) für $\vartheta = \frac{x}{n}$ ergibt daher

$$\left| I_1 - 2\pi i \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^\gamma} \left(1 - \frac{x^i}{n^i}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{|a_n|}{n^\gamma} \cdot \frac{3}{T^2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{l-\eta}}{\left|\log \frac{x}{n}\right|} + \frac{2\pi}{T} \frac{|a_x|}{x^\gamma}$$

$$= \frac{3\, x^{l-\eta}}{T^2} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{|a_n|}{n^{l+d}} \cdot \frac{1}{\left|\log \frac{x}{n}\right|} + \frac{2\pi}{T} \frac{|a_x|}{x^\gamma},$$

wo der Strich am Summenzeichen ausdrücken soll, dass das Glied $n = x$ von der Summation ausgeschlossen ist. Die unendliche Reihe rechts konvergiert natürlich, da der hinzutretende Faktor $\frac{1}{\left|\log \frac{x}{n}\right|}$ für $n = \infty$ sogar gegen 0 konvergiert.

Wir gehen nunmehr bei festem x zur Grenze $T = \infty$ über. Dann verschwindet die rechte Seite der soeben entwickelten Abschätzung über I_1, so dass also der Grenzwert von I_1 gleich der in dieser Abschätzung auf der linken Seite auftretenden endlichen Summe ist, und es verschwinden nach der erhaltenen Abschätzungsformel die Integrale I_4 und I_2. Das Integral I_3 konvergiert, wie wir gesehen haben, für $T = \infty$ sogar absolut, und zwar bleibt sein Grenzwert $\bar{I}_3$ absolut genommen unterhalb der Schranke $C_2 x^{-\frac{d}{2}}$. Nimmt man also in der durch den Grenzübergang $T = \infty$ aus (20) sich ergebenden Gleichung

$$2\pi i \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^\gamma} \left(1 - \frac{x^i}{n^i}\right) + \bar{I}_3 = 2\pi i \left(f(\gamma) - x^i f(\gamma + i)\right)$$

den neuen Grenzübergang $x = \infty$ vor, so bleibt nur übrig

$$\text{(21)} \qquad \lim_{x=\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^\gamma} \left(1 - \frac{x^i}{n^i}\right) - f(\gamma) + x^i f(\gamma + i) \right\} = 0.$$

Nun ist identisch, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{\nu^\gamma} = s_n$$

gesetzt wird,

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^{\gamma+i}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^\gamma} \frac{1}{n^i} = \sum_{n=1}^{x-1} s_n \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) + \frac{s_x}{x^i}$$

$$= \sum_{n=1}^{x-1} (s_n - f(\gamma)) \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) + f(\gamma) \sum_{n=1}^{x-1} \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) + \frac{s_x}{x^i}$$

$$= \sum_{n=1}^{x-1} (s_n - f(\gamma)) \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) + f(\gamma) + \frac{s_x - f(\gamma)}{x^i}.$$

also

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^\gamma}\left(1 - \frac{x^i}{n^i}\right) = s_x - x^i \sum_{n=1}^{x-1} (s_n - f(\gamma)) \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) - x^i f(\gamma) - (s_x - f(\gamma)),$$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^\gamma}\left(1 - \frac{x^i}{n^i}\right) - f(\gamma) + x^i f(\gamma+i) = - x^i \sum_{n=1}^{x-1} (s_n - f(\gamma)) \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) + x^i(f(\gamma+i) - f(\gamma)).$$

Da nach (21) die linke Seite für $x = \infty$ gegen 0 konvergiert, so konvergiert auch die rechte Seite gegen 0, auch dann, wenn sie mit x^{-i} multipliziert wird. Es ergibt sich daher die Konvergenz der Reihe

$$(22) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - f(\gamma)) \left(\frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i}\right) = f(\gamma + i) - f(\gamma).$$

Setzt man ferner

$$s_n - f(\gamma) = \sigma_n, \quad \frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i} = \alpha_n, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu \alpha_\nu = A_n, \quad f(\gamma+i) - f(\gamma) = A,$$

so folgt

$$(23) \qquad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{x} \sigma_n = \sum_{n=1}^{x} \sigma_n \alpha_n \cdot \frac{1}{\alpha_n} &= \sum_{n=1}^{x} A_n \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) + \frac{A_x}{\alpha_{x+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{x} (A_n - A) \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) + \frac{A}{\alpha_1} + \frac{A_x - A}{\alpha_{x+1}}. \end{aligned}$$

Nun ist einerseits, wie mit (22) bewiesen, $\lim\limits_{n=\infty} (A_n - A) = 0$, andererseits ist für $n \geqq 2$

$$\alpha_n = \frac{1}{n^i} - \frac{1}{(n+1)^i} = \frac{1}{n^i}\left\{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-i}\right\} = \frac{i}{n^{1+i}}\left(1 + \frac{\vartheta(n)}{n}\right),$$

$$\frac{1}{\alpha_n} = - i n^{1+i}\left(1 + \frac{\vartheta_1(n)}{n}\right) = - i n^{1+i} + \vartheta_2(n),$$

$$\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n+1}} = - i\,(n^{1+i} - (n+1)^{1+i}) + \vartheta_2(n) - \vartheta_2(n+1) = \vartheta_3(n),$$

wo die Funktionen $\vartheta(n)$ bis $\vartheta_3(n)$ für alle n absolut genommen unterhalb einer festen Schranke liegen. Folglich ergibt sich

$$\lim_{n=\infty} (A_n - A)\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) = 0, \quad \lim_{x=\infty} (A_x - A) \cdot \frac{1}{x} \frac{1}{\alpha_{x+1}} = 0,$$

und daher nach (23)

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} \sigma_n = 0, \quad \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} s_n = f(\gamma).$$

Die letztere Gleichung besagt aber, dass die Reihe $f(s)$ im Punkte $s = \gamma$ summabel von der ersten Ordnung mit dem Wert $f(\gamma)$ ist, was bewiesen werden sollte.

§ 3. Beweis von Satz III.

III. Es sei die durch die Reihe $f(s)$ in ihrem Konvergenzgebiet dargestellte Funktion $f(s)$ für $\sigma \geqq \eta$ regulär, wo $\eta < \lambda_{r-1}$ ist, und es existiere eine Konstante A, so dass für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$

(2) $$|f(s)| < A\,|t|^r$$

ist. Dann ist die Reihe $f(s)$ für alle $\sigma > \eta$, welche zugleich $> \lambda_{r-1} - 1$ sind, summabel von der r. Ordnung.

Zum Beweise dieses Satzes läge es natürlich nahe, nachdem einmal der Satz II mit der Funktion $\bar{R}(s)$ bewiesen worden ist, im allgemeineren Falle auch allgemeinere Integrationsfaktoren $\bar{R}(s)$ einzuführen, die dann etwa die Gestalt

$$R(s) = \frac{1}{s} - \binom{r}{1}\frac{1}{s-i} + \binom{r}{2}\frac{1}{s-2i} - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r}\frac{1}{s-ri}$$

oder die Gestalt

$$\bar{R}(s) = \frac{1}{s(s-i)\ldots(s-ri)}, \quad \bar{R}(s) = \frac{1}{s(s+i)\ldots(s+ri)}$$

haben würden. Alle diese rationalen Funktionen haben nur Pole erster Ordnung und verschwinden im Unendlichen von der $r+1$. Ordnung. Doch treten, welche von diesen Funktionen man auch benutzt, stets beträchtliche formale Schwierigkeiten auf, so dass es scheint, dass der Kunstgriff, der uns am Schlusse des Beweises von Satz II von dem komplizierten Grenzwert (21) zur Konvergenz der Reihe (22) führte, sich nicht leicht auf den Fall des allgemeinen r übertragen lässt. Ich verwende daher jetzt einen ganz anders gebauten Integrationsfaktor

$$R(s) = \frac{1}{s(s+1)\ldots(s+r)},$$

der dem Beweise natürlich eine völlig andere Richtung gibt. Ich bemerke ausdrücklich, dass ich auch mit der Funktion

$$\frac{1}{s(s+1)} \text{ statt } \frac{1}{s} - \frac{1}{s-i}$$

den Satz II seinem vollen Inhalt nach hätte beweisen können, wie sich am Schlusse des folgenden Beweises durch die Spezialisierung $r = 1$ leicht zeigen lässt. Ich wählte den vorgetragenen Beweis, weil es mir methodisch interessant erschien, auch einmal einen derartigen Satz mit einem Integrationsfaktor zu beweisen, dessen beide Pole auf der Achse des Imaginären liegen.

Indem ich nunmehr den Beweis von Satz III durchführe, wende ich wie in II für positives ganzes x den Cauchy'schen Satz auf den Integranden

$$x^s R(s) f(s+\gamma) = \frac{x^s f(s+\gamma)}{s(s+1)\ldots(s+r)}$$

und auf das Rechteck mit den Ecken $-\frac{d}{2} \pm Ti$, $l - \eta \pm Ti$ an. Hierbei ist $T > 0$ und $\gamma = \eta + d$, wo die positive Zahl d so gewählt sei, dass $\lambda_{r-1} - 1 < \gamma \leqq \lambda_{r-1}$ ist. Ist $\lambda_{r-1} - 1$ schon $\leqq \eta$, so darf natürlich d beliebig klein angenommen werden; der Satz III ist seinem vollen Umfange nach bewiesen, wenn gezeigt werden kann, dass für jede derartige Zahl γ die Reihe von der r. Ordnung summabel ist. Da der Integrand in dem ganzen Integrationsgebiet regulär ist mit Ausnahme des sicher[21] darin gelegenen ev. Poles erster Ordnung $s = 0$ und der möglicher Weise darin gelegenen ev. Pole erster Ordnung $s = -1, s = -2, \ldots, s = -r$ (es darf natürlich angenommen werden, dass alle diese Zahlen von $-\frac{d}{2}$ verschieden sind), so ergibt sich:

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int\limits_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti} + \int\limits_{l-\eta+Ti}^{-\frac{d}{2}+Ti} + \int\limits_{-\frac{d}{2}+Ti}^{-\frac{d}{2}-Ti} + \int\limits_{-\frac{d}{2}-Ti}^{l-\eta-Ti} = \\ & 2\pi i \left\{ \frac{1}{r!} f(\gamma) + \frac{x^{-1} f(\gamma-1)}{(-1)(+1)\ldots(r-1)} + \frac{x^{-2} f(\gamma-2)}{(-2)(-1)\ldots(r-2)} \cdots \right\}, \end{aligned} \right.$$

wo auf der rechten Seite im Falle $\frac{d}{2} < 1$ nur das Glied $\frac{2\pi i}{r!} f(\gamma)$ auftritt, jeden-

[21] Es ist nämlich $\eta < \lambda_{r-1} \leqq l$, also $l - \eta > 0$, da ja l die Grenzabcisse der absoluten Konvergenz bezeichnet.

falls aber die Anzahl der Zusatzglieder höchstens r beträgt; diese etwaigen Zusatzglieder verschwinden natürlich beim Grenzübergang $x = \infty$. Nun existiert nach dem PHRAGMÉN-LINDELÖF'schen Satze, da die Reihe $f(s)$ z. B. auf der Geraden $\sigma = l + d$ absolut genommen unterhalb einer endlichen Schranke liegt, infolge (2) eine Zahl $\vartheta < 1$, so dass im Gebiet $\sigma \geqq \eta + \frac{d}{2}$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)| < C\,|t|^{r-1+\vartheta},$$

also im Gebiet $\sigma \geqq \eta - \gamma + \frac{d}{2} = -\frac{d}{2}$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s+\gamma)| < C\,|t|^{r-1+\vartheta}$$

ist. Ferner ist bei beliebigem σ für jedes $t \neq 0$

$$|R(s)| = \left|\frac{1}{s(s+1)\ldots(s+r)}\right| < \frac{1}{|t|^{r+1}}.$$

Da nun genau wie beim Beweise von II die Differenz der in den beiden letzten Ungleichungen rechts auftretenden Exponenten $(r+1) - (r-1+\vartheta) = 2 - \vartheta > 1$ ist, so ergibt sich ebenso wie dort, wenn die auf der linken Seite von (24) auftretenden Integrale fortlaufend mit I_1 bis I_4 bezeichnet werden,

$$|I_3| < C_1\, x^{-\frac{d}{2}},\quad |I_4| < \frac{C}{T^{2-\vartheta}} \int_{-\frac{d}{2}}^{l-\eta} x^\sigma\, d\sigma,\quad |I_2| < \frac{C}{T^{2-\vartheta}} \int_{-\frac{d}{2}}^{l-\eta} x^\sigma\, d\sigma,$$

wo C und C_1 von x und T unabhängige Konstanten bedeuten.

In dem Integrale I_1 dürfen wir wie in II für $f(s+\gamma)$ die Reihenentwicklung einsetzen, da ja dort $\Re(s+\gamma) = (l-\eta) + \gamma = l + d$ ist, und es darf wegen der gleichmässigen Konvergenz der Reihe auf dem Integrationswege die Summation mit der Integration vertauscht werden. Dies ergibt

$$I_1 = \int_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti} x^s R(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s+\gamma}}\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\gamma} \int_{l-\eta-Ti}^{l-\eta+Ti} \left(\frac{x}{n}\right)^s R(s)\, ds.$$

Also ist infolge der Formeln (12), (13), (14), wenn dort $\vartheta = \frac{x}{n}$ gesetzt wird:

$$\left| I_1 - \frac{2\pi i}{r!} \sum_{n=1}^{x-1} \frac{a_n}{n^\gamma} \left(1 - \frac{n}{x}\right)^r \right| < \frac{2\,x^{l-\eta}}{T^{r+1}} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{|a_n|}{n^{\gamma+l-\eta}} \frac{1}{\left|\log \frac{x}{n}\right|} + \frac{\pi}{T^r} \frac{|a_x|}{x^\gamma},$$

wo der Strich am Summenzeichen bedeuten soll, dass das Glied $n = x$ von der Summation ausgeschlossen ist, und wo die unendliche Reihe wegen $\gamma + l - \eta = l + d$ konvergiert. Da die rechte Seite für $T = \infty$ gegen o konvergiert, ebenso wie die Integrale I_1 und I_2, so ergibt sich aus (24) durch diesen Grenzübergang unter Berücksichtigung auch der über I_3 gewonnenen Abschätzung:

$$\frac{2\pi i}{r!} \sum_{n=1}^{x-1} \frac{a_n}{n^\gamma} \left(1 - \frac{n}{x}\right)^r + h(x) = \frac{2\pi i}{r!} f(\gamma),$$

wo $h(x)$ eine gewisse Funktion von x bezeichnet, die für $x = \infty$ gegen o konvergiert. Dieser Grenzübergang liefert also

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x^r} \sum_{n=1}^{x-1} \frac{a_n}{n^\gamma} (x - n)^r = f(\gamma). \tag{25}$$

Auf die linke Seite von (25) wenden wir nun fortgesetzte partielle Summation an, indem wir für $\alpha_n = \frac{a_n}{n^\gamma}$ die in der Einleitung definierten Summen $s_n, S'_n, S''_n, \ldots$ bilden. Diese partielle Summation stützt sich auf die folgende Identität, in der

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu = B_n$$

gesetzt ist:

$$\sum_{n=1}^{x-1} b_n c_n = \sum_{n=1}^{x-1} B_n (c_n - c_{n+1}) + B_{x-1} c_x. \tag{26}$$

Es ergibt sich zunächst, wenn $c_n = (x - n)^r$ gesetzt wird, so dass also $c_x = 0$ ist:

$$\sum_{n=1}^{x-1} \alpha_n (x - n)^r = \sum_{n=1}^{x-1} s_n \{(x - n)^r - (x - n - 1)^r\}. \tag{27}$$

Nun werde bei festem x für $n = 1, 2, \ldots, x - 1$

$$\Delta_1 (x - n)^r = (x - n)^r - (x - n - 1)^r$$

gesetzt, während für $n = x$ der Ausdruck $\Delta_1 (x - n)^r = 0$ sein soll. Ferner sei für $n = 1, 2, \ldots, x - 1$

$$\Delta_2 (x - n)^r = \Delta_1 (x - n)^r - \Delta_1 (x - n - 1)^r;$$

für $n = x$ sei wiederum $\Delta_2 (x - n)^r = \Delta_1 (x - n)^r = 0$. Allgemein werde für $n = 1, 2, \ldots, x - 1$

$$\varDelta_\varrho (x-n)^r = \varDelta_{\varrho-1}(x-n)^r - \varDelta_{\varrho-1}(x-n-1)^r$$

gesetzt mit der für $n=x$ geltenden Ergänzung $\varDelta_\varrho(x-n)^r=0$. Dann ergibt sich unmittelbar die folgende explicite Darstellung, die man z. B. mittelst vollständiger Induktion leicht beweisen kann: es ist für $n=1, 2, \ldots, x-\varrho$

$$\varDelta_\varrho(x-n)^r=(x-n)^r-\binom{\varrho}{1}(x-n-1)^r+\binom{\varrho}{2}(x-n-2)^r-\cdots+(-1)^\varrho\binom{\varrho}{\varrho}(x-n-\varrho)^r,$$

während für $n=x-\varrho+1$, d. h. für $x-n=\varrho-1$

$$\varDelta_\varrho(x-n)^r=(\varrho-1)^r-\binom{\varrho}{1}(\varrho-2)^r+\cdots+(-1)^{\varrho-1}\binom{\varrho}{\varrho-1}0^r,$$

für $n=x-\varrho+2$, d. h. für $x-n=\varrho-2$

$$\varDelta_\varrho(x-n)^r=(\varrho-2)^r-\binom{\varrho}{1}(\varrho-3)^r+\cdots+(-1)^{\varrho-2}\binom{\varrho}{\varrho-2}0^r,$$

für $n=x-1$, d. h. für $x-n=1$

$$\varDelta_\varrho(x-n)^r=1^r-\binom{\varrho}{1}0^r=1$$

und schliesslich für $n=x$

$$\varDelta_\varrho(x-n)^r=0$$

wird.

Unter Benutzung dieser Definition ergibt sich aus (27) mittelst fortgesetzter Anwendung der Formel (26), da ja bei jedem Schritt $c_x=0$ ist:

$$\sum_{n=1}^{x-1} a_n(x-n)^r=\sum_{n=1}^{x-1} s_n\varDelta_1(x-n)^r=\sum_{n=1}^{x-1} S'_n\varDelta_2(x-n)^r=\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{x-1} S_n^{(r-1)}\varDelta_r(x-n)^r.$$

Nun ist für beliebiges y und jede positive ganze Zahl r

$$y^r-\binom{r}{1}(y-1)^r+\binom{r}{2}(y-2)^r-\cdots+(-1)^r\binom{r}{r}(y-r)^r$$

$$=y^r\left\{1-\binom{r}{1}+\binom{r}{2}-\cdots+(-1)^r\binom{r}{r}\right\}-\binom{r}{1}y^{r-1}\left\{-\binom{r}{1}1+\binom{r}{2}2-\cdots+(-1)^r\binom{r}{r}r\right\}+$$

$$\cdot \binom{r}{2} y^{r-2}\left\{-\binom{r}{1}\cdot 1^2+\binom{r}{2}2^2-\cdots+(-1)^r\binom{r}{r}r^2\right\}$$

$$-\cdots+(-1)^r\binom{r}{r}\cdot\left\{-\binom{r}{1}\cdot 1^r+\binom{r}{2}2^r-\cdots+(-1)^r\binom{r}{r}r^r\right\}=r!,$$

wie man leicht etwa durch Induktion nachweisen kann; der betrachtete Ausdruck ist also in Wirklichkeit von y unabhängig. Folglich ist insbesondere für $n=1, 2, \ldots, x-r$ der Faktor $\Delta_r(x-n)^r=r!$, so dass also

$$\sum_{n=1}^{x-1} a_n (x-n)^r = r!\sum_{n=1}^{x-r} S_n^{(r-1)} + d_{r-1} S_{x-r+1}^{(r-1)} + \cdots + d_1 S_{x-1}^{(r-1)} \tag{28}$$

$$= r!\, S_{x-r}^{(r)} + d_{r-1} S_{x-r+1}^{(r-1)} + \cdots + d_1 S_{x-1}^{(r-1)}$$

wird, wo die d gewisse ganzzahlige Koeffizienten sind, auf deren Wert es nicht ankommt. Im Falle $r=1$ treten diese Glieder nicht erst auf.

Wir wenden nunmehr den folgenden grundlegenden Satz aus der Summabilitätstheorie der Dirichletschen Reihen an: Besitzt die Reihe

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\gamma}}\cdot\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{s}}$$

eine nicht negative Summabilitätsabscisse $r-1$. Ordnung, so ist diese gleich dem Grenzwert[22]

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log\left|\dfrac{(r-1)!\,S_n^{(r-1)}}{n^{r-1}}\right|}{\log n}.$$

Da in unserem Falle die Summabilitätsabscisse $r-1$. Ordnung für $f(s)$ den Wert λ_{r-1}, also für $g(s)$ den Wert $\lambda_{r-1}-\gamma$ hat, so ist der obige Grenzwert $=\lambda_{r-1}-\gamma$; also ist bei beliebig kleinem δ für alle n von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log\left|\dfrac{(r-1)!\,S_n^{(r-1)}}{n^{r-1}}\right|}{\log n} < \lambda_{r-1}-\gamma+\delta,$$

$$\left|S_n^{(r-1)}\right| < n^{r-1+\lambda_{r-1}-\gamma+\delta}, \tag{29}$$

[22] Ein ausführlicher Beweis findet sich in der in Anmerkung 2 zitierten Habilitationsschrift von Herrn Bohr, S. 85

und da wegen $\gamma > \lambda_{r-1} - 1$ bei hinreichend kleinem δ der Exponent auf der rechten Seite der letzten Ungleichung $< r$ ist, so folgt

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{(r-1)}}{n^r} = 0.$$

Aus der Identität (28) ergibt sich daher

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x^r} \sum_{n=1}^{x-1} a_n (x-n)^r = \lim_{x=\infty} r! \frac{S_{x-r}^{(r)}}{x^r},$$

was in Kombination mit (25) die Beziehungen

$$\lim_{x=\infty} r! \frac{S_{x-r}^{(r)}}{x^r} = f(\gamma),$$

$$\lim_{x=\infty} r! \frac{S_x^{(r)}}{x^r} = f(\gamma)$$

liefert. Damit aber ist der Satz III bewiesen.

§ 4. Beweis von Satz IV.

IV. Wenn die Funktion $f(s)$ für $\sigma \geqq \eta$ regulär ist, wo $\eta < \lambda_{r-1}$ ist, und wenn für alle $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$

(30) $$|f(s)| < A\,|t|^{r+k}$$

ist, wo k irgend eine Konstante $\geqq 0$ bezeichnet, so ist die Reihe $f(s)$ für alle $\sigma > \frac{\eta + k\lambda_{r-1}}{1+k}$, welche zugleich $> \lambda_{r-1} - 1$ sind, summabel von der r. Ordnung.

Es ist also zu beweisen, dass für jede Zahl γ, welche einerseits $> \frac{\eta + k\lambda_{r-1}}{1+k}$, andererseits $> \lambda_{r-1} - 1$ ist, die Reihe von der r. Ordnung summabel ist. Wegen $\lambda_{r-1} > \eta$ ist dieses γ eo ipso $> \frac{\eta + k\eta}{1+k} = \eta$; ferner darf wie in § 3 andererseits $\gamma \leqq \lambda_{r-1}$ angenommen werden. Wir wenden nun bei positivem ganzem x den Cauchy'schen Satz auf den Integranden

$$x^s R(s) f(s+\gamma) = \frac{x^s f(s+\gamma)}{s(s+1)\ldots(s+r)}$$

und auf das Rechteck mit den Ecken $-(\gamma - \eta) \pm Ti$, $a - \gamma \pm Ti$ an, wo a eine Zahl $> \lambda_{r-1}$ bedeutet und T durch die Gleichung

$$T = x^{\frac{a-\eta}{1+k}}$$

als eine Funktion von x definiert sein soll, die mit x zugleich unendlich wird (vergl. die methodischen Bemerkungen in § 1). Dann ist der Integrand wie beim Beweise von III im ganzen Integrationsgebiet regulär mit Ausnahme des sicher darin gelegenen ev. Pols erster Ordnung $s=0$ und der möglicherweise darin gelegenen ev. Pole erster Ordnung $s=-1$, $s=-2, \ldots, s=-r$, deren Anzahl aber höchstens r ist. Es ergibt sich daher, wenn $h(x), h_1(x), \ldots$ Funktionen von x bezeichnen, die für $x=\infty$ verschwinden,

$$\int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} + \int\limits_{a-\gamma+Ti}^{\eta-\gamma+Ti} + \int\limits_{\eta-\gamma+Ti}^{\eta-\gamma-Ti} + \int\limits_{\eta-\gamma-Ti}^{a-\gamma-Ti} = \frac{2\pi i}{r!} f(\gamma) + h(x).$$

Für das Integral I_3 erhalten wir im Falle[23] $k>0$ wegen (30) und wegen der für $t \neq 0$ geltenden Beziehung

$$|R(s)| < \frac{1}{|t|^{r+1}}$$

durch Abtrennung des Intervalls $\eta-\gamma-i$ bis $\eta-\gamma+i$ die folgende Abschätzung die sich auf ins Unendliche wachsendes x bezw. T beziehen soll:

$$|I_3| = \left| -\int\limits_{\eta-\gamma-Ti}^{\eta-\gamma+Ti} x^s R(s) f(s+\gamma)\, ds \right| < C x^{\eta-\gamma} + 2 A x^{\eta-\gamma} \int\limits_{1}^{T} \frac{t^{r+k}}{t^{r+1}}\, dt$$

$$< x^{\eta-\gamma}\left(C + \frac{2A}{k} T^k\right) < C_1 x^{\eta-\gamma} T^k$$

$$= C_1 x^{\eta-\gamma+\frac{k(a-\eta)}{1+k}} = C_1 x^{\frac{\eta+ka}{1+k}-\gamma}.$$

Da unser γ eine feste Zahl $> \frac{\eta + k\lambda_{r-1}}{1+k}$ bedeutet, so ist, wenn nur die Zahl $a > \lambda_{r-1}$ hinreichend nahe an λ_{r-1} angenommen wird, sogar $\gamma > \frac{\eta+ka}{1+k}$; es ist also bei geeigneter Wahl von a das Integral $I_3 = h_1(x)$.

Zur Abschätzung von I_4 benutzen wir, dass nach Voraussetzung die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma \geq \eta$ höchstens die Grössenordnung $\eta+k$ hat und dass sie auf der Geraden $\sigma=a$ nach der Formel (1) der Einleitung höchstens die Grössenordnung r hat; der Phragmén-Lindelöf'sche Satz besagt also, dass der Maximalwert der Grössenordnung im Intervall $\eta \leq \sigma \leq a$ linear von $r+k$ bis r abnimmt, d. h. dass für $\eta \leq \sigma \leq a$, $|t| \geq 1$

$$|f(s)| < C_2 |t|^{r+\frac{k(a-\sigma)}{a-\eta}},$$

[23] Es darf $k>0$ angenommen werden, da ja der Fall $k=0$ bereits mit III erledigt ist. Aber natürlich würde man für $k=0$ durch eine ganz analoge Abschätzung ebenfalls $I_3 = h_1(x)$ erhalten.

also für $\eta - \gamma \leqq \sigma \leqq a - \gamma$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s+\gamma)| < C_2 |t|^{\varepsilon + \frac{k(a-\gamma-\sigma)}{a-\eta}}$$

ist. Man erhält daher

$$|I_4| = \left| \int_{\eta-\gamma-Ti}^{a-\gamma-Ti} x^s R(s) f(s+\gamma)\, ds \right| < C_2 \int_{\eta-\gamma}^{a-\gamma} x^\sigma T^{k\frac{a-\gamma-\sigma}{a-\eta}-1} d\sigma.$$

Denkt man sich im Integranden des rechts stehenden Integrals den Wert von T eingesetzt, so wird der Integrand eine Potenz von x, deren Exponent als lineare Funktion von σ seinen grössten Wert am Anfang oder Ende des Intervalls annimmt, wenn er nicht überhaupt konstant bleibt. Der Anfangswert ist nun der Ausdruck $x^{\eta-\gamma} T^{k-1}$, der Endwert der Ausdruck $\frac{x^{a-\gamma}}{T}$, der nach der Definition von T dem Ausdruck $x^{\eta-\gamma} T^k$ gleich ist; dieser letztere aber kam schon bei der Abschätzung von I_3 vor und verschwindet, wie dort bewiesen, für $x = \infty$, $T = \infty$. Man erhält daher

$$|I_4| < C_2 (a-\eta) x^{\eta-\gamma} T^k, \quad I_4 = h_2(x).$$

Genau dasselbe ergibt sich auch für I_2. Es wird daher schliesslich

(31) $$I_1 = \frac{2\pi i}{r!} f(\gamma) + h_3(x).$$

In dem Integrale I_1 dürfen wir für $f(s+\gamma)$ eine absolut und auf dem Integrationswege gleichmässig konvergente Reihenentwicklung einsetzen. Da nämlich die Reihe

$$g(s) = f(s+\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\gamma} \cdot \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s}$$

als Summabilitätsgrenzgerade $r-1$. Ordnung die Gerade $\lambda_{r-1} - \gamma$ besitzt und die Integrationsgerade $\sigma = a - \gamma$ rechts von dieser gelegen ist, so ist die Reihe

$$f(s+\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(r-1)} \Delta_r \left(\frac{1}{n^s}\right)$$

auf der Geraden $\sigma = a - \gamma$ absolut und auf jedem endlichen Stück dieser Geraden gleichmässig konvergent;[24] hierbei ist

$$\Delta_r\left(\frac{1}{n^s}\right) = \frac{1}{n^s} - \binom{r}{1}\frac{1}{(n+1)^s} + \binom{r}{2}\frac{1}{(n+2)^s} - \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}\frac{1}{(n+r)^s}.$$

Man kann also Summation und Integration vertauschen und erhält

$$I_1 = \int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} x^s R(s) \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(r-1)} \Delta_r\left(\frac{1}{n^s}\right) ds = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(r-1)} \int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} x^s R(s)\, \Delta_r\left(\frac{1}{n^s}\right) ds.$$

Nun ist

$$\Delta_1\left(\frac{1}{n^s}\right) = \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = s\int\limits_n^{n+1} \frac{dv_1}{v_1^{s+1}},$$

$$\Delta_2\left(\frac{1}{n^s}\right) = \Delta_1\left(\frac{1}{n^s}\right) - \Delta_1\left(\frac{1}{(n+1)^s}\right) = s\left\{\int\limits_n^{n+1}\frac{dv_1}{v_1^{s+1}} - \int\limits_{n+1}^{n+2}\frac{dv_1}{v_1^{s+1}}\right\} = s\int\limits_n^{n+1}\left(\frac{1}{v_1^{s+1}} - \frac{1}{(v_1+1)^{s+1}}\right) dv_1$$

$$= s(s+1)\int\limits_n^{n+1} dv_1 \int\limits_{v_1}^{v_1+1} \frac{dv_2}{v_2^{s+2}}$$

und allgemein[25]

$$\Delta_r\left(\frac{1}{n^s}\right) = s(s+1)\cdots(s+r-1)\int\limits_n^{n+1} dv_1 \int\limits_{v_1}^{v_1+1} dv_2 \int\limits_{v_2}^{v_2+1} dv_3 \ldots \int\limits_{v_{r-2}}^{v_{r-2}+1} dv_{r-1} \int\limits_{v_{r-1}}^{v_{r-1}+1} \frac{dv_r}{v_r^{s+r}}. \tag{32}$$

Setzt man diesen Ausdruck für $n \leq x - r - 1$ sowie für $n \geq x + 1$ in die Entwicklung von I_1 ein, so ergibt sich

$$I_1 = \sum_{n=1}^{\infty}{}' S_n^{(r-1)} \int\limits_n^{n+1} dv_1 \int\limits_{v_1}^{v_1+1} dv_2 \ldots \int\limits_{v_{r-1}}^{v_{r-1}+1} \frac{dv_r}{v_r^r} \int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} \frac{1}{s+r}\left(\frac{x}{v_r}\right)^s ds + \sum_{n=x-r}^{x} S_n^{(r-1)} \int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} x^s R(s)\, \Delta_r\left(\frac{1}{n^s}\right) ds, \tag{33}$$

wo der Strich an der Summe bedeuten soll, dass die Glieder $n = x - r, \ldots, x$ von der Summation ausgeschlossen sind. Diese letzteren Glieder, deren Anzahl ja nur endlich ist, sollen nämlich besonders behandelt werden, und zwar auf die folgende Weise. Aus (32) ergibt sich für $\sigma = a - \gamma$, $|t| > 1$

[24] Vergl. z. B. Herrn Bohr's Habilitationsschrift, S. 71.

[25] Diese Art der Darstellung der r. Differenz, die man leicht auf allgemeinere Funktionen $f(n)$ anstatt $\frac{1}{n^s}$ ausdehnen kann, kommt schon bei Herrn Jensen vor und wird auch in der soeben zitierten Schrift von Herrn Bohr benutzt; vergl. S. 70.

$$\left|R(s)\,\Delta_r\left(\frac{1}{n^s}\right)\right| < \frac{1}{|s+r|}\,\frac{1}{n^{r+a-\gamma}} < \frac{1}{|t|}\,\frac{1}{n^{r+a-\gamma}},$$

während für $\sigma = a - \gamma$, $|t| \leqq 1$ wenigstens

$$\left|R(s)\,\Delta_r\left(\frac{1}{n^s}\right)\right| < \frac{1}{|s+r|}\,\frac{1}{n^{r+a-\gamma}} \leqq \frac{1}{r+a-\gamma}\,\frac{1}{n^{r+a-\gamma}}$$

wird. Also ist für hinlänglich grosses T

$$\left|\int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} x^s R(s)\,\Delta_r\left(\frac{1}{n^s}\right) ds\right| < \frac{x^{a-\gamma}}{n^{r+a-\gamma}}\left(\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dt}{r+a-\gamma} + 2\int\limits_1^T \frac{dt}{t}\right) < \frac{3\,x^{a-\gamma}\log T}{n^{r+a-\gamma}}.$$

Auf alle anderen Glieder in (33) aber wende ich die Formeln (17) an, und zwar für $\vartheta = \frac{x}{v_r}$. Dann ergibt sich zunächst für $n \leqq x - r - 1$, da ja für jedes n die Variable $v_r \leqq n + r$ ist, also hier stets $v_r \leqq x - 1$ bleibt:

$$\left|\int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} \frac{1}{s+r}\left(\frac{x}{v_r}\right)^s ds - 2\pi i\,\frac{v_r^r}{x^r}\right| \leqq \frac{2}{T}\,\frac{x^{a-\gamma}}{v_r^{a-\gamma}}\,\frac{1}{\log\frac{x}{v_r}},$$

$$\left|\int\limits_n^{n+1} dv_1 \int\limits_{v_1}^{v_1+1} dv_2 \ldots \int\limits_{v_{r-1}}^{v_{r-1}+1} \frac{dv_r}{v_r^r} \int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} \frac{1}{s+r}\left(\frac{x}{v_r}\right)^s ds - \frac{2\pi i}{x^r}\right| \leqq \frac{2\,x^{a-\gamma}}{T}\int\limits_n^{n+1} dv_1 \int\limits_{v_1}^{v_1+1} dv_2 \ldots \int\limits_{v_{r-1}}^{v_{r-1}+1} \frac{dv_r}{v_r^{r+a-\gamma}}\,\frac{1}{\log\frac{x}{v_r}}$$

$$< \frac{2\,x^{a-\gamma}}{T}\,\frac{1}{n^{r+a-\gamma}}\,\frac{1}{\log\frac{x}{n+r}}.$$

Ganz ebenso ergibt sich für $n \geqq x + 1$, da für jedes n die Variable $v_r > n$ ist, also hier stets $v_r \geqq x + 1$ wird:

$$\left|\int\limits_n^{n+1} dv_1 \int\limits_{v_1}^{v_1+1} dv_2 \ldots \int\limits_{v_{r-1}}^{v_{r-1}+1} \frac{dv_r}{v_r^r} \int\limits_{a-\gamma-Ti}^{a-\gamma+Ti} \frac{1}{s+r}\left(\frac{x}{v_r}\right)^s ds\right| < \frac{2\,x^{a-\gamma}}{T}\,\frac{1}{n^{r+a-\gamma}}\,\frac{1}{\log\frac{n}{x}}.$$

Setzt man alles in (33) ein, so erhält man

$$\left| I_1 - \frac{2\pi i}{x^r} \sum_{n=1}^{x-r-1} S_n^{(r-1)} \right| < \frac{2\, x^{a-\gamma}}{T} \left\{ \sum_{n=1}^{x-r-1} \frac{\left|S_n^{(r-1)}\right|}{n^{r+a-\gamma}} \frac{1}{\log \frac{x}{n+r}} + \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\left|S_n^{(r-1)}\right|}{n^{r+a-\gamma}} \frac{1}{\log \frac{n}{x}} \right\}$$
$$+ 3\, x^{a-\gamma} \log T \sum_{n=x-r}^{x} \frac{\left|S_n^{(r-1)}\right|}{n^{r+a-\gamma}}.$$

Zur Abschätzung von $S_n^{(r-1)}$ verwende ich die Formel (29), in der ich z. B. $\delta = \frac{a - \lambda_{r-1}}{2}$ annehme, so dass $\lambda_{r-1} + \delta = a - \delta$ wird. Wir dürfen also schliessen, dass eine Konstante C_3 existiert, so dass für alle n

$$\left| S_n^{(r-1)} \right| < C_3\, n^{r-1+a-\gamma-\delta}$$

ist. Setzt man dies ein, so erhält man

(34)
$$\left| I_1 - \frac{2\pi i}{x^r} \sum_{n=1}^{x-r-1} S_n^{(r-1)} \right| < \frac{2\, C_3\, x^{a-\gamma}}{T} \left\{ \sum_{n=1}^{x-r-1} \frac{1}{n^{1+\delta}} \frac{1}{\log \frac{x}{n+r}} + \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \frac{1}{\log \frac{n}{x}} \right\}$$
$$+ 3\, C_3\, x^{a-\gamma} \log T \sum_{n=x-r}^{x} \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

Nun lässt sich leicht zeigen, dass der Wert der geschweiften Klammer rechts für unendlich gross werdendes x unterhalb einer endlichen Schranke bleibt;[26] da ferner wie bewiesen der Quotient $\frac{x^{a-\gamma}}{T}$ für $x = \infty$ gegen 0 konvergiert, so konvergiert der erste Gliederkomplex der rechten Seite von (34) ebenfalls gegen 0. Der übrig bleibende Ausdruck aber lässt sich noch leichter abschätzen, da z. B. für alle x von einer gewissen Stelle an

$$3\, C_3\, x^{a-\gamma} \log T \sum_{n=x-r}^{x} \frac{1}{n^{1+\delta}} < C_4\, x^{a-\gamma} \log x \cdot \frac{1}{x^{1+\delta}} < \frac{1}{x^{1-a+\gamma}}$$

ist; für ein dem Punkte λ_{r-1} hinreichend nahe liegendes $a > \lambda_{r-1}$ ist nun aber neben $\gamma > \lambda_{r-1} - 1$ auch $\gamma > a - 1$, so dass der Exponent im äussersten Gliede rechts positiv ist, dieses selbst also für $x = \infty$ gegen 0 konvergiert. Aus (34) ergibt sich daher

$$I_1 = 2\pi i\, \frac{S_{x-r-1}^{(r)}}{x^r} + h_4(x),$$

[1] Vergleiche z. B. meine Habilitationsschrift: »Über Mittelwertsformeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen«, Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Klasse, Bd. 118, Abt. II a, 1909 (S. 1439—1522), S. 1462.

was mit (31) kombiniert die Beziehung

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{S^{(r)}_{x-r-1}}{x^r}-\frac{f(\gamma)}{r!}\right)=0,$$

also auch die Gleichung

$$\lim_{x=\infty}\frac{r!\,S^{(r)}_x}{x^r}=f(\gamma)$$

liefert, die bewiesen werden sollte.

§ 5. Eine Erweiterung zu Satz III.

Während der Drucklegung des Vorangegangenen ist die erste der in Anm. 12 angekündigten Noten von Herrn M. RIESZ[27] erschienen. Der Verfasser beweist dort einen allgemeinen Grenzwertsatz, der in meine Bezeichnungsweise übertragen folgendermassen lautet:

Es sei für eine beliebige Grössenfolge a_n bei ganzzahligem[28] $r \geqq 0$

$$\sigma^{(r)}_{\xi}=\sum_{n=1}^{<\xi}a_n(\xi-n)^r,$$

und es sei $S^{(r)}_x$ die in der Einleitung definierte CESÀRO'sche Summe; hierbei ist ξ eine beliebige Zahl >1, x eine ganze Zahl $\geqq 1$. Dann existieren die beiden Grenzwerte

$$\lim_{\xi=\infty}\frac{\sigma^{(r)}_{\xi}}{\xi^r},\quad \lim_{x=\infty}\frac{r!\,S^{(r)}_x}{x^r},$$

wo ξ stetig, x über ganze Zahlen ins Unendliche wächst, entweder gleichzeitig und sind einander gleich, oder sie existieren beide nicht.

Nun war beim Beweise von Satz III mit (25) die Beziehung

$$\lim_{x=\infty}\frac{\sigma^{(r)}_x}{x^r}=f(\gamma) \tag{35}$$

für ganzzahlig ins Unendliche wachsendes x bewiesen, wo $a_n=\frac{a_n}{n^\gamma}$ ist, ohne dass bis dahin von der Annahme $\gamma>\lambda_{r-1}-1$ Gebrauch gemacht wurde. Diese Beziehung

[27] »Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques«, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 12. Juni 1911, Bd. 152, S. 1651—1651.

[28] Nach geeigneter Definition der $S^{(r)}_x$ für nicht ganzzahliges $r>0$ gilt dieser Satz, wie Herr M. RIESZ zeigt, bei beliebigem $r>0$.

gilt aber auch für stetig ins Unendliche wachsendes $x = \xi$. Denn bei nicht ganzzahligem x tritt an die Stelle der dort gegebenen Abschätzungsformel des Integrales I_1 die folgende ganz analoge Abschätzung:

$$\left| I_1 - \frac{2\pi i}{r!} \sum_{n=1}^{<x} \frac{a_n}{n^\gamma} \left(1 - \frac{n}{x}\right)^r \right| < \frac{2\, x^{l-\eta}}{T^{r+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\gamma+l-\eta}} \frac{1}{\left|\log \frac{x}{n}\right|},$$

wo die rechte Seite für $T = \infty$ ebenfalls gegen o konvergiert; da sich sonst im Beweise des Satzes III bis zur Formel (25) nichts ändert, wenn x nicht ganzzahlig angenommen wird, so gilt also (25) und damit (35) sogar bei stetig ins Unendliche wachsendem x. Hieraus folgt nun aber nach dem Riesz'schen Satze, dass bei ganzzahlig ins Unendliche wachsendem x auch die Beziehung

$$\lim_{x=\infty} \frac{r!\, S_x^{(r)}}{x^r} = f(\gamma) \tag{36}$$

gilt, womit der Satz III ohne die einschränkende Annahme $\gamma > \lambda_{r-1} - 1$ bewiesen ist. Der Satz III nimmt jetzt also den folgenden vereinfachten und zugleich verschärften[29] Wortlaut an:

III'. Es sei die durch die Reihe $f(s)$ in ihrem Konvergenzgebiet dargestellte Funktion $f(s)$ für $\sigma \geqq \eta$ regulär, und es existiere eine Konstante A, so dass für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$ bei ganzzahligem positivem r

$$|f(s)| < A\, |t|^r$$

ist. Dann ist die Reihe $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \eta$ summabel von der r. Ordnung.

Durch die Anwendung des Satzes III' anstelle von III werden auch die in der Einleitung aufgestellten Beziehungen zwischen den Grössenfolgen λ_r und μ_r zum Teil in demselben Sinne verschärft. Ich stelle sie im Folgenden mit den gewonnenen Verschärfungen noch einmal zusammen:

$$\lambda_0 > \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots, \quad \mu_0 \geqq \mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots,$$

$$1 \geqq \lambda_0 - \lambda_1 > \lambda_1 - \lambda_2 \geqq \ldots, \quad \mu_0 - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2 \geqq \mu_2 - \mu_3 > \ldots,$$

$$\mu_0 \geqq \lambda_0 > \mu_1 \geqq \lambda_1 \geqq \ldots \geqq \mu_r \geqq \lambda_r \geqq \mu_{r+1} \geqq \ldots,$$

$$\lim_{r=\infty} \lambda_r = \lim_{r=\infty} \mu_r.$$

[29] Die Verschärfung gegen den Satz III besteht, wie in der Einleitung bemerkt, eben darin, dass durch diesen Wortlaut zugleich die Möglichkeit, dass unter den gegebenen Voraussetzungen $\eta < \lambda_{r-1} - 1$ sein könnte, ausgeschlossen wird; der Satz III' ist also dem in Anm. 12 zitierten, von Herrn M. Riesz ohne Beweis mitgeteilten Satz völlig äquivalent, wenn man bei ganzzahligem r verbleibt.

Aus der für ganzes $k \geqq 0$ geltenden Beziehung $\mu_{r+k} \geqq \lambda_{r+k}$ in Verbindung mit den Ungleichungen $\lambda_{r-1} - \lambda_r \geqq \lambda_r - \lambda_{r+1} \geqq \ldots \geqq \lambda_{r+k-1} - \lambda_{r+k}$, d. h. mit der Tatsache, dass die Breite der Summabilitätsstreifen niemals zunimmt, folgt, dass für ganze Zahlen $r \geqq 1$, $k \geqq 0$ die Beziehung

$$(37) \qquad \mu_{r+k} \geqq \lambda_r - k(\lambda_{r-1} - \lambda_r)$$

gilt, was umso interessanter ist, als andererseits

$$\mu_{r+k} \leqq \lambda_{r+k-1} \leqq \mu_{r+k-1} \leqq \ldots \leqq \mu_{r+1} \leqq \lambda_r$$

ist. Die Beziehung (37) kann man auch in der Form schreiben

$$\lambda_r \leqq \frac{\mu_{r+k} + k\lambda_{r-1}}{1+k},$$

womit auch die auf ganzzahliges k bezügliche spezielle Folgerung aus Satz IV in demselben Sinne verschärft ist.

Zum Schluss will ich noch den von Herrn M. Riesz gegebenen Beweis seines oben mitgeteilten Grenzwertsatzes reproduzieren, soweit es für den vorliegenden Zweck erforderlich ist. Mit den auf Gleichung (25) folgenden Entwicklungen in § 3 habe ich gezeigt, dass aus der Existenz des Grenzwertes (25), d. h. des Grenzwertes (35), auch wenn diese nur für ganzzahlig ins Unendliche wachsendes x benutzt wird, die zu beweisende Existenz des Grenzwertes (36) folgt, wenn nur das Bestehen der für ganze x geltenden Formel

$$(38) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{S_x^{(r-1)}}{x^r} = 0$$

gesichert ist. Um diese zu erhalten, habe ich die Voraussetzung $\gamma > \lambda_{r-1} - 1$ eingeführt; das Neue, was ich aus der Riesz'schen Note gelernt habe, besteht in der Erkenntnis, dass (38) ohne jede weitere Voraussetzung schon aus (35) folgt, wenn nur die Giltigkeit dieser Grenzbeziehung auch für stetig ins Unendliche wachsendes x vorausgesetzt wird, was ja hier erfüllt ist. Meine in § 3 gegebenen Ausführungen liefern also einen vollständigen Beweis auch des Satzes III', wenn noch der Beweis des folgenden Hilfssatzes hinzugefügt wird, den auch Herr M. Riesz als Lemma II besonders formuliert:

Es existiere für stetig ins Unendliche wachsendes x der Grenzwert

$$(35) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\sigma_x^{(r)}}{x^r}$$

Dann ist für ganzzahlig ins Unendliche wachsendes x

$$\lim_{x=\infty} \frac{S_x^{(r-1)}}{x^r} = 0. \tag{38}$$

Indem ich im folgenden die zum Beweise dieses Hilfssatzes dienenden Andeutungen von Herrn M. Riesz ausführe, erspare ich also dem Leser, der einen vollständigen Beweis von III′ kennen lernen will, die Notwendigkeit, die Riesz'sche Note einzusehen.

Es wird successive die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{x=\infty} \frac{S_x^{(k)}}{x^r} = 0 \tag{39}$$

bei ganzzahligem x für $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$ nachgewiesen. Zum Beweise für $k = 0$ bildet man die r. Differenz der Ausdrücke $\sigma_x^{(r)}, \sigma_{x+\frac{1}{r}}^{(r)}, \ldots, \sigma_{x+\frac{r}{r}}^{(r)}$. Diese nimmt unter Benutzung der Identitäten, die bereits in der der Formel (28) vorangehenden Entwicklung niedergelegt sind, die folgende Gestalt an, wenn $x - n = y_n$ gesetzt wird und x eine positive ganze Zahl ist:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x^{(r)} - \binom{r}{1}\sigma_{x+\frac{1}{r}}^{(r)} + \binom{r}{2}\sigma_{x+\frac{2}{r}}^{(r)} - \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}\sigma_{x+1}^{(r)} \\
&= \sum_{n=1}^{x} a_n \left\{ y_n^r - \binom{r}{1}\left(y_n + \frac{1}{r}\right)^r + \binom{r}{2}\left(y_n + \frac{2}{r}\right)^r - \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}\left(y_n + \frac{r}{r}\right)^r \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{x} a_n \left\{ y_n^r\left[1 - \binom{r}{1} + \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}\right] + \frac{\binom{r}{1}}{r} y_n^{r-1}\left[-\binom{r}{1}\cdot 1 + \binom{r}{2}\cdot 2 - \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}\cdot r\right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\binom{r}{2}}{r^2} y_n^{r-2}\left[-\binom{r}{1}1^2 + \binom{r}{2}2^2 - \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}r^2\right] + \cdots + \frac{\binom{r}{r}}{r^r}\left[-\binom{r}{1}1^r + \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}r^r\right] \right\} \\
&= \frac{(-1)^r r!}{r^r} \sum_{n=1}^{x} a_n = c_0 s_x = c_0 S_x^{(0)},
\end{aligned}$$

wo c_0 ebenso wie alle folgenden c und d Konstanten bedeuten. Da infolge der Existenz des Grenzwertes (35) die durch x^r dividierte linke Seite dieser Entwicklung für $x = \infty$ gegen 0 konvergiert, so konvergiert auch der Quotient der rechten Seite durch x^r für $x = \infty$ gegen 0, womit die Formel (39) für $k = 0$ nachgewiesen ist.

Es ist nunmehr (39) für $k = 1$ zu beweisen. Man erhält bei ganzem x, wenn wieder $x - n = y_n$ gesetzt und schliesslich partielle Summation nach Formel (26) angewendet wird:

$$\sigma_x^{(r)} - \binom{r-1}{1}\sigma^{(r)}_{x+\frac{1}{r-1}} + \binom{r-1}{2}\sigma^{(r)}_{x+\frac{2}{r-1}} - \cdots + (-1)^{r-1}\binom{r-1}{r-1}\sigma^{(r)}_{x+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} a_n \left\{ y_n^r - \binom{r-1}{1}\left(y_n + \frac{1}{r-1}\right)^r + \binom{r-1}{2}\left(y_n + \frac{2}{r-1}\right)^r - \cdots + (-1)^{r-1}\binom{r-1}{r-1}\left(y_n + \frac{r-1}{r-1}\right)^r \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} a_n (c_0' y_n + c_1') = c_0' \sum_{n=1}^{x} a_n (x-n) + c_1' S_x^{(0)}$$

$$= c_0' \left(\sum_{n=1}^{x} s_n \cdot 1 + s_x(-1) \right) + c_1' S_x^{(0)} = c_0' (S_x' - S_x^{(0)}) + c_1' S_x^{(0)}$$

$$= d_0' S_x' + d_1' S_x^{(0)}.$$

Da nach Voraussetzung der Quotient der linken Seite durch x^r und wie bewiesen der Quotient von $S_x^{(0)}$ durch x^r für $x = \infty$ gegen 0 konvergieren, so konvergiert auch der Quotient von S_x' durch x^r für $x = \infty$ gegen 0, womit (39) für $k = 1$ bewiesen ist.

Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Man erhält z. B. für $k = 2$ bei teilweiser Benutzung der vorangegangenen Rechnungen:

$$\sigma_x^{(r)} - \binom{r-2}{1}\sigma^{(r)}_{x+\frac{1}{r-2}} + \cdots + (-1)^{r-2}\binom{r-2}{r-2}\sigma^{(r)}_{x+1} = \sum_{n=1}^{x} a_n (c_0'' y_n^2 + c_1'' y_n + c_2'')$$

$$= c_0'' \sum_{n=1}^{x} a_n (x-n)^2 + c_1'' S_x' + (c_2'' - c_1'') S_x^{(0)}.$$

Es ist nun aber

$$\sum_{n=1}^{x} a_n (x-n)^2 = \sum_{n=1}^{x} s_n (2(x-n) - 1) + s_x = 2 \sum_{n=1}^{x} s_n (x-n) - S_x' + S_x^{(0)}$$

$$= 2(S_x'' - S_x') - S_x' + S_x^{(0)} = 2 S_x'' - 3 S_x' + S_x^{(0)},$$

so dass die gebildete $(r-2)$. Differenz den Wert

$$d_0'' S_x'' + d_1'' S_x' + d_2'' S_x^{(0)}$$

annimmt. Daraus folgt aber nach dem Vorhergehenden die Beziehung (39) für $k = 2$.

Die Rechnung braucht nicht weiter durchgeführt zu werden. Man erhält durch Bildung der Differenzen von den Ordnungszahlen $r-3$, $r-4, \ldots, 1$ successive die Giltigkeit der Formel (39) für $k = 3, 4, \ldots, r-1$, womit der aufgestellte Riesz'sche Hilfssatz bewiesen ist.

Nachdem einmal diese Rechnungen aufgestellt sind, braucht man die in § 3 von Gleichung (25) ab gegebenen Entwicklungen nicht mehr zu benutzen, sondern kommt auf dem einmal eingeschlagenen Wege schneller zum Ziel. Es sind für die Exponenten 1 und 2 die Formeln

$$\sum_{n=1}^{x} a_n (x-n) = S_x' - S_x^{(0)},$$

$$\sum_{n=1}^{x} a_n (x-n)^2 = 2\, S_x'' - 3\, S_x' + S_x^{(0)}$$

bewiesen worden; es werde angenommen, dass für die Exponenten $3, 4, \ldots, r-1$ die entsprechenden Entwicklungen schon bewiesen seien, von denen die letzte

$$\sum_{n=1}^{x} a_n (x-n)^{r-1} = (r-1)!\; S_x^{(r-1)} + c_{r-2}\; S_x^{(r-2)} + \cdots + c_0 S_x^{(0)}$$

lauten möge. Dann wird, wenn wieder $x-n=y_n$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{r} a_n (x-n)^r &= \sum_{n=1}^{x} s_n \left(y_n^r - (y_n-1)^r\right) + s_x(-1)^r \\
&= r\sum_{n=1}^{x} s_n y_n^{r-1} - \binom{r}{2} \sum_{n=1}^{x} s_n y_n^{r-2} + \cdots + (-1)^r s_x \\
&= r\left\{(r-1)!\, S_x^{(r)} + c_{r-2} S_x^{(r-1)} + \cdots + c_0 S_x'\right\} - \binom{r}{2}\left\{(r-2)!\, S_x^{(r-1)} + \cdots\right\} + \cdots \\
&= r!\, S_x^{(r)} + d_{r-1} S_x^{(r-1)} + \cdots + d_0 S_x^{(0)},
\end{aligned}$$

womit diese Formel durch vollständige Induktion bewiesen ist; sie ist der im § 3 bewiesenen Formel (28) äquivalent.[30] Hieraus folgt, wenn die Gleichung (35) für ganzzahlig ins Unendliche wachsendes x und die Gleichung (39) für $k=0, 1, 2, \ldots, r-1$ benutzt wird:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{r!\, S_x^{(r)}}{x^r} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} \sum_{n=1}^{x} a_n (x-n)^r = f(\gamma),$$

was zu beweisen war.

Breslau, den 12. Juni bezw. (§ 5) 7. Oktober 1911.

[30] Natürlich haben die in beiden Formeln auftretenden konstanten Koeffizienten d nichts mit einander zu tun.

Errata.

Acta mathematica 35.

Page	263	ligne	11	au	lieu	de	α	lire $\frac{1}{\omega}$
»	343	»	15	»	»	»	$\boldsymbol{A}\,\Theta$	» $\boldsymbol{A}_2\Theta$
»	347	»	5	»	»	»	$A_2^{-1} A_1 - 1$	» $\boldsymbol{A}_2^{-1} \boldsymbol{A}_1 - 1$

BIBLIOGRAPHIE.

Felix Alcan.

Paris 1911.

TANNERY, JULES, Science et philosophie (Nouvelle collection scientifique; directeur: Emile Borel). Avec une notice par Emile Borel. — XVI + 335 pp. 8. Fr. 3: 50.

Philosophie: La continuité et la discontinuité dans les sciences et dans l'esprit. Le rôle du nombre dans les sciences. L'adaptation de la pensée. La philosophie de M. Henri Poincaré. Les principes des matematiques. La psychophysique. — Enseignement et méthodes: Pour la science livresque. Les mathématiques dans l'enseignement secondaire. De l'enseignement de la géométrie élémentaire. L'arithmétique. L'analyse. La géométrie. Questions diverses d'enseignement et de méthodes. Evariste Galois.

Cambridge University Press.

London 1911.

HENDERSON, ARCHIBALD, The twenty-seven lines upon the cubic surface. (Cambridge Tracts in Mathematics and Math. Physics No. 13.) — 100 pp. 8. Sh. 4/6.

Historical summary. Introduction. Preliminary theorems. The double six configuration. Auxiliary theorems. The trihedral pair configuration. Analytical investigation of the twenty-seven lines and forty-five triple tangent planes for the general equation of the cubic surface. The construction of a model of a double six. The construction of the configurations of the straight lines upon the twenty-one types of the cubic surface. Bibliography. Intersection table. Plates 1—13.

Baron KELVIN, Sir WILLIAM THOMPSON, Mathematical and physical papers. Arr. & rev. by Sir Joseph Larmor. Vol. 6: Voltaic theory, radioactivity, electrions, navigation and tides, miscellaneous. — VIII + 378 pp. 8. Sh. 10: —.

MILNE, JOHN J., An elementary treatise on cross-ratio geometry, with historical notes. — XXIII + 288 pp. 8.

Cross-ratio of a range of four points, and of a pencil of four lines. Equicross ranges and equicross pencils. Perspective. Harmonic ratio. Homographic ranges and homographic pencils. Cross-axis. Cross-centre. Metrical properties of homographic ranges. The constant of correspondence. Homogr. equations. One-to-one correspondence. Two homographic co-axial ranges. Their common points, and the methods of finding them. Problems of the three sections. Other problems whose solutions depend on finding the common points of two co-axial homographic ranges. Involution. Involution and harmonic section. Harmonic properties of a quadrangle and quadrilateral. Pole and polar. Pappus' account of the porisms of Euclid, and his lemmas on them. Anharmonic properties of points and tangents of a conic. The locus ad tres et quator lineas. Pascal, Brianchon, Newton, Maclaurin. Pole and polar. Conjugate points and lines. Circular points at infinity. Desargues' theorem and its correlative. Propositions respecting triangles, quadrangels etc. Contra-polar conics. Common chords and common tangents of two or more conics . . . The homologue of a line and conic. Relations between a pair of common chords and the corresponding pair of tangent verticles. Relations between the four constants of homology. Construction of the common chords, tangent verticles etc. Conics having double contact. Construction of a conic satisfying certain conditions. Homographic generalisation of circles and the circular points of infinity . . . Pascal's theorem proved for the conic and line-pair by the methods of Euclid and Apollonius.

Armand Colin.

Paris 1911.

Hadamard, Jacques, Leçons de géométrie élémentaire. I. Géométrie plane. 4:e éd. rev. & corrigé. Conforme aux Programmes de 1905. — XVI + 316 pp. 8. Fr. 6: —.

Introduction. De la ligne droite: Des angles. Des triangles. Perpendiculaires et obliques. Cas d'égalité des triangles rectangles. Propriété de la bissectrice d'un angle. Droites parallèles. Des parallélogrammes. Des translations. Droites concourantes dans un triangle. — Du cercle: Intersection d'une droite et d'un cercle. Diamètres et cordes. Intersection de deux cercles. Propriété de l'angle inscrit. Constructions. Sur le déplacement des figures. — De la similitude: Lignes proportionelles. Similitude des triangles. Relations métriques relatives aux triangles. Lignes proportionnelles dans le cercle. Axe radical. Homothétie et similitude. Constructions. Polygones réguliers. — Signes des segments. Transversales. Rapport anharmonique. Faisceaux harmoniques. Pôles et polaires dans le cercle. Figures inverses. Problèmes des cercles tangents. Propriétés du quadrilatère inscrit. Inverseur de Peaucellier. — Des aires: Mesure des aires. Comparaison des aires. Aire du cercle. Constructions. Sur la méthode en géométrie. Sur le postulatum d'Euclide. Sur le problème des cercles tangents. Sur la notion d'aire. Problèmes divers et probl. proposées dans diff. concours. Problèmes de Malfatti.

Coni Hermanos.

Buenos Aires 1911.

LEGRAND, ENRIQUE, Sommations par une formule d'Euler, de l'usage qu'on peut en faire pour résoudre de nombreux problèmes. — 46 pp. 4. Fr. 2: 75.

Solutions exactes. Calculs approchés. Suites remarquables. Limites.

H. Dunod & E. Pinat.

Paris 1911.

DE BOTHEZAT, GEORGES, Étude de la stabilité de l'aéroplane. Thèse pour le doctorat, prés. à la faculté des sciences de l'univ. de Paris. Avec une préface de Paul Painlevé. XXI + 192 pp. 8. Fr. 10: —.

Les forces agissantes sur l'aéroplane: Quelques considérations générales sur le mouvement d'un solide dans un fluide. Quelques lois empiriques de la résistance de l'air. — L'aéroplane. Les régimes de translation rectiligne de l'aéroplane. — Détermination de la valeur du couple central. Étude comparative des variations du couple central. — L'action des quilles d'un aéroplane. — Le problème général de la stabilité de l'aéroplane: Comment se pose le problème général de la stabilité de l'aéroplane. Équations des petits mouvements de l'aéroplane dans son plan de symétrie. L'équation caractéristique. Les racines de l'équation caractéristique comme critères de stabilité de l'aéroplane. Étude des racines réelles de l'équation caractéristique. Étude des racines complexes de l'équat. caract. Les conclusions rélatives à la stabilité longitudinale. Influence de la décentration des hélices. Équations générales des petits mouvements de l'aéroplane autour de son régime horizontal rectiligne. Stabilité latérale. Conclusions générales.

Wilhelm Engelmann.

Leipzig 1911.

ANDING, E., Sechsstellige Tafeln der Bessel'schen Funktionen imaginären Argumentes. — IV + 72 pp.

Vorbemerkung. Allgemeines L_0 und L_1 unterhalb $x = 10$. L_0 oberhalb $x = 10$. L_1 oberhalb $x = 10$. Anordnung, Abstufung und Genauigkeit. Tafeln.

G. Freytag.

Leipzig 1910.

HARBORDT, FERD. & FISCHER, MAX, Machs' Grundriss der Physik für die höheren Schulen des deutschen Reiches. T. 1: Vorbereitender Lehrgang. Mit 430 Abb. 4:e verb. Aufl. — VI + 226 pp. 8. M. 2: —. T. 2: Ausführlicher Lehrgang. Mit 537 Abb. 2:e verb. u. erw. Aufl. — 376 pp. 8. M. 4: -

T. 1: Vom Gleichgewicht u. von d. Bewegung der Körper. Von der Wärme. Vom Magnetismus. Von der Elektrizität. Vom Schall. Vom Licht. Von den Erscheinungen am Himmel. Von den Erscheinungen in der Atmosphäre. Von den chemischen Erscheinungen. Von den Krystallen. — T. 2: Von der Bewegung der Körper. Von den festen Körpern. Von den Flüssigkeiten. Von den Gasen. Von der Wärme. Von der statischen Elektrizität. Vom Magnetismus. Vom elektr. Strome. Von den Wellen. Vom Schall. Vom Lichte. Anhang.

Gauthier-Villars.

Paris 1909—1912.

Annuaire pour l'an 1912, publ. par le Bureau des longitudes. Avec des notices scientifiques. 692 + 43 pp. 8. Fr. 1:50.

Calendriers pour 1912. Phénomènes célestes et marées. Calendriers. Terre. Coordonnées astron. Soleil. Lune. Planètes et satellites. Comètes. Étoiles. — Cartes magnétiques de la France. Densités. Chaleur, dilatation . . . Tensions de vapeurs. Chaleurs spécif. Chaleur latente de fusion et de vaporisation. Solubilité. Élasticité des solides. Compressibilité des liquides. Capillarité. Viscosité d. fluides. Acoustique. Optique. Électricité, unités C. G. S. Radioactivité. Corps simples et poids atomiques. Thermochimie. Tableaux divers. — La température moyenne d. diverses parties de la France, par M. G. Bigourdan. Notions sur la méthode des moindres carrés, par M. P. Hatt.

Arnoux, Gabriel, Essai de géométrie analytique modulaire à deux dimensions. — XII + 160 pp. 8. Fr. 6: —.

Préface. Introduction. Élements géométriques d'un espace modulaire. Trigonométrie modulaire. Courbe logarithmique. Spirale logarithmique. Transformation des figures. La ligne droite. Le cercle. Coniques à centre unique rapportées à leurs axes. La parabole. Équation générale du deuxième degré. Applications arithmétiques.

Barbette, Edouard, Le dernier théorème de Fermat. — 19 pp. 8. Fr. 1:50.

Poincaré, H., Calcul des probabilités. Réd. de A. Quiquet. 2:e éd. rev. & augm. — 333 pp. 8.

Définition des probabilités. Prob. totales et composées. L'espérence mathématique. Le théorème de Bernoulli. Applicat. de la formule de Sterling. La loi de Gauss et les épreuves répétées. Prob. du continu. Applicat. diverses. Prob. des causes. La théorie des erreurs et la moyenne aritmétique. Justification de la loi de Gauss. Erreurs sur la situation d'un point. Méthode des moindres carrés. Calcul de l'erreur à craindre. Théorie de l'interpolation. Questions diverses.

Jouguet, E., Lectures de mécanique. La mécanique enseignée par les auteurs originaux. 2:e partie: L'organisation de la mécanique. — 284 pp. 8.

Le point matériel et les notions de force et de masse: Les principes newtoniens. L'expérience et le travail de l'esprit. La force, la masse et les lois qui les régissent. Le mouvement absolu. — Les systèmes et les notions de liaison et de travail: Les systèmes matériels et les liaisons de Lagrange. La statique des systèmes à liaisons. La dynamique des syst. à liasons. — La mécanique organisée: Forme de la mécanique classique. La mécanique classique et le courant énergétique. Le point de vue finaliste et les propriétés de maximum et de minimum. La mécanique de Hertz.

Ginn & Co.

London 1911.

Smith, David Eugene, The teaching of geometry. — V + 339 pp. 8. $ 1: 25.

Certain questions now at issue. Why geometry is studied. A brief history of geometry. Development of the teaching of geometry. Euclid. Efforts at improving Euclid. The textbook in geometry. The relation of algebra to geometry. The introduction to geometry. The conduct of a class in geometry. The axioms and postulates. The definitions of geometry. How to attack the exercises. Book I and its propositions. The leading propositions of book II—VIII.

Smith, David Eugene, & Karpinski, Louis Charles, The hindu-arabic numerals. — VI + 160 pp. 8. 6 sh.

Pronunciation of oriental names. Early ideas of their origin. Early hindu forms with no place value. Later hindu forms with a place value. The symbol zero. The question of the introduction of the numerals into Europe by Boethius. The development of the numerals among the arabs. The definite introduction of the numerals into Europe. The spread of the numerals in Europe.

G. J. Göschen.

Leipzig 1911.

Flotow, A. v., Einleitung in die Astronomie. (Sammlung Schubert No. 15.) — XIII + 289 pp. 8. M. 7: — geb.

Richtungsbestimmung im Raume. Die fundamentalen Koordinatensysteme der Astronomie. Das Zeitmass. Die Transformation der Koordinaten a) Horizont und Äquator, b) Besondere Erscheinungen der tägl. Bewegung, c) Äquator und Ekliptik. Die Differentialformeln des sphärischen Dreiecks. Der Nullpunkt der Koordinaten und das Problem der Parallaxe. Die Elemente der Bahnbewegung. Die Realisierung der Richtung durch den Lichtstrahl a) Die Refraktion b) Die Aberration. Die Änderungen der Fundamentalebenen. Anhang.

Schubert, Hermann, Niedere Analysis. 2:er Teil. (Sammlung Schubert No. 45.) 2:e Aufl. — 215 pp. 8. M. 3: 80 geb.

Funktionen: Die Irrationalzahl. Begriff d. Veränderlichkeit. Begr. d. Funktion. Bes. Grenzwerte. Maxima u. Minima. Die endl. geometr. Reihe. Die unendl. geometr. Reihe. Zinseszins- u. Rentenrechnung. Die Zahl e als Grenzwert. — Reihen: Konvergenz d. Reihen. Die Methode der zu bestimmenden Koeffizienten. Die Exponentialreihen. Die logarithm. Reihen. Die Berech. d. dekad. Logarithmen. Der binomische Lehrsatz f. beliebige reelle Exponenten. Die trigonom. Reihen. Die Arcustangens-Reihe und die Berechn. der Zahl π. — Gleichungen: Die komplexen Zahlen. Die binomischen Gleichungen. Verknüpfung d. kompl. Zahlen durch die Operationen dritter Stufe. Allgem. Eigenschaften d. algebraischen Gleichungen. Lösung der Gleichung dritten Grades. — Ausgewählte Resultate zu den Übungen.

Wieleitner, Heinrich, Geschichte der Mathematik. 2:er T. H. 1. (Sammlung Schubert No. 63.) — VIII + 251 pp. 8. M. 6: 50.

Arithmetik. Algebra. Zahlentheorie. Kombinatorik und Wahrscheinlickkeitsrechnung. Die Vorgeschichte der Infinitesimalrechnung. Die Entdeckung u. erste Förderung d. Infinitesimalrechnung. Die unendl. Reihen. Der systemat. Ausbau der Infinitesimalrechn. und die Periode d. formalen Entwicklung d. Reihenlehre. Die Differentialgleichungen. Variations- u. Differenzenrechnung. Interpolation.

Government Printing Office.

Washington 1911.

Miscellaneous astronomical papers, by members of the Naval Observatory staff. (Reprint of publications of the U. S. Naval Observatory, Washington, Sec. ser. Vol. 6. — Appendix 1.) — 152 pp. 4.

The mass of Titan by W. S. Eichelberger. From observations of Hyperion made by Asaph Hall in 1884—1885. — Orbits of Phobos and Deimos by J. C. Hammond. From observations made by H. L. Rice in 1907. — Orbit of Enceladus by H. R. Morgan. From observ. made by T. J. J. See in 1901. — A determination of the solar parallax by C. W. Frederick. From observ. of Eros made by T. J. J. See in 1900—01. — Orbits of asteroids. — Orbits of comets.

Horigan, W. D., List of publications issued by the United States Naval Observatory 1845—1908. (Reprint of Publicat. of the U. S. Naval Observatory, Washington, Vol. 6. — Appendix 3.) — 36 pp. 4.

Miscellaneous reports on the transit of Mercury of November 10, 1894. (Reprint of the Publicat. of the U. S. Naval Observatory, Washington, Vol. 6. — Appendix 2.) — 43 pp. 4.

Hachette & Cie.

Paris 1909.

Leibniz: La Monadologie. Publ. d'après les manuscrits de la bibliothèque de Hanovre avec introduction, notes et suppléments par Henri Lachelier. 7:e tirage. — 98 pp. 8. Fr. 1: —.

Titre et texte de la monadologie. Vie et écrits de Leibniz. Esquisse de la philosophie de Leibniz: Avant-propos. Nouvelle théorie de la substance. Les monades. L'harmonie préétablie. Théorie de la connaissance. Le déterminisme et le sentiment de la liberté. La théorie du libre arbitre. — Conclusions. — La monadologie. Suppléments A—I.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

Hannover 1912.

Kiepert, Ludwig, Grundriss der Differential- und Integralrechnung. 1 Teil: Differentialrechnung. 12:e vollst. umgearb. u. verm. Aufl. des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. Max Stegemann. Mit 187 Fig. — XX + 863 pp. 8. M. 13: 50 geb.

Einleitung. Hilfssätze aus der algebr. Analysis. — Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen: Erklärung und Bildung der Differential-Quotienten. Funktionen von Funktionen. Hyberbolische Funkt. Ableitungen u. Differentiale höherer Ordn. Herleitung u. Anwendungen der Taylor'schen u. der Mac-Laurin'schen Reihe. Konvergenz der Reihen. Maxima u. Minima von entwickelten Funkt. einer unabh. Veränderl. Bestimmung von Ausdrücken, welche an der Grenze eine der unbest. Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, haben. Differentiation der nicht entwickelt. Funkt. Vertauschung der Abhängigkeit der veränd. Grössen. Untersuchung von Kurven, die auf ein rechtwinkliges Koordinaten-System bezogen sind. Untersuch. von Kurven, welche auf ein Polarkoordinaten-System bezogen sind. — Einige grundlegende Untersuchungen aus der Algebra: Theorie der komplexen Grössen. Wurzeln einer algebr. Gleichung $f(x) = 0$. Numerische Auflös. der algebr. Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Asymptoten einer Kurve. Theorie der Determinanten. — Funktionen von mehreren unabh. Veränderl. Anwendungen auf die analyt. Geometrie des Raumes. Anwend. auf die analyt. Geometrie der Ebene. Herleitung der Taylor'schen Reihe für Funkt. von mehreren Veränderl. Homogene Funkt. Maxima und Minima der Funkt. von mehr. Veränderl. — Tafeln der hyperbol. Funkt. Tabelle der wichtigst. Formeln aus der Differentialrechnung.

Herdersche Verlagshandlung.

Freiburg i. Breisgau 1911.

Schwering, Karl, & Krimphoff, Wilhelm, Ebene Geometrie. Nach den amtlichen Vorschriften bearb. 7:e aufl. Mit 162 Fig. — VIII + 142 pp. 8. M. 1: 80 geh.; 2: 30 geb.

A. Hermann & Fils.

Paris 1908—12.

DUHEM, PIERRE, Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée. (Extr. des Ann. de Philos. Chrét.) — 110 pp. 8.

La science hellénique. La philosophie des Arabes et des Juifs. La scolastique chrétienne du Moyen-Age. La renaissance avant Copernic. Copernic et Rhaeticus. De la préface d'Osiander à la réforme grégorienne du calendrier. De la réforme grégorienne du calendrier à la condamnation de Galilée. Conclusion. Table des auteurs cités.

DUHEM, P., L'évolution de la mécanique. — 348 pp. 8. Fr. 5: —.

Introduction. Les explications mécaniques: La mécanique péripatéticienne. La méc. cartésienne. La méc. atomistique. La méc. newtonienne. La force et les vertus occultes. Le principe des vitesses virtuelles et la statique de Lagrange. Le principe de d'Alembert et la dynamique de Lagrange. La méc. analytique de Lagrange et la mec. physique de Poisson. La théorie cinétique des gaz. La théorie méc. de la chaleur. Les théories méc. de l'électricité. L'impossibilité du mouvement perpétuel. La méc. de Hertz. L'atome-tourbillon. Considérations gén. sur l. explications méc. — Les théories thermodynamiques: La physique de la qualité. De la comparaison entre la théorie et l'expérience, et de la modific. virtuelle. Équilibre et mouvement. La conservation de l'énergie. Le travail et la quantité de chaleur. La modification réversible. Le principe de Carnot et la température absolue. Le potentiel interne et la statique gén. Le principe de la dynamique gén. Les relations supplémentaires. L'équation de la force vive et l'énergie utilisable. La stabilité et le deplacement de l'équilibre. Le frottement et les faux équilibres chimiques. Les altérations permanentes et l'hystérèsis. L'électrodynamique et l'électromagnétisme. — Conclusion.

FRIEDEL, G., Leçons de cristallographie. Avec 383 fig. — V + 310 pp. 8.

Introduction. *Étude du cristal.* Cristallographie géométrique: Généralités. Mesure des angles. Loi d'Haüy. Hypothèse réticulaire de la structure du cristal. — Symétrie: Recherche des modes de symétrie possibles dans les cristaux. Symétrie du réseau. Système de notation des faces. — Seconde loi fondamentale. Détermination de la forme primitive. — Cristallographie physique: Propriétés vectorielles discontinues. Formes extérieures. Cohésion. Propriétés vectorielles continues. Généralités. Dureté. Dilatation thermique. Conductibilité thermique. Pyroélectricité. Piézoélectricité. Propriétés optiques. Transmission de la lumière par les milieux cristallisés. Propriétés optiques d'une lame à faces parallèles. Double réfraction dans les substances amorphes. Polarisation rotatoire. Couleurs des cristaux. Eclat. *Étude des édifices cristallins complexes et des transformations.* Macles, groupements et déformations: Généralités. Loi générale des macles. Macles par mériédrie. Macles par pseudomériédrie. Macles par mériédrie réticulaire. Macles par pseudomériédrie réticulaire. Production de macles par action mécanique. Autres déformations mécaniques. Groupements de cristaux d'espèces différentes. Groupements irréguliers. — Isomorphisme: Généra-

lités. Exemples. Conditions de la syncristallisation. Propriétés des cristaux mixtes. — Polymorphisme: Polymorphisme et isomérie. Transformations paramorphiques. Densités et symétries des formes polymorphes. — Appendice: Notions sur la théorie de la structure de Schoenflies.

HEYWOOD, H. B., & FRÉCHET, M., L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique. Avec une préface et une note de M. Jacques Hadamard. — VI + 165 pp. 8.

Préface. — Introduction: Généralités. Rappel de quelques définitions et théorèmes d'analyse. Fonctions orthogonales. — Problèmes se ramenant à l'équation de Fredholm: Problèmes de potentiel. Probl. relatifs à l'équat. $\triangle V = R(x, y, z) V$ et à des équat. analogues. — L'équation de Fredholm: Définition. Méthode d'itération. Méthode de Fredholm. Résolution de l'équat. int. homogène. L'équat. de Fredholm à noyau symétrique. — Résolution des probl. posés dans le chapitre premier: Introduct. La solution des probl. de potentiel. Probl. rel. à l'equat. $\triangle V = R(x, y, z) V$ et à des équat. analogues. Note A, B.

LALESCO, TRAJAN, Introduction à la théorie des équations intégrales. Avec un préface de M. Emile Picard. — VII — 152 pp. 8. Fr. 4: —.

Introduction. — L'équation de Volterra. — L'équation de Fredholm: Les formules de Fredholm. Le premier théorème de Fredholm. — L'étude approfondie du noyau résolvant: Fonctions orthogonales et biorthogonales. Fonctions principales. Le second et le troisième théorème de Fredholm. Développements divers. — Noyaux spéciaux: Le noyau symétrique. Le noyau symétrique gauche. Le noyau symétrisable. — L'équation de Fredholm de première espèce. — Les équations singulières: L'équat. sing. de Volterra. L'équat. sing. de Fredholm. Les équations intégrales d'ordre supérieur.

POINCARÉ, H., Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, professées à la Sorbonne, rédigées par Henri Vergne. — XXV + 294 pp. 8.

Hypothèse de Kant. Hyp. de Laplace. Analyse de l'hypothèse de Laplace. Travaux de Roche. Étude de la stabilité d'un anneau. Formation des satellites. Hypothèse de H. Faye. Hyp. de M. du Ligondès. Hyp. de M. See. Théorie de Sir G.-H. Darwin. Sur l'origine de la chaleur solaire et de la chaleur terrestre. Théorie de Sir Norman Lockyer. Théorie de M. Schuster. Théorie de M. Arrhenius. La voie lactée et la théorie des gaz. Formation des nébuleuses spirales d'après M. See. Hypothèse de M. É. Belot.

S. Hirzel.

Leipzig 1911.

MANGOLDT, HANS VON, Einführung in die höhere Mathematik, für Studierende und zum Selbststudium. 1:er Bd.: Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung und der analytischen Geometrie. Mit 121 Fig. — V + 477 pp. 8. M. 12: geh.; M. 13: — geb.

Kombinatorik: Permutationen. Kombinationen. — Summationsformeln. — Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Wahrscheinlichkeit von zufälligen Ereignissen. Wahrscheinlichkeit von Annahmen. — Determinanten. — Irrationale Zahlen. — Wurzeln, Potenzen mit nicht ganzzahligen Exponenten, Logarithmen, Winkelmessung. — Grundbegriffe der analytischen Geometrie: Koordinatensysteme. Erklärungen und Sätze, die für Ebene und Raum gemeinsam gelten. Grundaufgaben der analyt. Geometrie der Ebene. Grundaufgaben der analyt. Geometrie des Raumes. — Veränderliche und Funktionen: Festellung der allgemeinen Begriffe. Algebraische Funktionen. Transzendente Funktionen. Geometrische Darstellung des Verlaufes einer Funktion. — Gerade und Ebene. — Grenzwerte. Stetigkeit.

Stark, J., Prinzipien der Atomdynamik. 2: Die elementare Strahlung, — XV + 286 pp. 8. M. 7:80 geh.; 9:— geb.

Prinzipien der elektromagnetischen Strahlung. Strukturelle Charakteristik der optischen Frequenzen: Serienspektrum, Bandenspektrum, Röntgenspektrum. Der elementare Träger und Sitz der Spektra: Bandenspektrum, Serienspektrum, Besondere Arten optischer Frequenzen. Der elementare Umsatz von Lichtenergie: Serienspektrum, Bandenspektrum, Röntgenspektrum. Struktur der elementaren Lichtenergie.

Ad. Hoste.

Gand 1910—11.

Jans, C. de, Over krommen van Clairaut, Boscowich en Playfair. Sonderabdr. aus »Handel. van het 14e Vlaamisch Natuur- en Geneeskundig Congres, Antwerpen 1910». — 51 pp. 8.

Lecat, Maurice, Leçons sur la théorie des déterminants à n dimensions avec applications à l'algèbre, à la géometrie etc. — VII + 223 pp. 4. Fr. 16:—.

Matrices symétriques et autres. — *Théorie des déterminants et des permanents.* Déterminants généraux: Définitions. Propriétés fondamentales des déterminants. Développement des permanents et des déterminants. Multiplication des matrices. — Déterminants spéciaux: Déterminants ayant des éléments égaux entre eux et non nuls. Déterminants ayants des éléments nuls. Nombres de termes de matrices particulières. — — Théorie des déterminants cubiques ou à n dimensions et d'ordre infini. *Applications de la théorie des déterminants.* Applications à l'algèbre: Formes à un nombre quelconque de variables. Formes binaires. Produits symboliques. — Applications à la théorie des équations. — Applications géométriques: Généralisation de la relation de Ptolémée. — Applications arithmologiques: Sur certaines transformations des déterminants et applications à la théorie des formes. Déterminants arithmétiques. Généralisation de théories de Smith, Cesaro, Hammond. — Appendice: Déterminants adjoints de classe supérieure. Erreurs de Gegenbauer. Structure des matrices actinomorphes. Théorème de Kronecker généralisé. Analogie des matrices avec les produits ordinaires.

Lecat, Maurice, Abrégé de la théorie des déterminants à n dimensions avec de nombreux exercices. — XVI + 156 pp. 4.

Théorie des déterminants et des permanents: Définitions, Propriétés fondamentales des déterminants. — Développement des permanents et des déterminants: Dével. par abaissement de la classe. Dével. par abaissement de l'ordre. Développements diagonaux. — Multiplication des matrices: Multipl. des déterminants. Multipl. des permanents. Multipl. des déterm.-perman. — Nombres des termes de matrices particulières. — Applications à la théorie algébrique des formes. — Première méthode: Formes à un nombre quelconque de variables. Formes binaires. Deuxième méthode: Produits symboliques. Théorie von Escherich. — Appendice.

Max Jänecke.

Hannover 1911.

Düsing, K., Leitfaden der Kurvenlehre. (Analytische Geometrie der ebene.) Für höhere technische Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Mit zahlreichen Anwend. aus der Technik von E. Preger, sowie vielen Übungen u. 117 Fig. — IV + 144 pp. 8. M. 2: 20.

Punkte. Die gerade Linie. Der Kreis. Veränderung des Koordinatensystems. Parabel. Die Ellipse. Hyperbel. Verwandtschaft zwischen Parabel, Ellipse und Hyperbel. Parabeln höherer Ordnung. Rollkurven. Andere Kurven. Allgemeine Ableitungen. Andere Koordinatensysteme. Resultate.

F. Kiliàn's Nf.

Budapest 1911.

Holba, Stefan, Fermats letzter Satz als Minimumaufgabe. Mit einem Anhang. — 29 pp. 8. K. 1: 20.

Einleitung. Die Bedingungen der Lösbarkeit der Fermatschen Gleichung, wenn die Potenzzahl n ungerade ist. Die Beding. der Lösbarkeit d. Fermatschen Gleich., wenn die Potenzzahl gerade ist. Der einfachste Beweis des Fermatschen Satzes.

L. Kokai.

Budapest 1912.

Vörös, Cyrillo, Analitika geometrio absoluta. Vol. 2: La spaco Bolyaia. 199 pp. 8. Sm. 4: —.

Punkto kaj ebeno. Duaordaj figuroj. Formoj de l'duaordaj surfacoj.

Franz Quelle.

Bremen 1909.

ROESER, ERNST, Die Verfolgungskurve auf der Kugel. Diss. — 61 pp. 8. M. 1: —.

Georg Reimer.

Berlin 1907.

BURRAU, CARL, Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus. Mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument. (Kreis- und Hyperbelfunktionen.) — XX + 63 pp. 8. M. 4: —.

Cosinus und Sinus der natürlichen, reellen Zahlen (Kreisfunktionen). Cosinus und Sinus der natürlichen, rein imaginären Zahlen (Hyperbelfunktionen). Ein mal 3-stellige Rechentafel als Interpolationstafel der Cosinus- und Sinus-Tafeln.

Adrian Romo.

Madrid 1912.

DEL CORRAL, JOSÉ ISAAC, Nuevos métodos para resolver ecuaciones numéricas. XXII + 303 pp. 8. Pes. 7: —.

Raices complejas de una funición real. Eulerianas de una función entera. Límites del valor y del número de las raíces. Número exacto de raíces reales de una ecuación. Separación de las raíces reales de una ecuación numérica. Cálculo de las raíces reales. Raíces imaginarias. Aplicaciones diversas.

Universitäts-Buchdruckerei von Gustav Schade.

Berlin 1911.

Jahrhundertfeier der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin, 10—12 Oktober 1910. Bericht im Auftrag des Akad. Senats erstattet von dem Prorektor Erich Schmidt. — 317 pp. 8.

B. G. Teubner.

Leipzig 1911—12.

BROGGI, HUGO, Versicherungsmathematik. Deutsche Ausg. — VIII + 360 pp. 8. M. 7: — geh.; M. 8: — geb.

Das fundamentale Problem. — Die mathematischen u. statistischen Grundlagen: Die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung u. der Fehlertheorie. Die statistische

Sterblichkeitstheorie. Ableitung einiger Formeln der politischen Arithmetik. — Die fundament. Probleme der Lebensversicherungsmathematik: Die gebräuchlichen Rechnungsmethoden. Die Bestimmung d. Wertes der hauptsächlichen Versicherungsformen. — Die Technik der Lebenversicherung: Die Prämien u. die Reserven. Die Gewinne. — Die Theorie des Risikos. Tafeln.

Czuber, Emanuel, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Bd. I. Dritte sorgf. durchgeseh. Aufl. — XIV + 605 pp. 8.

Differential-Rechnung: Variable u. Funktionen: Entwicklung des Zahlbegriffs. Variable. Funktionen. — Differentiation von Funktionen einer Variablen: Allgem. Sätze üb. Differentation. Differentialquotienten der element. Funkt. Allgem. Sätze üb. den Zusammenhang einer Funktion mit ihrem Differentialquotienten. Die höh. Differentialquot. u. Differentiale. Transformation der unabhäng. Variablen. — Differentation von Funkt. mehrerer Variablen: Partielle Differentialquot. u. Differentiale. Das totale Differential. Die höh. Differentialquot. u. Differentiale. Differentiation zusammengesetzter u. impliziter Funkt. Transform. d. Variablen. — Reihen: Reihen. m. konstanten Gliedern. Reihen m. variablen Gliedern. Die Formeln u. Reihen von Taylor u. Maclaurin. Die elem. Funkt. einer kompl. Variablen. Die unbest. Formen. — Maxima u. Minima d. Funktionen: Max. u. Min. d. Funkt. einer Variablen. Max. u. Min. d. Funkt. mehrerer unabhäng. Variablen. Max. u. Min. von Funkt. mehrerer abhäng. Variablen. — — Anwendung d. Differential-Rechnung auf die Untersuchung von Kurven u. Flächen: Ebene Kurven: Die Tangente u. die Normale. Asymptoten. Gestalt. einer Kurve in der Umgebung eines Punktes. Verhalten zweier Kurven in d. Umgeb. eines gemeins. Punktes. Länge eines Kurvenbogens. Bogendifferential. Krümmung ebener Kurven. Die sing. Punkte eb. Kurven. Einhüllende Kurven. — Raumkurven u. krumme Flächen: Tangente u. Normalebene einer Raumkurve. Die erste Krümmung od. Flexion. Oskulationsebenen einer Raumkurve. Die zweite Krümmung od. Torsion. Tangenten u. Tangentialebenen, Normalen u. Normalebenen einer krummen Fläche. Einhüllende Flächen. Die Polarfläche einer Raumkurve. Krümmung v. Kurven auf krumm. Flächen. Spez. Kurven auf krumm. Flächen.

Hammer, E., Lehrbuch der elementaren praktischen Geometrie (Vermessungskunde). Bd. I, Feldmessen und Nivellieren, des Lehrbuchs der Vermessungskunde besonders für Bauingenieure. — XIX + 766 pp. 8. M. 22: — geh.; 24: — geb.

Einleit. Lagemessungen oder Horizontalmessungen der elem. prakt. Geometrie: Kleinmessung oder Stückmessung, Einzelmessung. Berechn. der Flächen v. Grundstücken aus Messungszahlen. Teilung v. Feldflächen mit Benütz. v. Plänen. Flächen in technischen Zeichnungen. Planimeter. Der Theodolit zum Messen belieb. Horizontalwinkel. Elemente d. Zugmessung. Element. Aufgaben d. Kleintriangulierung. Element. Aufg. üb. Absteckungsarbeiten (im Sinn der Lagemessungen) m. Hilfe des Theodolits. — Höhenmessungen od. Vertikalmessungen d. elem. prakt. Geometrie: Nivellieren od. Einwägen.

Henneberg, Lebrecht, Die graphische Statik der starren Systeme. (B. G. Teubners Samml. von Lehrbüchern ... Bd. 31.) — XV + 732 pp. 8. M. 24: —.

Das ebene Kräftesystem. Allgemeine Theorie: Die allgemeine analytische und graphische Untersuchung des ebenen Kräftesystemes. Die Zusammensetz. d. Kräfte eines ebenen Kräftesyst. durch Kräfte- und Seilpolygon. Eigensch. des Seilpolygones. Weitere Methoden für d. graphische Zusammensetz. der Kräfte eines ebenen Kräftesyst. Kräftekurve und Seilkurve. Allgem. Theorie der reziproken Figuren. Die Zerlegung der Kräfte. — Das ebene Kräftesyst. Anwendungen. Graphische Schwerpunktsbestimmung. Die Momentenfläche u. der belastete Balken. Der durchlaufende Träger. Theorie und Konstrukt. d. Trägheitsmomente. Trägheitsellipse u. Trägheitskreis. — Das räumliche Kräftesystem: Analyt. Untersuchung des räumlichen Kräftesyst. Graphische Zusammensetz. des räuml. Kräftesyst. Weitere geom. Untersuchung des Nullsyst. u. die Zerlegung der Kräfte. — Das bestimmte ebene Fachwerk: Hauptaufgaben der Theorie der bestimmt. eben. Fachwerke. Untersuch. von speziellen einfacheren best. Fachwerken. Die Struktur des best. eben. Fachwerkes. Die allgem. Methoden der Spannungsbest. bei dem best. Fachwerke. Die gestützen eben. Fachwerke. — Das best. räuml. Fachwerk: Die Grundaufg. d. Theorie der räuml. Fachwerke. Untersuch. von spez. einfacheren best. räuml. Fachwerken. Die Struktur d. best. räuml. Fachwerkes. Die allgem. Methoden d. Spannungsbest. in dem best. räuml. Fachwerke. Spez. räuml. Fachwerke.

Jahnke, E., Die Mathematik an Hochschulen für besondere Fachgebiete. (Abhandl. ... hrsg. von F. Klein. Bd. 4: 7). — VI + 55 pp. 8. M. 1: 80.

Die Bergakademien. Die Hochschulen der deutschen Militärverwaltungen. Die Forstakademien. Die landwirtschaftlichen Hochschulen. Die Handelshochschulen. Die math. Ausbildung der höh. Post- und Telegraphenbeamten. Sonstige Institute m. Vorlesungen üb. höhere Mathem. Schlusswort.

Klein, F., Aktuelle Probleme der Lehrerbildung. Vortrag auf der Versammlung des Vereins zur Förderung d. math. und naturwissensch. Unterrichts am 6. Juni 1911 zu Münster. (Schriften des deutschen Ausschusses f. den math. und naturw. Unterricht. H. 10.) — 32 pp. 8. M. 1: 20.

Krause, Martin, Theorie der elliptischen Funktionen. Unter Mitwirkung von Emil Naetsch. (Mathematisch-physik. Schriften f. Ingenieure u. Studierende, hrsg. von E. Jahnke. 13.) — VI + 186 pp. 8. M. 4: —.

Einleitung. Allgemeine Theorie der Jacobi'schen Funktionen. Spezielle Theorie der Jacobi'schen Funkt. im reellen Gebiete. Geom. Deutungen. Theorie der Legendre'schen elliptischen Normalintegrale. Theorie der Weierstrass'schen Funktionen. Darstellung der allgem. doppeltperiodischen Funktionen durch die bisher behandelten spez. Funkt. Reduktion des allgem. elliptischen Integrals auf die ellipt. Normalintegrale.

Lietzmann, Walther, Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht. (Abhandl. üb. den math. Unterricht in Deutschland,

veranlasst durch die IMUK, hrsg. von F. Klein, Bd. 5: 1.) — VII + 122 pp. 8. M. 3: —.

Rechenunterricht u. Rechenbuch. Das Rechnen mit ganzen Zahlen. Das Rechnen im erweiterten Zahlkreis. Anhang.

LIETZMANN, W., Bericht über die Tätigkeit des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht im Jahre 1910. (Schriften d. deutschen Ausschusses f. d. math. u. naturw. Unterricht. H. 9.) — 26 pp. 8. M. 0: 50.

LIETZMANN, W., Der Pythagoreische Lehrsatz. (Mathem. Bibliothek hrsg. von W. Lietzmann & A. Witting. 3.) — 72 pp. 8. M. 0: 80.

Einiges aus der Geschichte des pythagoreischen Lehrsatzes. Zerlegungsbeweise. Der pythagor. Lehrsatz im Euklidischen System. Pythagoreischer Lehrsatz u. Ähnlichkeitslehre. Funktionsbetrachtungen. Pythagoreische Zahlen. Das Fermatsche Problem. Einiges üb. die Literatur zum pythag. Lehrsatz.

LÖFFLER, E., Ziffern und Ziffernsysteme der Kulturvölker in alter und neuer Zeit. (Mathematische Bibliotek hrsg. von W. Lietzmann & A. Witting. 1.) — IV + 93 pp. 8. M. 0: 80.

Vorwort. Einleitung. Wesen und Bedeutung der Ziffernschrift. Die Ziffernsysteme der wichtigsten Kulturvölker. Die Zahlzeichen der Babylonier u. Assyrer. Die Zahlzeichen der Ägypter. Die Zahlzeichen der Griechen. Die römischen Ziffern. Die Zahlzeichen d. semitischen Völker. Die indischen Ziffern. Die Zahlzeichen der Chinesen und Japaner. Vergleichende Übersicht über die Prinzipien der Ziffernschrift.

MARCOLONGO, ROBERT, Theoretische Mechanik. Aut. deutsche Bearb. von H. E. Timerding. 2:er Bd. Dynamik und Mechanik der deformierbaren Körper. — VII + 344 pp. 8. M. 10: — geh.; 11: — geb.

Dynamik des Punktes: Die Grundgesetze d. Bewegung. Besond. Probl. d. Bewegung eines Punktes. — Dynamik der Punktsysteme: Das d'Alembertsche Prinzip u. die allgem. Gleichungen d. Dynamik. Allgem. Prinzipien d. Beweg. eines materiellen Syst. Dynamik d. starren Syst. Das Newtonsche Potential. — Mechanik der deformierbaren Körper: Kinematik d. deform. Körper. Statik d. deform. Körper. Grundzüge d. Hydrodynamik.

MEYER, FRANZ W., Über die Theorie benachbarter Geraden und einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff. Eine Ergänzung zu den Lehrbüchern über Differentialgeometrie. Mit 5 Fig. — XVIII + 152 pp. 8. M. 8: — geh.; M. 9: — geb.

Einleitung. Die Krümmung einer Raumkurve c in bezug auf eine beliebig durch den Kurvenpunkt P gelegte, u. mit diesem stetig variierende Richtung g. Das g begleitende Dreikant, die drei zugehörigen Krümmungen (I), und die verallgemein. Frenet-

schen Formeln (II). Sphärische Abbild. in bezug auf eine beliebige Richtung. Geom. Bedeutung der Formeln (II). Der Krümmungswinkel ω_g. Krümmungseigenschaften sphär. Bildkurven. Anwend. auf die Kurven $\frac{r_g}{\varrho_g}$ = konst. Die Komponenten ε des Vektors PQ in bezug auf die Kanten des g begleit. Dreikants. — Die zum kürzesten Abstande zweier Geraden bezügl. Formeln. Die Ausdrücke f. die Abstände δ_g und e_g. Die Besonderheiten f. die Abst. e_g. Die Abst. ε_g. Die Formeln f. die Abst. δ, e, ε bei benachb. Geraden b_g, resp. h_g. Anwendungen auf das kanonische begl. Dreikant. Der Fall $g \perp t$. Assoziiertes Dreikant. Die Grundformeln f. die Abst. δ, e, ε bei einem assoziierten Dreikante der Raumkurve. Das ass. Dreikant einer Flächenkurve. Anhang: Die Ausdehnung der verallg. Frenetschen Formeln (II) des § 1 auf den R_{n+1}. Spärische Abbild. der Kurve c hinsichtl. der Ausgangsricht. g_0. Darstellung des kanon. $(n+1)$-kants d. Bildkurve c_0, u. das Gesetz d. Krümmungswinkel ... Invariante Darstellungen von Krümmungsgrössen und verwandten einer Raumkurve, resp. einer Flächenkurve im R_3.

Müller, Felix, Der mathematische Sternenhimmel des Jahres 1811. Rückblicke auf die Mathematik vor hundert Jahren. Festschrift z. Feier des hundertjährigen Bestehens der Firma B. G. Teubner, am 3. März 1911. — 29 pp. 8. M. 0: 80.

Schilling, C., & Meldau, H., Der mathematische Unterricht an den deutschen Navigationsschulen. (Abhandl. üb. d. mathem. Unterricht in Deutschland veranl. durch die internat. math. Unterrichtskommission, hrsg. von F. Klein Bd. 4, H. 4.) — VI + 82 pp. 8. M. 2: —.

Die Entwickelung des nautischen Unterrichts in Deutschland. Die nautischen Prüfungen. Die Organisation d. Navigationsschulen. Stellung, Zweck, Stoff u. Begrenzung d. math. Unterrichts an d. Navig. schulen. Die Ausbildung der Lehrer f. d. Navig.-schulen. Math. Lehrbücher u. Mathematisches in d. Lehrbüchern d. Seeleute. Rückblick u. Ausblick auf die Vorbildung unserer Seeleute.

Stäckel, Paul, & Ahrens, Wilhelm, Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Erläutert u. durch einen Abdruck der Fuss'schen Liste der Eulerschen Werke ergänzt. — XI + 184 pp. 8. M. 8: — geh.

Stahl, Hermann, Abriss einer Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in neuer Fassung. Nachgelassene Schrift in Verbind. mit Dr. E. Löffler hrsg. von M. Noether. — 103 pp. 8. M. 5: — geh.

Vorbereitende Sätze. Darstellungen durch die Funktion $T(x, y; \xi, \eta)$. Darstellungen durch die Funktion $u(x, y; \xi, \eta)$.

Study, E., Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. H. 1: Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen. — 126 pp. 8. M. 4: 80 geh.

Darstellung imaginärer Elemente nach v. Staudt. Komplexe Punkte in der Ebene. Der Schwenkungsprozess. Einfachste Bewegungsinvarianten. Ein Übertragungsprinzip d. Differentialgeometrie. Die kompl. Punkte. Ger. Linien. Der Kreis. Die ebenen analyt. Kurven. Die reellen Bilder d. ebenen analyt. Kurven. Einschaltung üb. Abbild. Die beiden Bilder einer analyt. Kurve. Die Bogenelemente d. ersten Bildes. Die Bogenelem. d. zweiten Bildes. Stellen bes. Verhaltens einer analyt. Kurve und ihrer Bilder. Die Verzweigungspunkte d. ersten Bildes. Der Kurvenbogen als Parameter. Beispiele. Üb. die analyt. Fortsetz. von Potentialfunktionen. Zum Schluss.

Thaer, A., Geuther, N. & Böttger, A., Der mathematische Unterricht in den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte Mecklenburgs und Oldenburgs. (Abhandl. üb. den math. Unterricht in Deutschland veranl. durch die internationale mathem. Unterrichtskommission, hrsg. von F. Klein. Bd. 1: 4.) — VI + 93 pp. 8. M. 2: 10.

Lehrpläne f. den math. Unterricht. Eingef. Lehrbücher. Verwend. von Apparaten u. Modellen, ihre Herstellung durch Schüler. Propäd. geometr. Unterricht. Anwend. d. Mathem. Prakt. Übungen. Stellungnahme zu den tradit. Zielen u. zu der übl. Methode. Stellung zu den Reformbestrebungen, insbes. zu den Vorschl. der Unterrichtskommiss. Auf welchen Gebieten könnte eine Entlastung zugunsten des neuen Lehrstoffes eintreten? Das Interesse des physik. und chem. Unterrichts an der Reform. Reifeprüfung. Ausbild. der Kandidaten etc.

Timerding, H. E., Die kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. (Abhandlungen . . . hrsg. von F. Klein. Bd. 3: 5.) — — 45 pp. 8. M. 1: 60.

Zur Einführung. Übersicht über das Gebiet der kaufmännischen Arithmetik. Die Stellungnahme der einzelnen Aufgabensammlungen zu der kaufm. Arithm. Wahrscheinlichkeitsrechn., Statistik u. Versicherungsrechn. auf der Schule. Phantasieaufgaben u. Wirklichkeitsaufg. Methodische Hilfsmittel. Schlusswort.

Timerding, H. E., Die Infinitesimalrechnung auf der Schule. — 26 pp. 8. M. 0: 80

Wieleitner, H., Der Begriff der Zahl. (Math. Bibliothek hrsg. von W. Lietzmann & A. Witting. 2.) — 67 pp. 8. M. 0: 80.

Die natürlichen Zahlen und die Null. Die negativen Zahlen. Die Brüche. Die Irrationalzahlen. Die imaginären Zahlen. Weiterführende Literatur.

Wirz, J., Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen sowie die Ausbildung der Lehramtskandidaten in Elsass-Lothringen. (Abhandl. . . . hrsg. von F. Klein, Bd. 2: 7.) — VI + 58 pp. 8. M. 1: 80.

Die gegenwärtige Organisation des höh. Schulwesens in Elsass-Lothringen. Die Entwicklung d. höh. Schulwesens u. des mathem. Unterrichts seit Beginn der deutschen Verwaltung. Die Unterrichtsmethode. Die neueren Reformbestrebungen. Die Ausbildung der Kandidaten u. die Fortbildung der Lehrer.

M. Tikhomandritzky.

Gatschina, St. Pétersbourg 1911.

TIKHOMANDRITZKY, M., Éléments de la théorie des intégrales abéliennes. Nouv. éd., revue, corr., complétée de notes et en partie refaite entièrement. — XV + 287 pp. 8. Fr. 14: —.

Préface. Partie 1:re (algébrique): Les propriétés d'une fonction implicite, définie par une équation algébrique irréductible. Sur les fonctions rationnelles de la variable indépendante et de la fonction implicite, déf. par une équation algébrique irréductible donnée. — Partie 2:e (transcendante): Réduction des intégrales abéliennes aux intégrales des trois espèces; les propriétés caractéristiques des intégrales de chaque espèce. Fonctions primaires. Relations entre les périodes des intégrales. Expression d'une fonction rationelle de (x, y), uniforme sur la surface de Riemann, par les fonctions primaires. Théorème d'Abel. Le problème de Jacobi. Les fonctions Thétas. Appendice.

Friedr. Vieweg & Sohn.

Braunschweig 1912.

RIEMANN-WEBER, Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemann's Vorlesungen in fünfter Aufl. bearb. von Heinrich Weber. Bd. 2. — XIV + 575 pp. 8. M. 15: — geh.; M. 16: 80 geb.

Hilfsmittel aus d. Theorie d. lin. Differentialgleichungen: Integration durch hypergeometr. Reihen. Integrat. d. best. Integrale. Die P-funktion von Riemann. Oszillationstheoreme. — Wärmeleitung: Die Differentialgleichung d. Wärmeleit. Probleme d. Wärmeleit. die nur von einer Koordinate abhängig sind. Wärmeleit. in der Kugel. — Elastizitäts-Theorie: Allgem. Theorie d. Elastizität. Statische Probleme d. Elastizitätstheorie. Druck auf eine elast. Unterlage. Bewegung d. gespannten Saiten. Die Riemann'sche Integrationsmethode. Schwingungen e. Membran. Allgem. Theorie d. Differentialgl. der schwing. Membran. — Elektrische Schwingungen: Elektr. Wellen. Lineare elektr. Ströme. Reflexion elektr. Schwingungen. Relativität. — Hydrodynamik: Allgem. Grundsätze. Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. Hydrodynam. Teil. Mechanischer Teil. Unstetige Bewegung von Flüssigkeiten. Fortpflanzung von Stössen in einem Gase.

John Wiley & Sons.

New York 1910.

CHURCH, P. IRVING, Mechanics of internal work (or work of deformation), in elastic bodies and systems in equilibrium, including the method of least work. 1 ed. Illustr. — VI + 127 pp. 8. $ 1: 50 (6/6).

External and internal work of elastic structures. The derivatives of internal work. The »theorem of least work» with applications to systems of bars in equilibrium

under loads. Internal work in beams under flexure. Applications. Composite systems and curved beams. Appendix.

Coffin, J. G., Vector analysis. An introduction to vector-methods and their various applications to physics and mathematics. 2nd ed. — XXII + 262 pp. 8. \$ 2: 50.

Elementary operations of vector analysis. Scalar and vector products of two vectors. Vector and scalar products of three vectors. Differentation of vectors. The differential operators. Applications to electrical theory. Applications to dynamics, mechanics and hydrodynamics. Exercises and problems. Notations and formulæ. Formulæ.

Martin, Louis A., Textbook of mechanics. Vol. 3: Mechanics of materials. — XIII + 229 pp. 8. \$ 1: 50.

Simple stresses: Normal stress and strain; shear. Applications of Hooke's law. — Stresses in beams: Bending moments and shearing forces. Theory of simple bending. Investigation and design of beams for bending. Shearing stresses in beams. — Delection of beams due to simple bending: The differential equation of the elastic curve and its application. The differential equations of beams. — Statically indeterminate beams: Propped and built-in beams. Continuous beams. — Struts and columns: Eccentric longitudinal loads. Buckling. — Torsion: Stress and strain due to torsion. Applications. — Stress, strain and elastic failure. Compound stresses: Combined torsion and bending. Envelopes. — The principle of work as used in computing deflections: Deflection due to bending. Deflections due to shear. — Problems for review. Answers. Index.

Carl Winter's Universitätsbuchhandlung.

Heidelberg 1911.

Lenard, P., Über Äther und Materie. Vortrag gehalten in d. Gesamtsitz. der Heidelberger Akad. d. Wiss. am 4. Juni 1910. 2:e ausführlichere u. mit Zusätzen versehene Aufl. — 51 pp. 8. M. 1: —.

QA
1
A2575
v.35
Physical &
Applied Sci.
Serials

Acta mathematica

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY